

考虑灵敏度区域的多目标鲁棒性优化算法

杨爱民^{1†}, 李杰², 刘卫星³, 张良进², 闫龙格²

(1. 华北理工大学 数据科学及应用河北省重点实验室, 河北 唐山 063009;

2. 华北理工大学 冶金与能源学院 教育部现代冶金技术重点实验室, 河北 唐山 063009;

3. 华北理工大学 继续教育学院, 河北 唐山 063009

摘要: 随机变量导致工程问题具有不确定性. 设计者希望设计方案不仅能满足目标性能最优, 而且希望目标性能受不确定性的影响在可接受范围之内. 对此, 本文提出了考虑灵敏度区域的多目标鲁棒性优化方法(multi-objective robust optimization based on sensitivity region, SR-MORO). SR-MORO可以用来解决设计变量存在不确定性时目标鲁棒性优化设计问题. 该方法假定不确定性变量属于区间变量, 并不需要知道随机变量的概率分布. SR-MORO采用非梯度优化方法, 所以, 它可以解决目标函数和约束条件不连续的情况. 当参数变化幅度大, 超过目标函数线性变化范围, 该方法也同样适用. 最后, 通过实例验证了本方法的适用性.

关键词: 灵敏度; 多目标鲁棒性; 鲁棒性指数; 区间变量; 最坏情况

中图分类号: V421.1 文献标识码: A

The multi-objective robust optimization method considering sensitivity region

YANG Ai-min^{1†}, LI Jie², LIU Wei-xing³, ZHANG Liang-jin², YAN Long-ge²

(1. Hebei Key Laboratory of Data Science and Applications,

North China University of Science and Technology, Tangshan Hebei 063000, China;

2. College of Metallurgy and Energy, Key laboratory for Advanced Metallurgy Technology,

Ministry of education, North China University of Science and Technology, Tangshan Hebei 063009, China;

3. College of Continuing education, North China University of Science and Technology, Tangshan Hebei 063009, China)

Abstract: Engineering design problems are usually uncertain because of the random variables. Designers want to design scheme to meet the goal of not only the best performance, but also want to target performance is affected by the uncertainty within the acceptable range. To solve this problem, we propose a multi-objective robust optimization method considering sensitivity region (multi-objective robust optimization based on sensitive region, SR-MORO). SR-MORO can be used to solve optimization design problem involving uncertainty design variables. This method assumes that the uncertainty variables belong to the interval variables, so it does not need to know the probability distribution of random variables. Non-gradient optimization method is used to solve the robust optimization problem, so that the approach is applicable for cases that have discontinuous objective and constraint functions with respect to uncontrollable parameters. When the parameters changed much over the linear range of the objective function, the method is also applicable. Finally, the applicability is also verified by an example.

Key words: sensitivity region; multi-objective robust; robustness index; interval variables; the worst-case

1 引言(Introduction)

工程设计问题, 设计变量往往具有随机性. 这些随机变量的存在能使得优化目标性能恶化, 甚至使得优化方案变为不可行解. 国内外学者相继提出了一些鲁棒性设计方法以期寻找对目标函数敏感性低的优化方案. 这些方法主要分为两类: 确定性鲁棒优化

方法和随机性鲁棒优化方法.

确定性鲁棒优化方法是通过参数的梯度信息获得鲁棒性优化设计结果^[1-5]. 如文献[3]根据响应对不确定性量的敏感程度使用基于Taylor展开的区间分析方法和配点型区间分析方法评估结构响应的上界和下界. 文献[4]基于隐含不确定性传播的鲁棒协同优化中

收稿日期: 2014-12-14; 录用日期: 2015-08-19.

[†]通信作者. E-mail: aiminyang@126.com; Tel.: +86 18633168516.

本文责任编辑: 张焕水.

国家自然科学基金项目(51504080)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (51504080).

通过系统级中加入全局灵敏度附加项约束保证目标解的鲁棒性。这种方法要求目标函数和约束条件对随机参数可导,其中的一些方法还需要假设目标函数和约束条件在设计点附件对于随机变量是线性关系^[5]。随机方法利用参数的概率分布信息(通常是方差和均值)解决鲁棒性设计问题^[6-11]。如文献[10]针对多目标非线性优化问题,考虑了设计变量的均值和方差对目标函数、约束函数的影响提出了一种可靠性鲁棒性优化设计方法。文献[11]推导求得AUV各参数均值和方差的可靠度灵敏度,选择灵敏度较小的参数作为确定性变量,并对AUV全动舵进行可靠性优化设计。然而,随机变量的真实概率分布往往难以获得,假设得到的概率分布可能与实际相悖。

为了克服上述一缺点, Gunawan等^[12-14]利用非梯度参数灵敏度估计提出了一种确定性鲁棒多目标优化方法,该方法可以用来解决目标函数和约束条件对随机变量不可微的情形,同时不需要事先知道随机变量的概率分布。然而,如果目标函数和约束条件对于随机变量不连续,该方法通常不能获得很好的结果。

基于以上分析,本文在Gunawan方法的基础上提出了一种基于灵敏度区域的多目标鲁棒性优化方法(multi-objective robust optimization based on sensitivity region, SR-MORO)。SR-MORO通过设计决策者定义不确定性变量的灵敏度区域,然后,随机变量向目标函数灵敏度区域映射获得可能性变动区域,通过可接受变动区域与可能性变动区域面积进行比较,判断设计方案的目标鲁棒性。该方法可以用来解决设计变量存在随机参数时目标函数不连续的鲁棒性优化问题。

2 多目标鲁棒优化模型及 Gunawan 的方法 (Multi-objective robust optimization model and gunawan method)

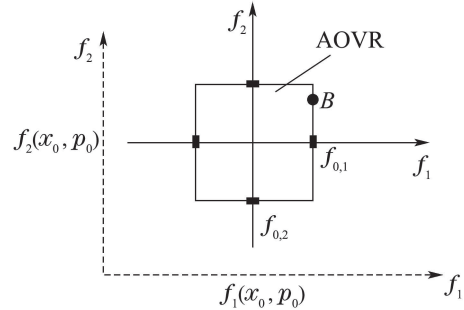
含有随机参数的多目标优化问题的数学描述为

$$\begin{aligned} \min_x F(x) &= [f_1(x, p_0), f_2(x, p_0), \dots, f_m(x, p_0)], \\ \text{s.t. } g_j(x, p_0) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \\ x^{\text{lower}} &\leq x \leq x^{\text{upper}}. \end{aligned} \quad (1)$$

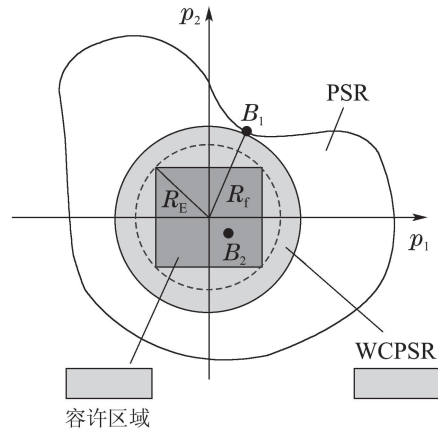
式(1)中: $[f_1(x, p_0), f_2(x, p_0), \dots, f_m(x, p_0)]$ 表示目标函数, $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ 表示确定性设计变量, $p = [p_1, p_2, \dots, p_G]$ 表示随机参数。 $g_j(x, p)$ 表示约束条件。

Gunawan方法^[12-14]的思想是:设计点 x_0 处目标可接受变动区域(acceptable objective variation region, AOVR)(图1(a)所示)反射到随机参数 p 的取值空间,形成参数敏感性区域(parameter sensitivity region, PSR)(图1(b)所示),PSR的大小代表着随机参数不确定性变化范围,若PSR完全包含 x_0 处的参数变化区间,则 x_0

具有目标鲁棒性。Gunawan采用最坏可能参数灵敏度区域(worst-case parameter sensitivity region, WCPSR)来代替PSR的计算。WCPSR是PSR内的超球空间,其半径是PSR内距离原点最近的点,如图1(b)所示。



(a) 目标可接受区域



(b) 参数敏感性区域

图1 Gunawan的多目标鲁棒性方法

Fig. 1 Multi-objective robust method of Gunawan

图1(b)中, R_f 是WCPSR的半径, R_E 是参数可接受变化区域的半径。容许区域(tolerance region)表明随机参数不确定性变化区域。Gunawan定义目标鲁棒性指数 $\eta_f = R_f/R_E$,如果 $\eta_f \geq 1$,表明WCPSR包含随机参数 p 的可接受变化区域,既表示优化解具有目标鲁棒性。其优化问题如式(2)和(3)所示。

$$\begin{aligned} \min_x F(x) &= [f_1(x, p_0), f_2(x, p_0), \dots, f_m(x, p_0)], \\ \text{s.t. } g_j(x, p_0) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \\ \eta_f &\geq 1, \\ x^{\text{lower}} &\leq x \leq x^{\text{upper}}, \\ \eta_f &= R_f/R_E. \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)中的 R_f 通过求解式(3)优化问题得到:

$$\begin{aligned} \min_{\Delta p} R_f(\Delta p) &= \left\{ \left[\sum_{j=1}^G t |\Delta p_j|^2 \right]^{1/2} \right\}, \\ \text{s.t. } \max_{m=1,2,\dots,m} & \left| \frac{f_m(x_0, p_0 + \Delta p) - f_m(x_0, p_0)}{\Delta f_{0,m}} \right| - 1 = 0, \\ \Delta p^{\text{lower}} &\leq \Delta p \leq \Delta p^{\text{upper}}. \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)中 $\Delta f_{0,m}$ 表示第 m 个目标的可接受变动区域AOVR的大小. 式(3)表明最坏可能情况下PSR内距离原点最近的点与原点的距离.

然而, Gunawan的方法并不能解决目标函数不连续时的多目标鲁棒性优化问题.

首先, Gunawan的方法鲁棒性优化标准要求PSR区域包含容许区域, 要求AOVR边界上的点映射到PSR区域边界. 例如, AOVR边界上的点可能映射到PSR区域内部. 图1展示了这一现象: B 点可能映射到 B_1 也可能映射到 B_2 , 正确的WCPSR的区域的半径应该是原点到 B_1 的距离, 而按照式(3)则认定WCPSR的区域的半径为原点到 B_2 的距离. 因此, WCPSR的区域错误的变小. 这样将会造成两个后果: 解实际上满足鲁棒性要求但被认定为不满足, 鲁棒性阈值过于严格. 这样优化结果劣于真实优化结果.

另一方面, 如果函数不连续, 则PSR区域则可能不连续或者有空洞, 如图2所示. 如果 O_1 为原点, 则按照式(3)则认定WCPSR的区域的半径为原点到 B_2 的距离, 则设计点 x_0 具有鲁棒性. 如果原点在 O_2 点, 则按照式(3)则认定WCPSR的区域的半径为原点到 B_1 的距离, 则设计点 x_0 也具有鲁棒性. 实际上, 这两种情况下设计点 x_0 并不具有鲁棒性, 因为容许区域完全在PSR区域之外.

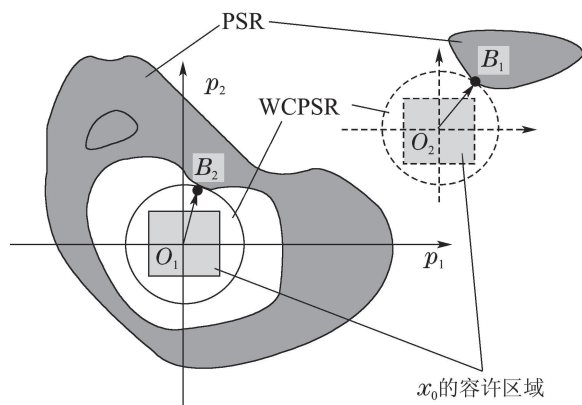


图 2 函数不连续时Gunawan的方法的参数敏感性区域
Fig. 2 Parameter sensitivity region of Gunawan method when function is discontinuous

综上可得出, Gunawan的方法应用在不连续函数优化问题上, 将可能存在上述两个缺点: 优化解劣于真实化解或优化解不具有鲁棒性. 非鲁棒性解可以通过对设计进行方案仿真排除, 但优化解劣于真实化解的问题很难解决.

因此, 本文在Gunawan方法的基础上通过对随机参数可接受区间向目标函数灵敏度区间映射提出了一种新的目标函数鲁棒性评价指标.

3 考虑灵敏度区域的多目标鲁棒性优化算法 (Multi-objective robust optimization method considering sensitivity region)

3.1 目标鲁棒性的评价 (Evaluation of objective robust)

文中的鲁棒性策略是通过将随机参数区间映射到目标函数区间, 通过定义鲁棒性指数为映射区间的最坏可能性区域与容许区域的比值来描述鲁棒性程度. 设计者可以设定设计鲁棒性阈值, 当阈值为1时, 表示设计点具有鲁棒性. 若想提高目标性能, 可以设置阈值大于1, 但此时并不能保证所有设计方案均满足鲁棒性要求.

在设计点 x_0 处随机参数 p 的变化对目标函数的影响可以通过将 Δp 向 Δf 映射实现. 这个区域称之为目标敏感性区域(objective sensitivity region, OSR). 式(4)定义了 Δp 向 Δf 映射关系.

$$\begin{aligned} \Delta f_m &= f_m(x_0, p_0 + \Delta p) - f_m(x_0, p_0), \\ \Delta p^{\text{lower}} &\leq \Delta p \leq \Delta p^{\text{upper}}. \end{aligned} \quad (4)$$

图3展示了两个随机参数向两个目标函数映射的示意. 阴影部分面积表示目标敏感性区域OSR. 应该注意到OSR可能不连续、不对称.

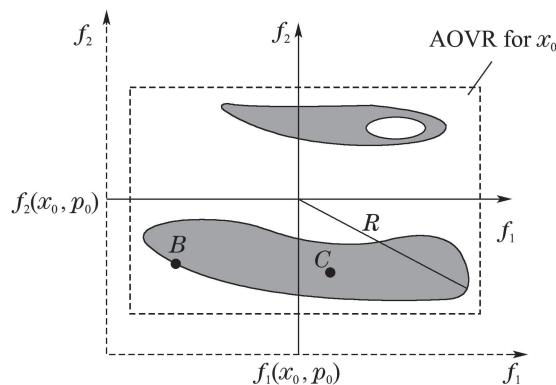


图 3 随机参数向目标函数变动区域映射示意
Fig. 3 Diagram of random parameters mapping to variable region of objective function

如果AOVR包含目标敏感性区域OSR, 则设计点具有鲁棒性; 反之, 则不具备. 然而, 确定包含关系和定量描述鲁棒性十分困难, 为了克服这个困难, 采用最坏情况下的目标敏感性区域OSR与AOVR的比值来描述目标函数鲁棒性指数.

为了计算目标函数鲁棒性指数, 需要知道AOVR, OSR的大小, 及沿着OSR对参数变化敏感的目标函数方向. 文中用矢量距离 R 来描述OSR中离原点最远的距离, 如图3所示. 然而, 在AOVR区间计算 R 是困难的, 因为不同目标函数单位不可比较. 因此, 需要按照式(5)对各目标归一化处理:

$$\Delta \bar{f}_m = \frac{f_m(x_0, p_0 + \Delta p) - f_m(x_0, p_0)}{\Delta f_{0,m}}, \quad (5)$$

$$\Delta p^{\text{lower}} \leq \Delta p \leq \Delta p^{\text{upper}}.$$

在下文中为了描述方便,用 Δf_m 表示目标函数归一化后的值.归一化后的AOVR是一个超立方空间.其内切圆半径 $R = 1$,是AOVR最坏估计.图4所示为2目标问题标准化的AOVR.

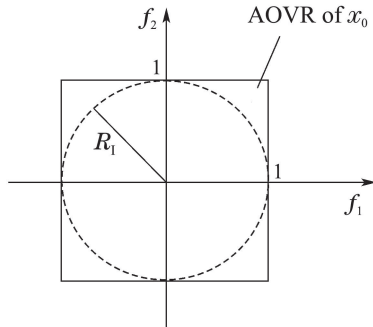


图4 归一化处理后的AOVR

Fig. 4 AOVR after Normalization

文中对OSR的最坏可能估计半径为 $R_{f_{\text{new}}}$,如图5所示.其中,在角标上加上New以示与Gunawan的定义区别.定义 $R_{f_{\text{new}}}$ 为最坏敏度区域WCOSR的半径.多维情况下,WCOSR将是一个超球区域.由图5所示,定义目标函数鲁棒性指数: $\eta_{f_{\text{new}}} = R_{f_{\text{new}}}/R_I$, 因为 $R_I = 1$, 所以有 $\eta_{f_{\text{new}}} = R_{f_{\text{new}}}$. 当 $\eta_{f_{\text{new}}} \leq 1$ 表明设计方案具有目标鲁棒性.

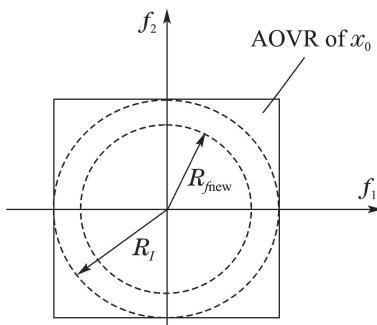


图5 鲁棒性标准

Fig. 5 Standard of robust

考虑到目标函数 $f_m(x_0, p_0)$ 不可导,可接受区域必须完全覆盖目标函数可能区域,在优化时直接计算每个设计方案处的OSR,将会带来巨大的计算成本.为解决这个问题,通过优化方法来计算 $R_{f_{\text{new}}}$,优化模型如式(6)所示,表达式中的参数均已归一化处理.

$$\max_{\Delta p} R_{f_{\text{new}}}(\Delta p) = \left[\sum_{m=1}^M |\Delta f_m(\Delta p)|^2 \right]^{1/2},$$

where $\Delta f_m(\Delta p) = \frac{f_m(x_0, p_0 + \Delta p) - f_m(x_0, p_0)}{\Delta f_{0,m}},$

$$\Delta p^{\text{lower}} \leq \Delta p \leq \Delta p^{\text{upper}}. \quad (6)$$

上述优化问题中 Δp 是 G 维随机变量 p 的可能变化区间, Δf_m 随着 Δp 的变化而变化.

在归一化后的 Δf_m 空间,上述优化问题的解即是WCOSR的半径 $\eta_{f_{\text{new}}}$.在3.2节中将介绍如何利用 $\eta_{f_{\text{new}}}$ 求解式(1)获得鲁棒解.

3.2 基于灵敏度区域的多目标鲁棒性优化求解 (Solving of multi-objective robust optimization considering sensitivity region)

MORO问题的目标是希望求得目标最优的解的同时,优化解满足鲁棒性要求:即随机参数的变化使得目标值依旧在可接受目标函数值变动区域内.本文的方法是通过设定鲁棒性指数阈值 $\eta_{0,f}$,使得优化解满足鲁棒性要求.这样,MORO问题描述为

$$\min_x F(x) = [f_1(x, p_0), f_2(x, p_0), \dots, f_m(x, p_0)],$$

s.t. $g_j(x, p_0) \leq 0, j = 1, 2, \dots, J,$

$$\eta_{0,f} - \eta_f \leq 0,$$

$$x^{\text{lower}} \leq x \leq x^{\text{upper}}. \quad (7)$$

式(7)中, $\eta_{f_{\text{new}}}$ 通过优化求解式(6)得到. $\eta_{0,f} = 1$ 将保证设计具有鲁棒性.设置 $\eta_{0,f} < 1$ 时,可以考虑由于目标函数计算误差或容许区域计算误差,但这是以牺牲目标函数为代价.设置 $\eta_{0,f} > 1$,可以提高目标函数的性能,但可能优化解不在容许区域内.

式(7)涉及到双层优化问题.外层优化问题是最小化 $f_m(x, p)$,设计变量是 x ,内层优化问题是最大化 $R_{f_{\text{new}}}$,设计变量为 Δp .图6展示了这个优化过程.外部优化产生 x_0, x_0 满足约束条件 $g_j(x, p) \leq 0$,将 x_0 传递到内部优化,寻找 $R_{f_{\text{new}}}$,将 $R_{f_{\text{new}}}$ 反传给外部优化问题以检验鲁棒性约束条件是否满足.

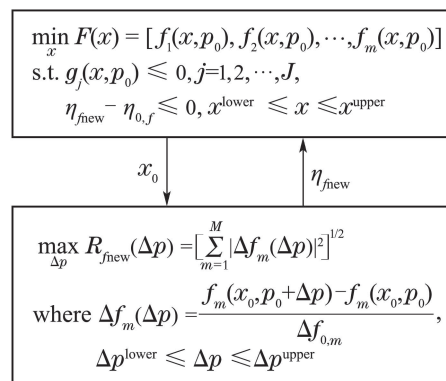


图6 SR-MORO双层求解结构

Fig. 6 Solution structure with double layer of SR-MORO

考虑到OSR不连续可能造成内外部优化问题目标函数不可导,内部优化问题采用GA算法,外部多目标优化问题采用MOGA算法^[15-16],约束处理方法参考文献[17].应该注意,本文的目的并不是同时优化 (x, p) ,而是在外部优化问题给定的 x_0 条件下,获取鲁棒性优良的解.

考虑上述优化问题的计算效率. 若假定外层优化问题的函数评价次数为 N 次, 内层优化问题的函数评价次数为 M , 则总的优化问题函数评价次数为 N 乘以 M 次.

4 算例(Example)

4.1 数学算例(Mathematics example)

数学问题的例子修改于文献[14], 如式(8)所示.

$$\min_x f_1(x) = \begin{cases} 1.01x_1, & 0.05 < x_1 < 0.1, \\ x_1, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$f_2(x) = g(x)h(x),$$

where $g(x) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i,$ (8)

$$h(x) = 1 - (f_1(x)/g(x))^2,$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, n = 3.$$

原优化问题是一个两目标优化问题, 含有30个设计变量, 且目标函数 f_1 相对于设计变量 x_1 是连续函数. 为了将文中方法与Gunawan的方法进行比较, 我们改变目标函数 f_1 使其相对于设计变量 x_1 不连续. 同时, 为了简化分析, 仅使用3个设计变量.

假定设计者给定的随机变量可接受变动区域 $\Delta x = [\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3] = [0.01, 0.01, 0.01]$, 目标函数的可接受变动区域 $\Delta f = [\Delta f_{0,1}, \Delta f_{0,2}] = [0.017, 0.1]$. 门槛值 $\eta_0 = 1$. 称直接求解式(8)的多目标优化问题为标准多目标优化解, 同样, 使用Gunawan的方法和文中提出的SR-MORO求解式(8)问题. 算法采用MOGA和GA. 优化结果如图7所示.

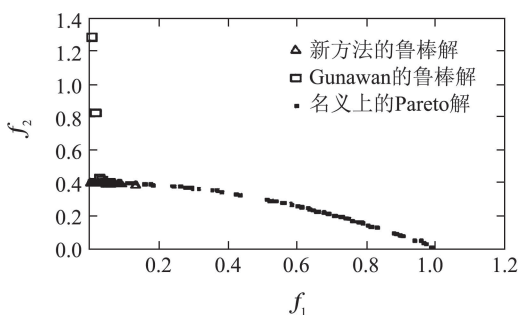


图 7 3种方法的结果比较

Fig. 7 Result comparisons between three methods

由图7所示, 对于存在不连续的目标函数情况, 文中提出的SR-MORO方法较Gunawan的方法优势明显. SR-MORO所求得到的优化解逼近标准多目标优化的Pareto前沿, 然而, Gunawan的方法因为 f_1 取值过小远离标准多目标优化获得的Pareto前沿. 这说明Gunawan的方法并不能很好的处理目标函数不连续的优化问题. 为了详细比较文中方法和Gunawan的方法, 我们在图8中将 f_1 轴扩展.

如果将 $\Delta f_{0,1}$ 由0.017降低至0.016, SR-MORO方法较Gunawan的方法优越性将更加明显, 如图9所示.

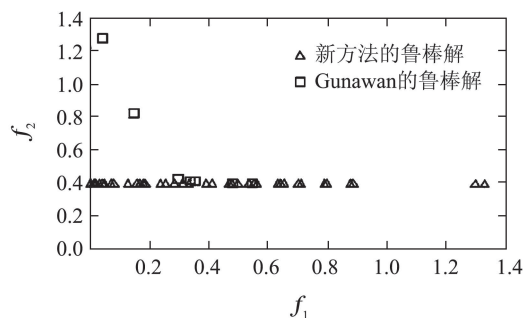


图 8 两种鲁棒性方法的结果比较

Fig. 8 Result comparisons between two robust methods

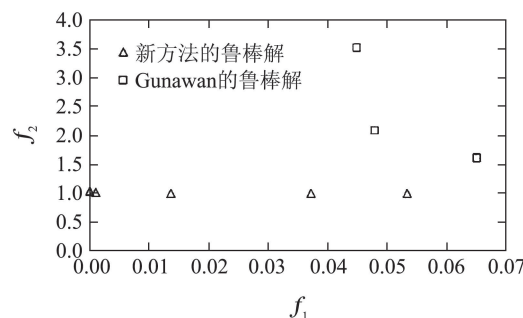


图 9 $[\Delta f_{0,1}, \Delta f_{0,2}] = [0.016, 0.1]$ 时鲁棒性结果

Fig. 9 Robust result with $[\Delta f_{0,1}, \Delta f_{0,2}] = [0.016, 0.1]$

如果设置 $\Delta f = [\Delta f_{0,1}, \Delta f_{0,2}] = [0.014, 0.12]$, Gunawan的方法将无法获得鲁棒性解, 而SR-MORO方法可以获得鲁棒性解, 如图10所示.

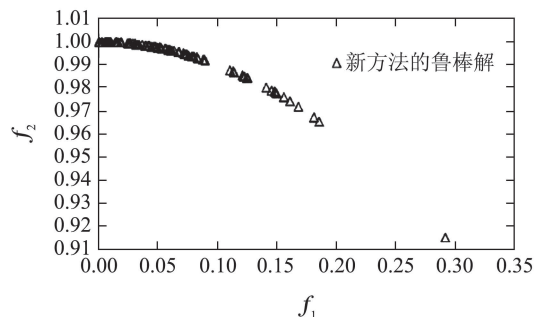


图 10 $[\Delta f_{0,1}, \Delta f_{0,2}] = [0.014, 0.12]$ 时鲁棒性结果

Fig. 10 Robust result with $[\Delta f_{0,1}, \Delta f_{0,2}] = [0.014, 0.12]$

这个例子表明, 当目标函数不连续时, Gunawan的方法应用有一定的限制性, Gunawan的方法获得的Pareto前沿与标准Pareto前沿差别较大, SR-MORO获得了逼近标准Pareto前沿的多目标解集. 当改变目标函数容许区域时, Gunawan的方法或者无法获得鲁棒性解, 或者获得的Pareto前沿不真实.

4.2 工程算例(Engineering example)

通过两桁架工程优化问题^[18]将文中提出的SR-MORO方法和Gunawan的方法进行比较. 两桁架工程优化问题如式(9)所示, 更详细的问题描述可参阅文献[18].

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f_1 = 10^3[x_1(16+x_3^2)^{1/2} + x_2(1+x_3^2)^{1/2}], \\ & f_2 = \frac{20(16+x_3^2)^{1/2}}{10^3x_1x_3}, \\ \text{s.t.} \quad & g_1 = \frac{f_1}{100} - 1 \leq 0, \\ & g_2 = \frac{f_2}{100} - 1 \leq 0, \\ & g_3 = \frac{f_3}{100} - 1 \leq 0, \\ \text{where } f_3 = & \frac{80(16+x_3^2)^{1/2}}{10^3x_1x_3}, \\ & 0.0001 \leq x_1, x_2 \leq 0.25, 1 \leq x_3 \leq 3. \end{aligned} \quad (9)$$

由式(9)可以看出,该优化问题含有3个设计变量、两个目标函数、3个约束条件.其中,3个设计变量都属于随机变量.用 Δx 表示随机变量容许区域.设计变量的容许区域 $\Delta x = [\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3] = [0.000125, 0.000125, 0.075]$,目标函数的容许区域为 $\Delta f = [\Delta f_{0,1}, \Delta f_{0,2}] = [1, 1]$.我们称直接求解式(9)的多目标优化问题为标准多目标优化解,同样,本文使用Gunawan的方法和文中性能鲁棒性方法求解式(9)问题.算法采用MOGA和GA,优化结果如图11所示.

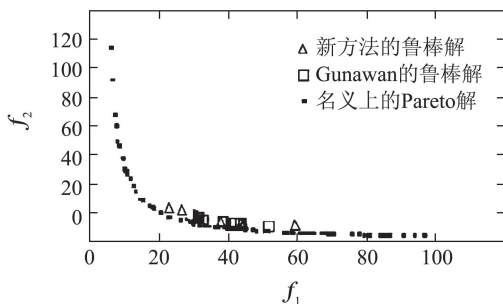


图 11 3种方法的结果比较

Fig. 11 Result Comparisons between three methods

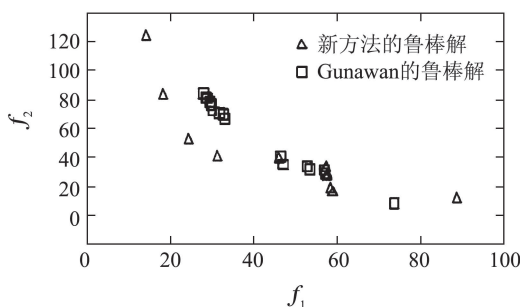


图 12 两种鲁棒性方法的结果比较

Fig. 12 Result comparisons between two robust methods

由图11可以看出, Gunawan的方法和SR-MORO方法所求的Pareto解集与标准方法获得的Pareto解集接近.比较Gunawan的方法和SR-MORO方法结果,如12所示,可以得出本文提出的SR-MORO方法解的结果优于Gunawan的方法.

5 结论(Conclusions)

本文提出了一种新的基于灵敏度区域的多目标鲁棒性优化方法(SR-MORO). SR-MORO具有如下特点:

- 1) SR-MORO适用于随机变量概率分布未知的情况,只需知道随机变量变化的上下界.
- 2) SR-MORO可以解决目标函数和约束条件不连续的优化问题.
- 3) SR-MORO适用于随机变量变化幅度大,超过目标函数线性变化范围的不确定性优化问题.

通过一个含有不连续目标函数的多目标优化测试算例和一个两桁架工程优化问题与Gunawan的方法进行比较,说明了本文方法的优越性.

应该注意灵敏性区域可能不连续,甚至为任何形状(含有空洞等),直接计算灵敏性区域很困难. SR-MORO通过最坏可能性情况估计灵敏性区域,将求解WCOSR转换为求解一个优化问题.带来了两方面的问题: 1) 最坏情况下的灵敏度区域来估算实际灵敏度区域计算的结果偏于保守,可能把本来具有鲁棒性的解认为是非鲁棒性解排除在外. 2) 整个优化问题变成一个内外双层优化问题. 求解这种优化双层结构将带来计算成本的增加. 如何降低将鲁棒性解认定为非鲁棒性解排除在外的可能性及降低SR-MORO的计算成本将是下一步研究的问题.

参考文献(References):

- [1] BU Xuhui, HOU Zhongsheng, JIN Shangtai. The robustness of mode-free adaptive control with disturbance suppression [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(3): 358 – 362. (卜旭辉, 侯忠生, 金尚泰. 扰动抑制无模型自适应控制的鲁棒性分析 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(3): 358 – 362.)
- [2] ZHANG Chijian, LI Yang, CHEN Wanli, et al. Analysis of robustness of FCS structure based on quotient space theory [J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(5): 833 – 837. (张持健, 李旻, 陈万里, 等. 商空间下模糊系统性能一致性(鲁棒性)分析 [J]. 控制理论与应用, 2006, 23(5): 833 – 837.)
- [3] QI Wuchao, QIU Zhiping. Non-probabilistic reliability-based structural design optimization based on the interval analysis method [J]. *SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica*, 2013, 43(1): 85 – 93. (祁武超, 邱志平. 基于区间分析的结构非概率可靠性优化设计 [J]. 中国科学: 物理学, 力学, 天文学, 2013, 43(1): 85 – 93.)
- [4] LI H, MA M, JING Y. A new method based on LPP and NSGA-II for multi-objective robust collaborative optimization [J]. *Journal of mechanical science and technology*, 2011, 25(5): 1071 – 1079.
- [5] LEE K H, PARK G J. Robust optimization considering tolerances of design variables [J]. *Computers & Structures*, 2001, 79(1): 77 – 86.
- [6] DU X, CHEN W. Towards a better understanding of modeling feasibility robustness in engineering design [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2000, 122(4): 385 – 394.
- [7] JUANG C H, WANG L. Reliability-based robust geotechnical design of spread foundations using multi-objective genetic algorithm [J]. *Computers and Geotechnics*, 2013, 48(1): 96 – 106.

- [8] YU H, GILLOT F, ICHCHOU M. Reliability based robust design optimization for tuned mass damper in passive vibration control of deterministic/uncertain structures [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(9): 2222 – 2238.
- [9] ZHANG Daiyu, SONG Baowei, WANG Peng, et al. Improving bi-level system reliability of multi-disciplinary design synthesis optimization method [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2013, 30(6): 808 – 813.
(张代雨, 宋保维, 王鹏, 等. 两级系统多学科可靠性设计合成优化方法 [J]. 西北工业大学学报, 2013, 30(6): 808 – 813.)
- [10] JIANG Wuhua, WANG Qidong, HE Wei, et al. Reliability-based multidisciplinary optimization of ve-hicle axle structure [J]. *Automotive Engineering*, 2012, 34(12): 1136 – 1140.
(姜武华, 王其东, 何伟, 等. 基于可靠性的车桥结构多学科优化 [J]. 汽车工程, 2012, 34(12): 1136 – 1140.)
- [11] SONG Baowei, DONG Huachao, WANG Peng. Reliability optimization design of auv's all-movable rudder [J]. *Acta ArmamentarII*, 2013, 34(5): 605 – 610.
(宋保维, 董华超, 王鹏. 水下航行器全动舵可靠性优化设计 [J]. 兵工学报, 2013, 34(5): 605 – 610.)
- [12] GUNAWAN S, AZARM S. Multi-objective robust optimization using a sensitivity region concept [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005, 29(1): 50 – 60.
- [13] GUNAWAN S, AZARM S. A feasibility robust optimization method using sensitivity region concept [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2005, 127(5): 858 – 865.
- [14] GUNAWAN S, AZARM S. On a combined multi-objective and feasibility robustness method for design optimization [C] //10th AIAA/ISSMO *Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*. Albany, NewYork: AIAA, 2004.
- [15] DEB K. Multi-objective optimization using evolutionary algorithms [M]. *California: John Wiley & Sons*, 2001.
- [16] DEB K, AGRAWAL S, PRATAP A, et al. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II [J]. *Lecture notes in computer science*, 2000, 1917(2): 849 – 858.
- [17] KURPATI A, AZARM S, WU J. Constraint handling improvements for multi-objective genetic algorithms [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2002, 23(3): 204 – 213.
- [18] GUNAWAN S. Parameter sensitivity measures for single objective, multi-objective, and feasibility robust design optimization [D]. *University of Maryland, College Park*, May, 2004.

作者简介:

杨爱民 (1978–), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师, 目前研究方向为优化算法的设计、分数阶控制, E-mail: aiminyang@126.com;

李杰 (1982–), 男, 高级实验师, 博士, 目前研究方向为冶金建模、冶金节能与资源综合利用, E-mail: lijie-2573017@163.com;

刘卫星 (1985–), 男, 讲师, 硕士, 目前研究方向为冶金建模、冶金节能与资源综合利用, E-mail: wxliu1985@163.com;

张良进 (1990–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为冶金固体废物综合利用, E-mail: zhangliangjin@126.com;

闫龙格 (1989–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为冶金节能与资源优化, E-mail: yanlg0130@sina.com.