

线性自抗扰控制系统的鲁棒稳定性

陈上上[†], 何英姿, 刘贺龙

(北京控制工程研究所, 北京 100190; 空间智能控制技术重点实验室, 北京 100190)

摘要: 针对线性自抗扰控制系统, 研究了模型参数不确定情况下的鲁棒稳定性问题. 首先给出对象为非自治模型时该系统的 H_∞ 判据. 然后针对线性误差模型的状态矩阵只在某一行存在不确定参数的情况, 基于奇异值理论, 得到 H_∞ 判据的一种新的等价描述, 把 H_∞ 范数约束转化为对奈奎斯特图的约束. 之后为了降低新判据在实际应用中的保守性, 对不确定性矩阵的分解方式进行优化. 在此基础上提出了一种新的方法, 用于计算时变参数不确定性的最大边界, 为线性自抗扰控制器设计提供理论依据. 数值实例表明该方法不仅保守性小, 而且计算简单.

关键词: 自抗扰控制; 参数不确定性; 鲁棒稳定性; H_∞ ; 奈奎斯特图

中图分类号: TP273 文献标识码: A

On robust stability of linear active disturbance rejection control system

CHEN Shang-shang[†], HE Ying-zi, LIU He-long

(Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China;
Science and Technology on Space Intelligent Control Laboratory, Beijing 100190, China)

Abstract: In this paper, the robust stability problem is studied for the linear active disturbance rejection control (LADRC) system in the presence of parameter uncertainties. Firstly, the H-infinity criterion is presented for the LADRC system with a non-autonomous plant. Secondly, for the case that the uncertain parameters are in the same line of the state matrix of the linear error model, a novel equivalent description of the H-infinity criterion is derived from the singular value theory. With the equivalent description, the H-infinity norm constraint is transformed to the constraint on the Nyquist diagram. Thirdly, the uncertainty matrix decomposition is carried out with optimization to reduce the conservatism of the new criterion in practical application. Based on the above work, a new approach is proposed to compute the maximal bound of time-varying parameter uncertainties and supply some theoretical basis for the design of the linear active disturbance rejection controller. Numerical examples show that the proposed approach is not only less conservative, but also simpler to calculate.

Key words: active disturbance rejection control; parameter uncertainty; robust stability; H-infinity; Nyquist diagram

1 引言(Introduction)

自抗扰控制(active disturbance rejection control, ADRC)^[1]是由中科院数学与系统科学研究院韩京清研究员提出的一种不依赖系统模型的新型控制技术, 它通过扩张状态观测器(extended state observer, ESO)实时估计并补偿系统外部扰动与内部扰动的总和, 把存在外部扰动输入、模型不确定性和非线性的被控对象还原为标准的积分串联型. 文献[2]对ADRC的独特理念进行了详细阐述. 一般而言, ADRC由跟踪微分器(tracking differentiator, TD)、ESO、非线性反馈组成. 文献[3]提出了基于线性扩张状态观测器(linear extended state observer, LESO)的线性自抗扰控制(linear active disturbance rejection control, LADRC), 推

动了这种控制技术在实际工程中的应用^[4].

目前ADRC技术已经成功应用于飞行控制、机电控制、化工过程等诸多领域, 然而其稳定性与鲁棒性的理论发展较为缓慢, 相关研究大致可以划分为: 频域方法研究与时域方法研究, LADRC研究与非线性自抗扰控制(nonlinear active disturbance rejection control, NADRC)研究, 单输入单输出(single-input single-output, SISO)系统研究与多输入多输出(multi-input multi-output, MIMO)系统研究. 采用频域分析方法, 文献[5]研究了LADRC抑制模型参数不确定性的能力, 指出随着控制带宽与ESO带宽增加, LADRC鲁棒稳定性显著提高; 文献[6]研究了LADRC抑制模型乘性、反馈、加性不确定性的能力, 指出抑制能力与ESO

收稿日期: 2015-03-28; 录用日期: 2016-02-26.

[†]通信作者. E-mail: shangshang1008@163.com; Tel.: +86 15801480203.

本文责任编辑: 宗群.

国家自然科学基金项目(61403030)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61403030).

带宽成正比; 文献[7]基于描述函数研究了NADRC系统的稳定性、动态刚度性能(反映抵抗外部扰动输入的能力)、跟踪性能, 指出NADRC在动态刚度性能、跟踪性能方面明显优于LADRC, 但稳定裕度却不及后者. 在时域分析方面, 文献[8]研究了LADRC应对未知相对阶、未知外部扰动输入的能力, 揭示了固定参数的自抗扰控制器能够适用于阶数、相对阶、模型参数不同的一大类对象的原因; 文献[9]为一类下三角MIMO非线性对象设计了LADRC, 研究了存在未知模型动态与外部扰动输入情况下闭环系统的稳定性, 指出通过调整ESO带宽, 可以实现输出动态与期望动态之间的误差足够小这一目标; 文献[10-12]分别严格证明了TD, ESO以及NADRC的收敛性.

目前NADRC的研究还未成熟, 在实际工程中应用更为广泛的是LADRC. 关于LADRC稳定性的研究主要集中于时不变系统, 而某些情况下模型参数时变不确定性非常严重(例如高超声速飞行器^[13]), 因此有必要研究LADRC抵抗时变扰动的能力. 本文针对由线性自抗扰控制器与非自治对象组成的闭环系统, 首先基于时变区间系统稳定性理论, 得到确保闭环系统鲁棒稳定的一个判据, 然后针对闭环状态矩阵只在某一行存在不确定性的情况, 得到该判据的一种简单等效形式, 之后为了降低分析结果的保守性, 提出对不确定性矩阵的分解方式进行优化, 在上述基础之上, 提出一种方法, 用于分析闭环系统容忍的模型参数时变不确定性范围, 为LESO结构形式选取以及控制参数设计提供依据.

本文用 $(*)$ 表示参考状态(参考轨迹对应的状态量)下 $(*)$ 的数值, $(\tilde{*})$ 表示标称模型参数下 $(*)$ 的数值, $(\bar{*})$ 表示标称模型参数 $(\tilde{*})$ 的平均值, $\Delta(*)$ 表示真实值 $(*)$ 与参考状态数值 $(\bar{*})$ 的偏差, $\hat{\Delta}(*)$ 表示对 $\Delta(*)$ 的估计值, $f_{(*)}$ 表示 f 对 $(*)$ 的偏导数, 为了显示简洁, 用自变量 (t) 代替 (t, \bar{x}, \bar{u}) , 即

$$\begin{aligned} \Delta(*) &= (*) - (\bar{*}), \\ f(t) &= f(t, \bar{x}, \bar{u}), \\ \tilde{f}(t) &= \tilde{f}(t, \bar{x}, \bar{u}), \\ f_{(*)}(t) &= f_{(*)}(t, \bar{x}, \bar{u}) = \left. \frac{\partial f}{\partial (*)} \right|_{t, x=\bar{x}, u=\bar{u}}, \\ \tilde{f}_{(*)}(t) &= \tilde{f}_{(*)}(t, \bar{x}, \bar{u}) = \left. \frac{\partial \tilde{f}}{\partial (*)} \right|_{t, x=\bar{x}, u=\bar{u}}, \\ \bar{f}_{(*)}(t) &= [\max(\tilde{f}_{(*)}(t)) + \min(\tilde{f}_{(*)}(t))]/2. \end{aligned}$$

参考状态下所有变量及其各阶导数的数值、标称模型参数等均为已知量.

2 线性自抗扰控制(LADRC)

考虑如下非自治系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0 x + B_0 [f(t, x, u) + h(t, d)], \\ y = C_0 x, \end{cases} \quad (1)$$

其中:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \\ C_0 &= [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \end{aligned}$$

其中: $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量, $u \in \mathbb{R}$ 为控制输入, $d \in \mathbb{R}^v$ 为有界外部扰动输入, $y \in \mathbb{R}$ 为输出, $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h: [0, \infty) \times \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}$. 在参考状态的一个邻域内对系统(1)做如下假设:

假设 1 函数 f, h 足够光滑, 即: 下文中 f 关于 t, x, u 以及 h 关于 t, d 的各阶相关偏导数都存在且连续;

假设 2 f 关于 x, u 利普希茨, h 关于 d 利普希茨, 雅格比矩阵 $\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right], \left[\frac{\partial h}{\partial d}\right]\right]$ 一致有界, 且是一致利普希茨的;

假设 3 $f_u(t)$ 不为零, 且不变号;

假设 4 $\bar{d} = 0, \tilde{h}(t, \bar{d}) = 0$.

LADRC系统的基本结构见图1, 其中TD用来安排过渡过程, LESO用来估计误差模型状态以及内部与外部扰动的总和. 另外, 如果通过测量可以得到状态量 x_2, \dots, x_n , 则反馈控制器的输入还可以包含 Δx . 由于TD不影响稳定性, 因此本文研究过程中不再考虑TD环节.

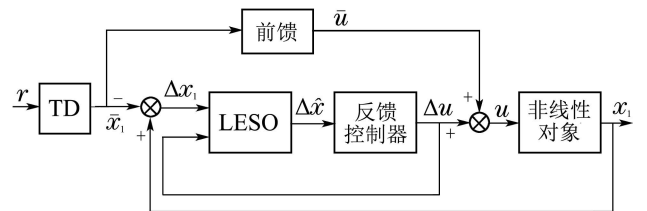


图 1 LADRC系统方框图

Fig. 1 Block diagram of the LADRC system

参考状态及标称模型参数下有

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A_0 \tilde{x} + B_0 \tilde{f}(t), \\ \tilde{y} = C_0 \tilde{x}. \end{cases} \quad (2)$$

对 f 在参考状态进行泰勒展开:

$$\begin{aligned} f(t, x, u) &= f(t) + f_x(t) \Delta x + \\ & f_u(t) \Delta u + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta u). \end{aligned} \quad (3)$$

式(1)与式(2)相减, 并把式(3)代入整理得

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= [A_0 + B_0 f_x(t)] \Delta x + B_0 f_u(t) \Delta u + \\ & B_0 \mathcal{O}(\Delta x, \Delta u) + B_0 d_0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $d_0 = f(t) - \tilde{f}(t) + h(t, d) \in \mathbb{R}$.

针对误差模型(4)设计LESO:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\hat{x}} &= A_1 \Delta \hat{x} + B_1 \tilde{f}_u(t) \Delta u + \\ &L(\Delta x_1 - \Delta \hat{x}_1), \end{aligned} \quad (5)$$

其中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)},$$

$$B_1 = [0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$L = [l_1 \ \cdots \ l_{n+1}]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$$

为LESO设计参数, $\Delta \hat{x} = [\Delta \hat{x}_1 \ \cdots \ \Delta \hat{x}_{n+1}]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ 为观测器状态变量. 估计达到稳态时, 有

$$\Delta x_1 \rightarrow \Delta \hat{x}_1, \cdots, \Delta x_n \rightarrow \Delta \hat{x}_n, \Delta x_{n+1} \rightarrow \Delta \hat{x}_{n+1},$$

其中 Δx_{n+1} 为扩张状态, 即内部与外部扰动总和. 根据式(4)得

$$\Delta x_{n+1} = f_x(t) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta u) + d_0.$$

控制目的是使系统输出 y 精确跟踪其参考值 \bar{y} , 为此设计控制律

$$\Delta u = (K_1 \Delta x + K_2 \Delta \hat{x}) / \tilde{f}_u(t), \quad (6)$$

其中定常反馈控制参数:

$$K_1 = [k_{11} \ \cdots \ k_{1n}] \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$

$$K_2 = [k_{21} \ \cdots \ k_{2n} \ k_{2(n+1)}] \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)},$$

其中 $k_{2(n+1)} = -1$.

把LESO(5)与控制律(6)代入误差模型(4), 得到如下闭环方程:

$$\dot{z} = A_2(t) z + B_2 [\mathcal{O}(z) + d_0], \quad (7)$$

其中:

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} A_m(t) & B_0 K_2 + B_0 K_2 \lambda_0(t) \\ B_1 K_1 + LC_0 & A_1 - LC_1 + B_1 K_2 \end{bmatrix},$$

$$A_m(t) = A_0 + B_0 [f_x(t) + K_1 + K_1 \lambda_0(t)],$$

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)},$$

$$\lambda_0(t) = [f_u(t) - \tilde{f}_u(t)] / \tilde{f}_u(t),$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0_{(n+1) \times 1} \end{bmatrix},$$

$$z = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \hat{x} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad N = 2n + 1.$$

令

$$f_x(t) = \bar{f}_x + \delta f_x(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$

$$\bar{f}_x = [\bar{f}_{x_1}(t) \ \cdots \ \bar{f}_{x_n}(t)],$$

$$\delta f_x(t) =$$

$$[\lambda_1(t) \max |\tilde{f}_{x_1}(t)| \ \cdots \ \lambda_n(t) \max |\tilde{f}_{x_n}(t)|],$$

$$\lambda_i(t) = [f_{x_i}(t) - \bar{f}_{x_i}] / \max |\tilde{f}_{x_i}(t)|,$$

则

$$A_2(t) = \tilde{A} + \Lambda(t), \quad (8)$$

其中:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_0 + B_0(K_1 + \bar{f}_x) & B_0 K_2 \\ B_1 K_1 + LC_0 & A_1 - LC_1 + B_1 K_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} B_0 [\delta f_x(t) + K_1 \lambda_0(t)] & B_0 K_2 \lambda_0(t) \\ 0_{(n+1) \times n} & 0_{(n+1) \times (n+1)} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

式(8)把闭环状态矩阵 $A_2(t)$ 分为定常部分 \tilde{A} 与不确定性部分 $\Lambda(t)$, $A_2(t)$ 只有第 n 行存在参数不确定性, 即 $\Lambda(t)$ 只有第 n 行元素不为零.

3 鲁棒稳定性分析(Robust stability analysis)

3.1 区间系统 H_∞ 判据改进(Improvement of H_∞ criterion for interval system)

显然, 原点是激励系统

$$\dot{z} = A_2(t) z + B_2 \mathcal{O}(z) \quad (11)$$

的一个平衡点. 由假设2可知 $\Lambda(t)$ 中各元素有界, 设

$$|A_{nj}(t)| \leq \eta_j,$$

其中: $\eta_j > 0, 1 \leq j \leq N$.

考虑式(11)描述的非自治系统在原点处的线性化模型

$$\dot{z} = A_2(t) z. \quad (12)$$

令

$$A(t) = BE\Xi(t)FC,$$

$$B = [e_n \ \cdots \ e_n] \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$E = \text{diag}\{\eta_1^{p_1}, \cdots, \eta_N^{p_N}\},$$

$$\Xi(t) = \text{diag}\{\varepsilon_1(t), \cdots, \varepsilon_N(t)\},$$

$$F = \text{diag}\{\eta_1^{q_1}, \cdots, \eta_N^{q_N}\},$$

$$C = I_N, \quad |\varepsilon_j(t)| \leq 1, \quad p_j + q_j = 1,$$

其中 e_n 为 $N \times N$ 单位阵 I_N 的第 n 个列向量. 令

$$G(s) = FC(sI_N - \tilde{A})^{-1}BE.$$

设 $g_j(s)$ 为 $(sI_N - \tilde{A})^{-1}$ 的第 n 列、第 j 行元素, 此时

$$G(s) = \text{diag}\{\eta_1^{q_1}, \cdots, \eta_N^{q_N}\} \begin{bmatrix} g_1(s) \\ \vdots \\ g_N(s) \end{bmatrix} [\eta_1^{p_1} \ \cdots \ \eta_N^{p_N}].$$

引理 1 系统(12)是二次稳定(quadratically stable)的, 当且仅当满足^[14]:

- 1) \tilde{A} 是赫尔维茨的;
- 2) $\|G(s)\|_\infty < 1$.

引理 2 如果原点是系统(11)的指数稳定平衡点, 则存在常数 $R_0 > 0$, 使得对于每个满足 $\|z_0\| < R_0$ 的 z_0 , 系统(7)是小信号有限增益 \mathcal{L}_p 稳定的^[15].

定理 1 对于存在外部扰动输入的非自治系统(7), 若满足:

- 1) \tilde{A} 是赫尔维茨的;
- 2) $\|G(s)\|_\infty < 1$,

则存在常数 $R_0 > 0$, 使得对于每个满足 $\|z_0\| < R_0$ 的 z_0 , 系统(7)是小信号有限增益 \mathcal{L}_p 稳定的.

证 若

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \{\sigma_{\max} [G(j\omega)]\} < 1,$$

由引理1可知: 系统(12)二次稳定, 因此原点是系统(12)的全局指数稳定平衡点^[15]. 而系统(12)是非自治系统(11)线性化形式, 由李雅普诺夫间接法可知, 原点是系统(11)的局部指数稳定平衡点. 由引理2可知: 存在常数 $R_0 > 0$, 使得对于每个满足 $\|z_0\| < R_0$ 的 z_0 , 系统(7)是小信号有限增益 \mathcal{L}_p 稳定的. 证毕.

定理 2 对于存在外部扰动输入的非自治系统(7), 其线性化模型(12)的参数只在第 n 行存在不确定性, 若满足:

- 1) \tilde{A} 是赫尔维茨的;
- 2) $\sup_{\omega} \{[\sum_{k=1}^N \eta_k^{2q_k} |g_k(j\omega)|^2] \times (\sum_{k=1}^N \eta_k^{2p_k})\} < 1$,

则存在常数 $R_0 > 0$, 使得对于每个满足 $\|z_0\| < R_0$ 的 z_0 , 系统(7)是小信号有限增益 \mathcal{L}_p 稳定的.

证

$$G^H(j\omega) G(j\omega) = \begin{bmatrix} \eta_1^{p_1} \\ \vdots \\ \eta_N^{p_N} \end{bmatrix} [g_1(-j\omega) \cdots g_N(-j\omega)] \times \text{diag}\{\eta_1^{2q_1}, \dots, \eta_N^{2q_N}\} \begin{bmatrix} g_1(j\omega) \\ \vdots \\ g_N(j\omega) \end{bmatrix} [\eta_1^{p_1} \cdots \eta_N^{p_N}] = [\sum_{k=1}^N \eta_k^{2q_k} |g_k(j\omega)|^2] \begin{bmatrix} \eta_1^{p_1} \\ \vdots \\ \eta_N^{p_N} \end{bmatrix} [\eta_1^{p_1} \cdots \eta_N^{p_N}].$$

由于矩阵

$$[\eta_1^{p_1} \cdots \eta_N^{p_N}]^T [\eta_1^{p_1} \cdots \eta_N^{p_N}]$$

与矩阵

$$[\eta_1^{p_1} \cdots \eta_N^{p_N}] [\eta_1^{p_1} \cdots \eta_N^{p_N}]^T$$

具有相同的非零特征值^[6], 因此 $G^H(j\omega)G(j\omega)$ 的最大特征值为

$$\sigma_{\max}^2 [G(j\omega)] = [\sum_{k=1}^N \eta_k^{2q_k} |g_k(j\omega)|^2] \times (\sum_{k=1}^N \eta_k^{2p_k}).$$

若

$$\sup_{\omega} \{[\sum_{k=1}^N \eta_k^{2q_k} |g_k(j\omega)|^2] \times (\sum_{k=1}^N \eta_k^{2p_k})\} < 1,$$

则

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \{\sigma_{\max} [G(j\omega)]\} < 1.$$

由定理1可知: 系统(7)是小信号有限增益 \mathcal{L}_p 稳定的. 证毕.

注 1 定理2把 H_∞ 判据转化为对一个SISO传递函数

$$g_c(s) = [\sum_{k=1}^N \eta_k^{2q_k} g_k^H(s)g_k(s)] (\sum_{k=1}^N \eta_k^{2p_k})$$

奈奎斯特图的约束. H_∞ 判据通常要求解线性矩阵不等式、黎卡蒂方程或者计算全频域内的最大奇异值, 显然定理2绘制奈奎斯特图的方法要简单的多.

注 2 对于一般的SISO系统, 如果经过坐标变换可以转化为标准型, 则定理2仍然适用, 第4.2节给出了一个采用坐标变换的实例.

注 3 LESO形式多样: 如果 $\tilde{f}_x(t)$ 值较大, 可以在 A_1 中叠加 $B_0 \tilde{f}_x(t)$ 的均值; 如果能够测量得到 $\Delta x_k (1 \leq k \leq n)$, 可以基于 Δx_k 设计阶数较低的LESO; 另外还可以基于 Δx_k 设计降阶线性扩张状态观测器 (reduced-order linear extended state observer, RLESO)^[17]. 反馈变量可以为 $\Delta x, \Delta \hat{x}_{n+1}, \Delta x$ 与 $\Delta \hat{x}$ 的组合等多种形式. 不论选取何种形式的LESO与反馈变量组合, 只要 $A_2(t)$ 仅在某一行存在参数不确定性, 都可以用定理2来分析闭环系统的鲁棒稳定性. 第4.2节给出了一个使用RLESO情况下的实例.

注 4 对于由线性自抗扰控制器非自治对象组成的闭环系统, 若不满足 $A_2(t)$ 只在某一行存在参数不确定性, 可以用定理1来分析闭环系统的鲁棒稳定性; 另外, 定理1可以推广到对象为MIMO的情况, 第4.3节给出了一个MIMO对象的实例.

3.2 不确定性范围的进一步研究(Further research of uncertainty bounds)

设计控制参数时, 一般应保证 \tilde{A} 渐近稳定. 对于任意一组选定的 $Q^{(w)} = \{q_j^{(w)}, j = 1, \dots, N\}$, 通过定理2(或定理1)的判定条件2, 可以得到一个保证系统稳定的 $\Lambda_{n_j}(t)$ 不确定性范围. 由定理2(或定理1)确定的参数不确定性最大范围为所有 $\Omega^{(w)}$ 的并集, 即

$$\Omega_{\max} = \bigcup_{w=1}^{\infty} \Omega^{(w)}. \quad (13)$$

得到 Ω_{\max} 后, 根据式(11)进一步可以得到实际对象参数 $\{f_{x_k}(t)\}$ 与 $\lambda_0(t)$ 的不确定性边界. 由式(13)可知, 一般不能通过穷举 $Q^{(w)}$ 而得到参数不确定性的最大边界; 然而采用非线性优化算法, 可以得到最大边界的近似估计.

选用定理2时,相应的优化问题为

$$\begin{aligned} \min_{Q \in \mathbb{R}^N} J &= 1/\mu_0 + \sum_{i=1}^n (r_i/\mu_i), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} |\lambda_i(t) \max |\tilde{f}_{x_i}(t)| + k_{1i} \lambda_0(t)| \leq \eta_i, & i=1, \dots, n, \\ |k_{2j} \lambda_0(t)| \leq \eta_{j+n}, & j=1, \dots, n+1, \\ \sup_{\omega} \{ [\sum_{k=1}^N \eta_k^{2q_k} |g_k(j\omega)|^2] \times (\sum_{k=1}^N \eta_k^{2p_k}) \} < 1, \\ |\lambda_i(t)| \leq \mu_i, & \mu_i > 0, i=0, \dots, n, \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $r_i > 0$ 为设计的加权系数.

注5 如果闭环状态矩阵 $A_2(t)$ 第 n 行、第 j 列元素不存在参数不确定性,则需要把 B 的第 j 列、 C 的第 j 行以及 E ($\Xi(t)$, F)的第 j 列与第 j 行删除,定理1与定理2中的 $G(s)$ 与 $g_c(s)$ 做相应修改,优化指标做相应调整.

选用定理1时,约束条件做相应的修改即可.

随着模型中不确定参数增多,上述优化问题的复杂度将会急剧增加.如果假定某些参数的不确定性范围相等,优化变量的维数将会减小,优化问题复杂度也随之降低,代价是优化结果的保守程度增加.

4 实例(Examples)

文献[18]研究了区间系统鲁棒稳定性,不确定性矩阵分解方式为

$$Q^{(1)} = \{q_j = 0.5, j = 1, \dots, N\}.$$

对于区间系统,也可以采用圆判据^[15]分析系统鲁棒稳定性,一种常用的不确定性矩阵分解方式为

$$Q^{(2)} = \{q_j = 1, j = 1, \dots, N\}.$$

使用本文第3.2节优化的分解方法时,为了避免陷入局部极值,可以选用粒子群优化.

下面以制导跟踪与姿态控制为例,将上述3种分解方式进行比较.

4.1 制导跟踪(Guidance tracking)

航天飞机再入制导模型^[19]为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(t, x_1, x_2, u) + d, \end{cases}$$

其中: x_1 为阻力加速度, x_2 为阻力加速度一阶导数, u 为升阻比, d 为有界外部扰动输入.模型参数中仅 $f_x(t)$ 存在不确定性,标称模型参数满足

$$\begin{aligned} -0.001168 &\leq \tilde{f}_{x_1}(t) < 0, \\ -0.008163 &\leq \tilde{f}_{x_2}(t) < 0, \\ -0.01493 &\leq \tilde{f}_u(t) = f_u(t) < 0. \end{aligned}$$

设计LESO

$$\begin{cases} \Delta \dot{\hat{x}}_1 = \Delta \hat{x}_2 + l_1(\Delta x_1 - \Delta \hat{x}_1), \\ \Delta \dot{\hat{x}}_2 = \Delta \hat{x}_3 + l_2(\Delta x_1 - \Delta \hat{x}_1) + \tilde{f}_u(t)\Delta u, \\ \Delta \dot{\hat{x}}_3 = l_3(\Delta x_1 - \Delta \hat{x}_1). \end{cases}$$

控制律为

$$u = \bar{u} - (\omega_n^2 \Delta \hat{x}_1 + 2\zeta \omega_n \Delta \hat{x}_2 + \Delta \hat{x}_3) / \tilde{f}_u(t),$$

其中:

$$\begin{aligned} \omega_n &= 0.03491, \zeta = 1, \\ l_1 &= 0.5236, l_2 = 0.09139, \\ l_3 &= 0.005317. \end{aligned}$$

采用本文优化分解方法,取 $r_1=r_2=1$,粒子群优化结果为

$$Q^{(3)} = \{q_1 = 0.5287, q_2 = 0.1442\}.$$

本例不确定参数只有两个: \tilde{f}_{x_1} 与 \tilde{f}_{x_2} ,因此可以通过二维搜索得到不同分解方式下模型参数不确定性的最大边界.具体过程为:

- 1) 给定合适的 η_1 ,搜索满足定理2的 η_2 的最大数值,由此可以得到关于 λ_1 与 λ_2 的一个矩形边界;
- 2) 按照固定步长改变 η_1 的数值,重复步骤1)至不能找到满足定理2的 η_2 ,可以得到一组矩形边界;
- 3) 如果步骤2)中的步长足够小,连接这些矩形的顶点,可以得到模型参数不确定性的近似最大边界.

分别采用3种分解方式,得到的参数不确定性边界见图2.

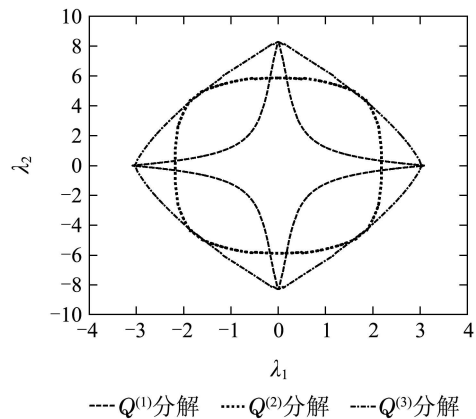


图2 模型参数不确定性边界
Fig. 2 Model parameter uncertainty bounds

4.2 俯仰姿态控制(Pitch attitude control)

某高超声速飞行器再入过程中常值阻力阶段俯仰通道模型^[20]为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + b(t)u + d, \end{cases}$$

其中: x_1 为攻角, x_2 为俯仰角速度, u 为俯仰舵偏, d 为有界外部扰动输入.标称模型参数满足

$$\begin{aligned} -0.008 &\leq \tilde{a}_{11}(t) \leq -0.005, \\ -0.002 &\leq \dot{\tilde{a}}_{11}(t) \leq 0.002, \\ \tilde{a}_{21} &= -0.2097, \tilde{b} = -1.3970. \end{aligned}$$

显然该模型不是标准型,首先根据第2节的推导过程得到偏差量的状态方程,然后选取 $y_1 = \Delta x_1$, $y_2 = \Delta \dot{x}_1$ 为新的状态变量,只考虑线性部分,同时忽略外

部扰动, 模型转化为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = [\dot{a}_{11}(t) + a_{21}(t)]y_1 + a_{11}(t)y_2 + b(t)u. \end{cases}$$

变换后, 模型已经转化为标准型. 设计RLESO

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -l\xi - l^2y_2 - \tilde{l}b\Delta u, \\ \hat{y}_3 = \xi + ly_2. \end{cases}$$

控制律为

$$u = \bar{u} - (\omega_n^2y_1 + 2\zeta\omega_ny_2 + \hat{y}_3)/\tilde{b},$$

其中:

$$\omega_n = 2, \zeta = 0.707, l = 10.$$

为了降低保守性, 需要对不确定性矩阵分解方式进行优化. 对于本例而言, 不确定参数有 4 个, 对实际模型参数做如下假设:

$$\begin{aligned} |a_{11}(t) + 0.0065| &\leq 0.0015 + 0.008\mu, \\ |\dot{a}_{11}(t)| &\leq 0.002 + 0.002\mu, \\ |a_{21}(t) + 0.2097| &\leq 0.2097\mu, \\ |b(t) + 1.3970| &\leq 1.3970\mu, \end{aligned}$$

其中 $\mu > 0$.

优化指标为

$$J = 1/\mu.$$

分别采用 3 种分解方式, 得到的参数不确定性边界分别为表 1 中 $Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}$ 对应的结果.

表 1 模型参数不确定性边界

Table 1 Model parameter uncertainty bounds

方式	q_1	q_2	q_3	μ
$Q^{(1)}$	0.5	0.5	0.5	0.1855
$Q^{(2)}$	1.0	1.0	1.0	0.3848
$Q^{(3)}$	1.5586	0.6538	1.8145	0.4453

4.3 横侧向姿态控制(Lateral attitude control)

某可重复使用飞行器横侧向通道模型^[20]为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ \dot{x}_2 = a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ \dot{x}_3 = a_{32}(t)x_2 + b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + d_1, \\ \dot{x}_4 = a_{42}(t)x_2 + b_{41}u_1 + b_{42}u_2 + d_2, \end{cases}$$

其中: x_1 为倾侧角, x_2 为侧滑角, x_3 为滚转角速度, x_4 为偏航角速度, u_1 为滚转舵偏, u_2 为偏航舵偏, d_1, d_2 为有界外部扰动输入. 某次倾侧角反转过程中, 标称模型参数满足

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{13} = a_{13} &= 0.7660, \\ \tilde{a}_{14} = a_{14} &= -0.6428, \\ \tilde{a}_{23} = a_{23} &= 0.6428, \\ \tilde{a}_{24} = a_{24} &= 0.7660, \\ \tilde{a}_{32} &= -10.2200, \tilde{a}_{42} = 0.1587, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{31} = b_{31} &= -6.1079, \\ \tilde{b}_{32} = b_{32} &= 0.0470, \\ \tilde{b}_{41} = b_{41} &= 0.1159, \\ \tilde{b}_{42} = b_{42} &= -0.2860. \end{aligned}$$

首先根据第 2 节的推导过程得到偏差量的状态方程, 然后选取

$$\begin{aligned} y_1 = \Delta x_1, y_2 = \Delta x_2, \\ y_3 = \Delta \dot{x}_1, y_4 = \Delta \dot{x}_2 \end{aligned}$$

为新的状态变量, 只考虑线性部分, 同时忽略外部扰动, 模型转化为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3, \\ \dot{y}_2 = y_4, \\ \dot{y}_3 = a_1(t)y_2 + U_1, \\ \dot{y}_4 = a_2(t)y_2 + U_2, \end{cases}$$

其中:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a_{13}a_{32}(t) + a_{14}a_{42}(t), \\ a_2(t) &= a_{23}a_{32}(t) + a_{24}a_{42}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}.$$

基于转化后的模型设计LESO

$$\begin{cases} \dot{\hat{y}}_1 = \hat{y}_3 + l_1(y_1 - \hat{y}_1), \\ \dot{\hat{y}}_2 = \hat{y}_4 + l_2(y_2 - \hat{y}_2), \\ \dot{\hat{y}}_3 = \hat{y}_5 + l_3(y_1 - \hat{y}_1) + U_1, \\ \dot{\hat{y}}_4 = \hat{y}_6 + l_4(y_2 - \hat{y}_2) + U_2, \\ \dot{\hat{y}}_5 = l_5(y_1 - \hat{y}_1), \\ \dot{\hat{y}}_6 = l_6(y_2 - \hat{y}_2). \end{cases}$$

控制律为

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} - P^{-1} \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2\hat{y}_1 + 2\zeta_1\omega_{n1}\hat{y}_3 + \hat{y}_5 \\ \omega_{n2}^2\hat{y}_2 + 2\zeta_2\omega_{n2}\hat{y}_4 + \hat{y}_6 \end{bmatrix},$$

其中:

$$\begin{aligned} \omega_{n1} = \omega_{n2} &= 1.5, \zeta_1 = \zeta_2 = 1, \\ l_1 = l_2 &= 22.5, l_3 = l_4 = 168.75, \\ l_5 = l_6 &= 421.875. \end{aligned}$$

原模型不确定参数有 2 个, 对参数不确定性范围做如下假设:

$$\begin{aligned} |\lambda_{32}(t)| &\leq \mu_{32}, \\ |\lambda_{42}(t)| &\leq \mu_{42}, \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \lambda_{32}(t) &= [a_{32}(t) - \tilde{a}_{32}] / |\tilde{a}_{32}|, \\ \lambda_{42}(t) &= [a_{42}(t) - \tilde{a}_{42}] / |\tilde{a}_{42}|. \end{aligned}$$

优化指标为

$$J = 1/\mu_{32} + 5/\mu_{42}.$$

粒子群优化结果为

$$Q^{(3)} = \{q_1 = -0.6234, q_2 = 1.2246\}.$$

采用第4.1节的搜索方法, 3种分解方式下得到的参数不确定性边界见图3.

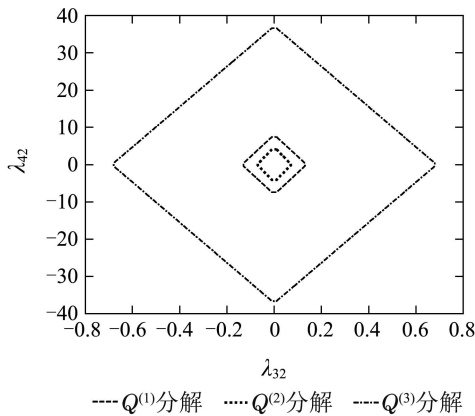


图3 模型参数不确定性边界

Fig. 3 Model parameter uncertainty bounds

5 结论(Conclusions)

本文研究了线性自抗扰控制系统的鲁棒稳定性问题, 给出了一般情况下的 H_∞ 判据; 针对状态矩阵只在某一行存在不确定性的情况, 基于奇异值理论, 把 H_∞ 判据等效为对一个新传递函数奈奎斯特图的约束. 等效的奈奎斯特图约束简单直观, 便于应用. 基于 H_∞ 判据或其等效约束, 文中提出对不确定性矩阵分解方式进行优化. 制导跟踪与姿态控制的应用结果表明, 与其它两种方法相比, 采用粒子群优化的分解方法, 对降低不确定性边界估计的保守性有显著作用. 采用本文分析方法对模型参数不确定性边界进行估计, 得到估计结果可以反过来指导选取扩张状态观测器结构形式以及设计控制参数, 以满足实际工程中对模型参数不确定性范围的要求. 本文的分析方法适用于多种形式的LADRC系统, 也适用于PID系统.

参考文献(References):

- [1] HAN Jingqing. Active disturbance rejection controller and its applications [J]. *Control and Decision*, 1998, 13(1): 19 – 23. (韩京清. 自抗扰控制器及其应用 [J]. *控制与决策*, 1998, 13(1): 19 – 23.)
- [2] HUANG Y, XUE W C. Active disturbance rejection control: methodology and theoretical analysis [J]. *ISA Transactions*, 2014, 53(4): 963 – 976.
- [3] GAO Z Q. Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning [C] // *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Denver: IEEE, 2003: 4989 – 4996.
- [4] ZHENG Q, GAO Z Q. On practical applications of active disturbance rejection control [C] // *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*. Beijing: IEEE, 2010: 6095 – 6100.

- [5] TIAN G, GAO Z Q. Frequency response analysis of active disturbance rejection based control system [C] // *IEEE Multi-conference on Systems and Control*. Singapore: IEEE, 2007: 1595 – 1599.
- [6] CSANK J, GAO Z Q. Uncertainty reduction through active disturbance rejection [C] // *American Control Conference*. Seattle: IEEE, 2008: 3689 – 3694.
- [7] WU D, CHEN K. Frequency domain analysis of non-linear active disturbance rejection control via the describing function method [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013, 60(9): 3906 – 3914.
- [8] ZHAO C Z, HUANG Y. ADRC based input disturbance rejection for minimum-phase plants with unknown orders and/or uncertain relative degrees [J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2012, 25(4): 625 – 640.
- [9] XUE W C, HUANG Y. On performance analysis of ADRC for a class of MIMO lower-triangular nonlinear uncertain systems [J]. *ISA Transactions*, 2014, 53(4): 955 – 962.
- [10] GUO B Z, ZHAO Z L. On the convergence of tracking differentiator [J]. *International Journal of Control*, 2011, 84(4): 693 – 701.
- [11] GUO B Z, ZHAO Z L. On the convergence of an extended state observer for nonlinear systems with uncertainty [J]. *Systems and Control Letters*, 2011, 60(6): 420 – 430.
- [12] GUO B Z, ZHAO Z L. On convergence of nonlinear active disturbance rejection control for MIMO systems [J]. *SIAM Journal Control and Optimization*, 2013, 51(2): 1727 – 1757.
- [13] WANG Jie, ZONG Qun, TIAN Bailing, et al. Reentry attitude control for hypersonic vehicle based on quasi-continuous high order sliding mode [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(9): 1166 – 1173. (王婕, 宗群, 田柏苓, 等. 基于拟连续高阶滑模的高超声速飞行器再入姿态控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(9): 1166 – 1173.)
- [14] KHARGONEKAR P P, PETERSEN I R, ZHOU K M. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H_∞ control theory [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(3): 356 – 361.
- [15] KHALIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. New Jersey: Prentice Hall, 2002: 202 – 205, 156 – 161.
- [16] ZHANG Xianda. *Matrix Analysis and Applications* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 468. (张贤达. *矩阵分析与应用* [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 468.)
- [17] QIU D M, SUN M W, WANG Z H, et al. Practical wind-disturbance rejection for large deep space observatory antenna [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014, 22(5): 1983 – 1990.
- [18] WU Fangxiang, SHI Zhongke, DAI Guanzhong. On robust stability of dynamic interval systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(1): 113 – 115. (吴方向, 史忠科, 戴冠中. 动态区间系统的鲁棒稳定性 [J]. *控制理论与应用*, 2001, 18(1): 113 – 115.)
- [19] HARPOLD J C, GRAVES C A. Shuttle entry guidance [J]. *Journal of the Astronautical Sciences*, 1979, 27(3): 239 – 268.
- [20] LI Huifeng. *The Guidance & Control Technology of Hypersonic Vehicle* [M]. Beijing: China Astronautics Press, 2012: 82 – 83. (李惠峰. *高超声速飞行器制导与控制技术* [M]. 北京: 中国宇航出版社, 2012: 82 – 83.)

作者简介:

陈上上 (1982–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为再入飞行器制导与控制, E-mail: shangshang1008@163.com;

何英姿 (1970–), 女, 研究员, 目前研究方向为空间操作控制技术和空天飞行器GNC技术等, E-mail: heyiz1970@163.com;

刘贺龙 (1988–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为空间操作控制技术, E-mail: aodangdang@126.com.