

非线性系统有输入饱和时基于平方和的鲁棒模型预测控制器

胡超芳[†], 解倩倩

(天津大学 电气与自动化工程学院, 天津 300072)

摘要: 本文针对带有参数不确定和输入饱和的单输入单输出(SISO)仿射非线性系统, 利用反馈线性化, 将非线性系统转化为带有扰动和状态依赖输入饱和的多胞线性参变(LPV)模型, 进而提出一种基于平方和(SOS)的鲁棒模型预测控制器(RMPC)设计方法. 基于多胞RMPC控制器, 设计加权状态反馈控制律, 通过引入范数有界定理, 确保扰动下预测状态收敛到不变集内, 并利用勒让德多项式近似和SOS技术, 将状态依赖输入饱和约束转化为多项式凸优化问题, 以获得实际和辅助状态反馈律, 所设计的SOS-RMPC控制器能够保证闭环系统的稳定性. 通过与常规多胞RMPC控制器的仿真比较, 验证了本方法的有效性, 并进一步仿真分析了勒让德多项式阶次对控制器性能的影响.

关键词: 模型预测控制; 输入饱和; 线性参变模型; 反馈线性化; 平方和

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Sum of squares-robust model predictive controller for nonlinear system with input saturation

HU Chao-fang[†], XIE Qian-qian

(School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: For the single-input-single-output (SISO) affine nonlinear system subject to uncertain parameters and input saturation, we use the feedback linearization method to build a polytopic linear parameter-varying (LPV) model with disturbance and state-dependent input saturation, and develop a robust model predictive controller (RMPC) based on the sum-of-squares (SOS) method. On the basis of this polytopic RMPC, we design the weighted state-feedback control law. The norm-bounded theorem is introduced to guarantee predictive states with disturbance to converge to the invariant set. Moreover, the restrictive condition of state-dependent input saturation is transformed to the polynomial convex optimization problem by using the Legendre polynomial approximation and SOS technique. Then, the actual and auxiliary feedback laws are obtained. The stability of the closed-loop system is guaranteed by the designed SOS-RMPC controller. Simulation results demonstrate the effectiveness and superiority of the proposed method over the traditional polytopic LPV-RMPC controller. The effect of the order of Legendre polynomial on the control performance is also investigated by simulations.

Key words: model predictive control; input saturation; linear parameter-varying model; feedback linearization; sum of squares

1 引言(Introduction)

实际的系统大多是非线性和不确定的, 而且在系统运行过程中, 执行器通常存在饱和限制. 对于非线性系统, 经精确反馈线性化后得到的模型既能够表征系统的全部非线性特征, 同时又有利于使用目前成熟的线性控制理论, 因而得到了广泛应用和研究^[1]. 对于反馈线性化模型, 通常利用虚拟控制输入设计达到控制目的, 然后经逆控制得到系统真实控制量, 这种控制策略极大地简化了非线性系统控制器的设计步骤. 然而, 由于线性化后系统的虚拟控制量与真实控

制量之间是与状态相关的形式, 受状态变化影响, 因此对于带有输入饱和约束的非线性系统, 控制器设计变得非常棘手^[2]. 文献[3]首次涉及了状态依赖输入约束问题. 文献[4-7]针对标称系统进行反馈线性化, 采用不同控制方法解决状态依赖输入饱和问题, 保证了系统的渐近稳定. 而文献[8]则对带有参数不确定的高超声速飞行器反馈线性化模型进行控制器设计, 虽然没有直接考虑虚拟输入饱和约束受状态变化的影响, 但对状态反馈矩阵进行了定值约束限制.

由于鲁棒模型预测控制(robust model predictive

收稿日期: 2015-04-15; 录用日期: 2015-10-09.

[†]通信作者. E-mail: cfhu@tju.edu.cn; Tel.: +86 22-27406272.

本文责任编辑: 席裕庚.

天津市自然科学基金项目(12JCZDJC30300), 国家留学基金项目资助.

Supported by Natural Science Foundation of Tianjin (12JCZDJC30300) and State Scholarship Foundation of China.

controller, RMPC)对于不确定具有良好的鲁棒性,因此引起了学者们的广泛关注和研究^[9]. 考虑到实际系统存在的参数不确定情况,学者们对于RMPC的研究多是以线性参变(linear parameter varying, LPV)系统为基础的. LPV模型一方面可以描述实际系统内在的非线性、时变和不确定特性,另一方面能够便于使用线性控制理论的方法来解决非线性系统问题^[10]. Kothare等^[11]对于无扰动LPV模型,给出了无穷优化时域的状态反馈RMPC设计方法. 文献[12-14]则针对带有有界扰动的LPV系统,进行RMPC控制器设计,保证了闭环系统稳定. 然而,在考虑输入受限时,上述RMPC算法均是基于线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)对系统原始定值硬约束进行求解的,而对于状态依赖输入饱和问题,基于LMI的RMPC控制器设计变得极为困难.

考虑到平方和(sum of squares, SOS)方法在处理非线性约束问题中具有一定优势^[6, 15],本文针对带有参数不确定和输入饱和的单输入单输出(single input single output, SISO)仿射非线性系统,通过反馈线性化使其转化为带有扰动和状态依赖输入饱和的多胞LPV模型. 其中原非线性系统的参数不确定表示为参数仿射和扰动形式,并应用范数有界技术保证扰动下的预测状态有界;而状态依赖输入饱和约束被近似为勒让德多项式形式,利用SOS技术计算加权反馈矩阵,与RMPC结合构建了SOS-RMPC控制器,保证输入饱和限制下闭环系统稳定性. 与常规多胞RMPC控制器的仿真比较验证了本方法的性能,通过仿真分析了勒让德多项式阶次对控制性能的影响.

预备知识:

定义 1^[16] 一类关于SOS的多项式集合表示为 $\sum[x] := \{\beta(x) | \beta(x) = \sum_i \rho_i^2(x), i = 1, 2, \dots\}$, 其中 $\beta(x)$ 和 $\rho_i(x)$ 均是关于 x 的多项式. 若有 $\beta(x) \in \sum[x]$, 则 $\beta(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

引理 1^[17] 给定多项式 $\beta_0(x), \dots, \beta_N(x)$, 如果存在 N 个辅助多项式 $s_1(x), \dots, s_N(x) \in \sum[x]$, 能够使得 $\beta_0(x) - \sum_{i=1}^N s_i(x)\beta_i(x) \in \sum[x]$, 则对于任意 $x \in \mu = \{x | \beta_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, N\}$, 都有 $\beta_0(x) \geq 0$ 成立.

2 模型及问题描述(Model and problem formulation)

考虑如下带有不确定参数的SISO仿射非线性系统^[6]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x, p) + b(x, p)u, \\ y &= h(x, p), \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ 是系统的状态; p 为不确定

参数, 其标称值为 p_0 , 且 $p \in \Gamma$, Γ 为 p 的紧集; u 为控制输入. 对于系统(1), 考虑 u 具有如下非线性特性:

$$u = \text{sat}(\varepsilon, u_{\min}, u_{\max}) = \begin{cases} u_{\max}, & \varepsilon \geq u_{\max}, \\ \varepsilon, & u_{\min} < \varepsilon < u_{\max}, \\ u_{\min}, & \varepsilon \leq u_{\min}, \end{cases}$$

$\text{sat}(\cdot)$ 为饱和函数, ε 为所设计的控制律, u_{\max}, u_{\min} 分别是控制输入 u 的上、下限定值约束.

对于系统(1), 给出以下假设^[1, 18]:

假设 1 系统(1)的相对阶为 n , 与系统状态维数相同.

假设 2 对于状态 x 和不确定参数 $p \in \Gamma$, 函数 $a(x, p), b(x, p), h(x, p)$ 均是足够光滑的.

假设 3 状态 x 和输出 y 都是可测量的, 且对于 $p \in \Gamma$, 有下式成立:

$$\begin{aligned} L_b L_a^r h(x, p) &= 0, \quad r = 0, 1, \dots, n-2, \\ L_b L_a^{n-1} h(x, p) &\neq 0, \end{aligned}$$

其中: $L_a^r h(x, p)$ 是 $h(x, p)$ 沿 $a(x, p)$ 的 r 阶李导数, $L_b L_a^r h(x, p)$ 是 $L_a^r h(x, p)$ 沿 $b(x, p)$ 的李导数.

在不考虑输入饱和的前提下, 基于假设1-3, 非线性系统(1)存在以下微分同胚映射:

$$z = T(x, p) = \begin{bmatrix} h(x, p) \\ L_a h(x, p) \\ \vdots \\ L_a^{n-1} h(x, p) \end{bmatrix}.$$

由此, 系统(1)可转化为以下形式:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= L_a^n h(x, p) + L_b L_a^{n-1} h(x, p)u. \end{aligned} \quad (2)$$

为使表达简便, 令 $G_1(x, p) = L_b L_a^{n-1} h(x, p)$, $F_1(x, p) = L_a^n h(x, p)$, 相应标称形式为 $G_0(x, p_0) = L_b L_a^{n-1} h(x, p_0)$ 和 $F_0(x, p_0) = L_a^n h(x, p_0)$. 根据假设3可知, $G_0(x, p_0)$ 一定可逆, 于是给出如下定义:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= F_1(x, p) - F_0(x, p_0), \\ \Delta_2 &= (G_1(x, p) - G_0(x, p_0))G_0^{-1}(x, p_0), \\ F_1(x, p) &= F_0(x, p_0) + \Delta_1, \\ G_1(x, p) &= (1 + \Delta_2)G_0(x, p_0). \end{aligned} \quad (3)$$

对于转化后的系统(2), 令

$$\dot{z}_n = F_1(x, p) + G_1(x, p)u = v, \quad (4)$$

v 表示参数不确定下的虚拟控制输入. 因不确定参数的存在, 可能会导致系统(1)无法精确线性化^[18], 为此, 将控制输入 u 表示为以下形式:

$$u = G_0^{-1}(x, p_0)(-F_0(x, p_0) + v_0) =$$

$$\frac{-L_a^n h(x, p_0) + v_0}{L_b L_a^{n-1} h(x, p_0)}, \quad (5)$$

v_0 表示系统(2)在标称条件下的虚拟控制量. 将式(5)代入式(4)中, 可得

$$\dot{z}_n = v = (1 + \Delta_2)v_0 + \Delta_1 - \Delta_2 F_0(x, p_0). \quad (6)$$

由式(6)可知, 系统(2)将包含复杂的不确定项, 为此结合式(6), 将系统(2)建立以 $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$ 为状态向量的LPV模型^[8], 即

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_c z(t) + B_c(\delta_B(t))v_0(t) + \\ &D_c(\delta_D(t))w(t), \quad (7) \\ A_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

参数矩阵 $B_c(\delta_B(t)), D_c(\delta_D(t))$ 为如下的仿射形式:

$$\begin{aligned} B_c(\delta_B(t)) &= (1 + \Delta_2)B_0^*, \\ D_c(\delta_D(t)) &= D_0^* - F_0(x, p_0)D_1^*, \\ B_0^* &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_0^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$\delta_B = 1 + \Delta_2, \delta_D = -F_0(x, p_0), \Delta_2$ 和 $-F_0(x, p_0)$ 为关于原系统状态 x 和参数 p 的仿射参数, $w(t) = [\Delta_1, \Delta_2]^T$ 为参数 p 经反馈线性化后得到的扰动项, 标称虚拟控制 v_0 为式(7)的控制输入.

选定合适的状态域 Ω_z , 使得 $z \in \Omega_z$. 通过非线性优化可以得到 $\Delta_1, \Delta_2, F_0(x, p_0)$ 的上、下界值, 分别表示为 $\Delta_1^+, \Delta_1^-, \Delta_2^+, \Delta_2^-, F_0^+, F_0^-$, 则由此可知 $\delta_B(t), \delta_D(t)$ 和 $w(t)$ 都是有界的, 记为 $\delta_B^- \leq \delta_B(t) \leq \delta_B^+$ 和 $\delta_D^- \leq \delta_D(t) \leq \delta_D^+$. 令 $B_c^1 = B_c(\delta_B^-), B_c^2 = B_c(\delta_B^+), D_c^1 = D_c(\delta_D^-), D_c^2 = D_c(\delta_D^+)$ 分别表示模型不确定参数所对应凸包的顶点, 则一定存在参数 $l_j(t), \alpha_m(t)$, 且 $0 \leq l_j(t) \leq 1, \sum_{j=1}^2 l_j(t) = 1, j = 1, 2, 0 \leq \alpha_m(t) \leq 1, \sum_{m=1}^2 \alpha_m(t) = 1, m = 1, 2$, 使得上述两个参数矩阵满足以下加权形式:

$$\begin{aligned} B_c(\delta_B(t)) &= \sum_{j=1}^2 l_j(t) B_c^j, \\ D_c(\delta_D(t)) &= \sum_{m=1}^2 \alpha_m(t) D_c^m. \quad (8) \end{aligned}$$

因此, 本文针对模型(7)和(8)来求解 v_0 , 进而根据式(5), 获得真实控制量 u . 在此, 对于标称虚拟控制输入

采用状态反馈形式, 即 $v_0 = k(z)$.

然而由于实际控制输入 u 存在饱和和约束限制, 为保证闭环系统的稳定性, 将式(5)表示为饱和形式 $u = \text{sat}(\frac{-L_a^n h(x, p_0) + k(z)}{L_b L_a^{n-1} h(x, p_0)}, u_{\min}, u_{\max})$. 为了在该条件下设计 v_0 , 首先引入引理2.

引理 2^[6] 给定非线性系统(1)和假设1-3, 所有 $x \in g_x, g_x$ 包含原点, 在微分同胚映射 $z = T(x, p)$ 下, 将式(1)进行反馈线性化. 假设有 $u_{\min} < 0 < u_{\max}, L_b L_a^{n-1} h(x, p) > 0$, 则对于 $\forall x \in f_x \cap g_x, f_x = \{x \in \mathbb{R}^n | v_{0 \min}(T(x, p_0)) < 0, v_{0 \max}(T(x, p_0)) > 0\}$, 以下两种表达式等价:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad u &= \text{sat}(\frac{-L_a^n h(x, p_0) + k(z)}{L_b L_a^{n-1} h(x, p_0)}, u_{\min}, u_{\max}), \\ \text{ii)} \quad v_0 &= \text{sat}(k(z), v_{0 \min}(z), v_{0 \max}(z)), \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} v_{0 \min}(z) &= u_{\min} L_b L_a^{n-1} h(x, p_0) + L_a^n h(x, p_0), \\ v_{0 \max}(z) &= u_{\max} L_b L_a^{n-1} h(x, p_0) + L_a^n h(x, p_0). \end{aligned}$$

根据 $z = T(x, p)$, 定义 f_x, g_x 对应的域为

$$\begin{aligned} f_z &= \{z \in \mathbb{R}^n | z = T(x, p_0), x \in f_x\}, \\ g_z &= \{z \in \mathbb{R}^n | z = T(x, p_0), x \in g_x\}. \end{aligned}$$

等价表达式ii)成功地将实际输入的饱和和限制条件转移到虚拟控制输入上, 构成状态依赖输入饱和函数形式, 从而使得系统(7)成为带有有界扰动和状态依赖输入饱和的多胞LPV系统.

3 SOS-RMPC控制器设计(SOS-RMPC controller design)

在进行RMPC控制器设计之前, 首先将多胞系统(7)离散化. 为统一描述, $B_c(l(t)), D_c(\alpha(t))$ 分别代替 $B_c(\delta_B(t))$ 和 $D_c(\delta_D(t))$, B_1, B_2 与 D_1, D_2 代替凸包顶点 B_c^1, B_c^2 和 D_c^1, D_c^2 . 由此得到如下离散模型^[19]:

$$z(k+1) = Az(k) + B(l(k))v_0(k) + D(\alpha(k))w(k), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} B(l(k)) &\in \Omega_B = C_O\{B_1, B_2\}, \\ D(\alpha(k)) &\in \Omega_D = C_O\{D_1, D_2\}, \\ w(k) &\in \Omega_w = C_O\{[\Delta_1^-, \Delta_2^-]^T, [\Delta_1^-, \Delta_2^+]^T, \\ &[\Delta_1^+, \Delta_2^-]^T, [\Delta_1^+, \Delta_2^+]^T\}, \end{aligned}$$

其中 Ω_B, Ω_D 分别表示为离散后的参数矩阵 $B(l(k))$ 和 $D(\alpha(k))$ 对应顶点所构成的凸包, 即

$$\begin{aligned} B(l(k)) &= \sum_{j=1}^2 l_j(k) B_j, \\ D(\alpha(k)) &= \sum_{m=1}^2 \alpha_m(k) D_m, \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^2 l_j(k) = 1, 0 \leq l_j(k) \leq 1, j = 1, 2,$$

$$\sum_{m=1}^2 \alpha_m(k) = 1, 0 \leq \alpha_m(k) \leq 1, m = 1, 2,$$

Ω_w 表示扰动顶点 $w_s, s = 1, \dots, 4$ 构成的凸包.

对于模型(9), 结合引理2中状态依赖输入饱和和要求ii), 本文采用SOS技术和范数有界定理^[19]来设计SOS-RMPC控制器. 首先给出不变集的概念:

定义 2^[13] 对于正定集合 Z , 若系统(9)当前时刻状态 $z(k|k) \in Z$, 且在 $k+i$ 时刻, 对于任意 $B(l(k+i)) \in \Omega_B, D(\alpha(k+i)) \in \Omega_D, w(k+i) \in \Omega_w, i \geq 0$, 所有可能的预测状态 $z(k+i|k)$ 都有 $z(k+i|k) \in Z$, 则集合 Z 称为系统(9)的不变集.

取 $Z = \{z(k+i|k) | z(k+i|k)^T P z(k+i|k) \leq \gamma, i \geq 0, \gamma > 0\}$ 作为系统不变集, P 为镇定矩阵. 则在 k 时刻, 形成优化问题1保证系统稳定性.

优化问题1^[13]:

$$\min \max_{\substack{B(l(k+i)) \in \Omega_B \\ D(\alpha(k+i)) \in \Omega_D \\ w(k+i) \in \Omega_w}} J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} [\|z_n(k+i|k)\|_L^2 + \|v_0(k+i|k)\|_R^2],$$

$$\text{s.t. } \|z(k)\|_P^2 \leq \gamma, z(k) = z_n(k|k) = z(k|k), \quad (10)$$

$$\|z_n(k+i+1|k)\|_P^2 - \|z_n(k+i|k)\|_P^2 \leq -\|z_n(k+i|k)\|_L^2 - \|v_0(k+i|k)\|_R^2, \quad (11)$$

$$\|z(k+i+1|k)\|_P^2 \leq \gamma, \quad (12)$$

其中: L, R 为正定的加权矩阵, $z(k|k)$ 表示系统当前 k 时刻所对应的状态; $z_n(k+i+1|k) = Az_n(k+i|k) + B(l(k+i))v_0(k+i|k)$ 代表无扰动影响的预测状态; $z(k+i+1|k) = Az(k+i|k) + B(l(k+i))v_0(k+i|k) + D(\alpha(k+i))w(k+i)$ 为受扰动影响的预测状态, 式(10)表示关于当前状态的不变集; 式(11)表示无扰动预测状态的Lyapunov函数递减, 保证了系统状态的收敛; 而式(12)则保证受扰动影响的预测状态也同样保持在上述不变集内. 由此, 闭环系统稳定.

为解决问题ii), 将 v_0 定义为如下形式:

$$v_0 = \text{sat}(k(z), v_{0\min}(z), v_{0\max}(z)) = (1-\lambda)Hz + \lambda Kz, \lambda \in [0, 1], z \in Z, \quad (13)$$

其中: K 为实际状态反馈矩阵, H 为辅助反馈矩阵, 且满足 $v_{0\min}(z) \leq Hz \leq v_{0\max}(z)$, λ 为反馈矩阵加权系数, $\lambda \in [0, 1]$. 应用SOS技术, 通过建立多项式凸优化问题来获取满足上述约束条件的矩阵 H . 首先, 假设 $v_{0\min}(z), v_{0\max}(z)$ 是 z 的多项式, 给出引理3.

引理 3^[6] 假设有对称矩阵 $Q \in S^n, Q > 0$, 令 $P = \gamma Q^{-1}$, 辅助状态反馈律 $Hz = Y_h Q^{-1}z$, 集合 $D =$

$\{z | \psi(z) \geq 0\} \supset \{z | z^T Q^{-1}z \leq 1\}$, 且对于 $\forall z \in D, v_{0\max}(z) \neq 0$. 若有多项式 $s_1(z) \in \Sigma[z]$, 使得

$$\begin{bmatrix} v_{0\max}^2(z) - \psi(z)s_1(z) * \\ QH^T \quad Q \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[z]$$

成立, 则对于 $z \in Z = \{z | z^T Q^{-1}z \leq 1\}$ 都有 $|Hz| \leq |v_{0\max}(z)|$ 成立, 其中“*”代表矩阵对称项的转置.

同理利用引理3也可保证 $|Hz| \leq |v_{0\min}(z)|$, 则有 $|Hz| \leq \min\{|v_{0\min}(z)|, |v_{0\max}(z)|\}$, 使得辅助反馈矩阵 H 在给定的范围内满足状态依赖饱和和约束.

针对优化问题1和控制律(13), 给出定理1.

定理 1 对于模型(9)和状态依赖输入饱和ii), 当前状态 $z(k|k)$, 选取合适的参数 θ , 正定矩阵 L, R, Ψ 和集合 $\Phi = \{z | \psi(z) = z^T \Psi z \leq 1\}, \Phi \subset f_z \cap g_z$, 且 $v_{0\min}(z)$ 和 $v_{0\max}(z)$ 均为多项式. 若存在对称矩阵 $Q \in S^n, Q > 0$, 矩阵 $Y_k, Y_h \in \mathbb{R}^n$, 辅助多项式 $s_1(z), s_2(z) \in \Sigma[z]$, 满足优化问题2, 则控制器(13)可使闭环系统在输入饱和限制下稳定.

优化问题 2:

$$\min_{\gamma, Y_h, Y_k, Q} \gamma, \quad \text{s.t. } Q > 0, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ z(k|k) & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} Q & * & * & * \\ AQ + B_j Y_k & Q & * & * \\ L^{1/2} Q & 0 & \gamma I & * \\ R^{1/2} Y_k & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, j = 1, 2, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} Q & * & * & * \\ AQ + B_j Y_h & Q & * & * \\ L^{1/2} Q & 0 & \gamma I & * \\ R^{1/2} Y_h & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, j = 1, 2, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \theta Q & * \\ AQ + B_j Y_k & Q \end{bmatrix} \geq 0, j = 1, 2, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \theta Q & * \\ AQ + B_j Y_h & Q \end{bmatrix} \geq 0, j = 1, 2, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \xi & * \\ D_m w_s & Q \end{bmatrix} \geq 0, m = 1, 2, s = 1, 2, 3, 4, \quad (20)$$

$$Q - \Psi^{-1} < 0, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} v_{0\max}^2(z) - \psi(z)s_1(z) * \\ Y_h^T \quad Q \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[z], \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} v_{0\min}^2(z) - \psi(z)s_2(z) & * \\ Y_h^T & Q \end{bmatrix} \in \sum^{n+1} [z], \quad (23)$$

其中: $K = Y_k Q^{-1}$, $H = Y_h Q^{-1}$, $P = \gamma Q^{-1}$.

证 为使闭环系统稳定, 期望 $z_n(\infty|0) = 0$, 由此将式(11)从 $i=0$ 到 $i=\infty$ 进行累加, 则有 $J_\infty(k) \leq \gamma$ 成立, 因此形成优化问题2的优化目标.

经Schur补定理, 约束条件(10)可转化为式(15). 同理, 结合饱和控制律(13), 在凸包顶点处, 不等式约束(11)经Schur补定理可得到^[11]:

$$\begin{bmatrix} Q & * & * & * \\ AQ + B_j U & Q & * & * \\ L^{1/2} Q & 0 & \gamma I & * \\ R^{1/2} U & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, j=1, 2, \quad (24)$$

其中 $U = (1 - \lambda)Y_h + \lambda Y_k$. 将式(24)分解为式(25)–(26):

$$\lambda \begin{bmatrix} Q & * & * & * \\ AQ + B_j Y_k & Q & * & * \\ L^{1/2} Q & 0 & \gamma I & * \\ R^{1/2} Y_k & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, j=1, 2, \quad (25)$$

$$(1 - \lambda) \begin{bmatrix} Q & * & * & * \\ AQ + B_j Y_h & Q & * & * \\ L^{1/2} Q & 0 & \gamma I & * \\ R^{1/2} Y_h & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, j=1, 2. \quad (26)$$

因有 $\lambda \in [0, 1]$, 则式(25)–(26)等价于式(16)–(17), 即式(16)和式(17)可保证约束条件(11)成立.

在对抑制扰动的鲁棒约束条件(12)进行分析之前, 首先给出以下范数有界定理.

引理 4^[19] 若矩阵 $M > 0$, 且是对称矩阵, a, b 是相应维数的向量. 则对于任意标量 $\delta > 0$, 均有下式成立:

$$(a + b)^T M (a + b) \leq (1 + \delta) a^T M a + (1 + 1/\delta) b^T M b.$$

在输入饱和控制律(13)下, 应用范数有界定理, 将不等式(12)左边展开为

$$\begin{aligned} & \|(A + B(l(k + i))G)z(k + i|k) + \\ & D(\alpha(k + i))w(k + i)\|_{P/\gamma}^2 \leq \\ & (1 + \delta_1) \|(A + B(l(k + i))G)z(k + i|k)\|_{P/\gamma}^2 + \\ & (1 + \frac{1}{\delta_1}) \|D(\alpha(k + i))w(k + i)\|_{P/\gamma}^2, \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$G = UQ^{-1} = (1 - \lambda)H + \lambda K.$$

现令

$$\begin{aligned} & \|(A + B(l(k + i))G)z(k + i|k)\|_{P/\gamma}^2, \\ & \|D(\alpha(k + i))w(k + i)\|_{P/\gamma}^2 \end{aligned}$$

的上界值分别表示为 $\theta \|z(k + i|k)\|_{P/\gamma}^2$ 与 ξ , 即

$$\begin{aligned} & \|(A + B(l(k + i))G)z(k + i|k)\|_{P/\gamma}^2 \leq \\ & \theta \|z(k + i|k)\|_{P/\gamma}^2, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\|D(\alpha(k + i))w(k + i)\|_{P/\gamma}^2 \leq \xi, \quad (29)$$

其中 θ 为预先设定参数, 且 $0 < \theta < 1, \xi > 0$. 若有

$$(1 + \delta_1)\theta + (1 + \frac{1}{\delta_1})\xi \leq 1, \quad (30)$$

则式(31)一定成立. 因此, 式(27)–(30)共同保证约束条件(12)成立, 并由式(30)可得到 ξ 的最大值为 $(1 - \sqrt{\theta})^2$.

$$(1 + \delta_1)\theta z(k + i|k)^T \frac{P}{\gamma} z(k + i|k) + (1 + \frac{1}{\delta_1})\xi \leq 1. \quad (31)$$

在凸包顶点处, 式(28)–(29)应用Schur补定理可得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \theta Q^{-1} & * \\ Q^{-1}(A + B_j U Q^{-1}) & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, j=1, 2, \quad (32) \\ & \begin{bmatrix} \xi & * \\ Q^{-1} D_m w_s & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, m=1, 2, s=1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (33)$$

将式(32)左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{Q, Q\}$, 可得

$$\begin{bmatrix} \theta Q & * \\ (AQ + B_j U) & Q \end{bmatrix} \geq 0, j=1, 2. \quad (34)$$

同理, 由于 $U = (1 - \lambda)Y_h + \lambda Y_k$, 则式(34)和式(18)–(19)等价. 式(33)左乘和右乘 $\text{diag}\{I, Q\}$, 即可得到式(20), 因此约束条件(12)可由式(18)–(20)实现.

式(21)保证了引理3中 $\Phi = \{z|\psi(z) = z^T \Psi z \leq 1\} \supset \{z|z^T Q^{-1} z \leq 1\}$ 的成立. 式(22)–(23)共同保证了辅助反馈矩阵 H 满足引理3给定的饱和约束.

因此, 在满足给定条件下, 状态依赖输入饱和下的优化问题1是可以优化问题2来求解的, 且若 k 时刻存在可行解, 则该解对于 $k + i, i \geq 0$ 时刻仍是可行的^[11], 即可保证闭环系统稳定. 证毕.

对于以上控制器的求解, 假设 $v_{0\max}, v_{0\min}$ 是多项式形式, 然而实际系统大部分不能满足. 因此, 本文利用勒让德多项式近似方法^[20]得到 $v_{0\max}, v_{0\min}$ 的多项式表达式, 具体过程参考文献[6].

4 仿真(Simulation)

考虑如下一个柔性单连杆机械臂系统^[6,21]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -e_1 \sin x_1 - e_2(x_1 - x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= e_3(x_1 - x_3) + e_4 u, \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

不考虑阻尼. 其中: x_1 为连杆转过的角度, x_2 为连杆角速度, x_3 为电机旋转角度, x_4 为电机角速度, 控制输入 u 为电机转矩, 其饱和边界为 $u_{\max} = -u_{\min} = 20$. 由于建模过程中存在测量, 计算误差以及未建模动态等因素, 因此模型参数 e_1, e_2, e_3, e_4 均存在不同程度摄动, 其标称值分别为 $e_{10} = e_{20} = e_{30} = e_{40} = 1$, 而实际值为 $e_1 = e_{10}(1 \pm 20\%)$, $e_2 = e_{20}(1 \pm 20\%)$, $e_3 = e_{30}(1 \pm 5\%)$, $e_4 = e_{40}(1 \pm 5\%)$, y 为输出, 模型相对阶为4. 系统初始状态为 $x = [\pi/4, 0, \pi/2, 0]^T$, 要求使机械臂连杆由初始角度转动到0度位置.

由于该系统满足假设1-3等反馈线性化条件, 因此, 首先对该系统进行反馈线性化, 有

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= z_4, \\ \dot{z}_4 &= -(e_1 \cos z_1 + e_2 + e_3)z_3 + \\ &\quad e_1(z_2^2 - e_3) \sin z_1 + e_2 e_4 u.\end{aligned}$$

根据第2节内容, 经非线性优化可得不确定项的变化范围分别为 $F_0 = [-3.6372, 0.8226]$, $\Delta_1 = [-0.6186, 0.0765]$, $\Delta_2 = [-0.24, 0.26]$. 则根据引理2可得到标称系统下状态依赖输入饱和的表达式:

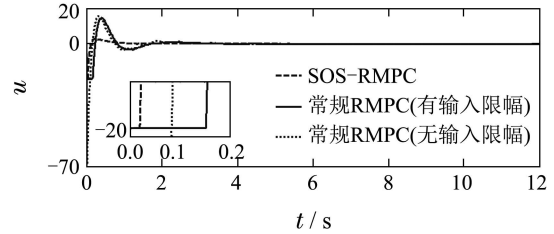
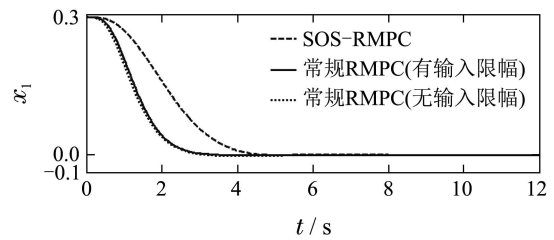
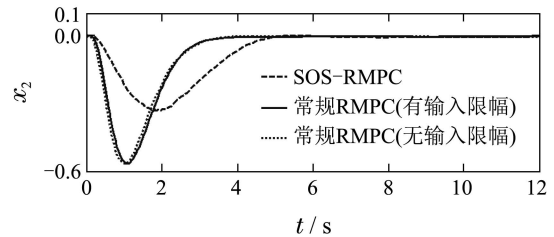
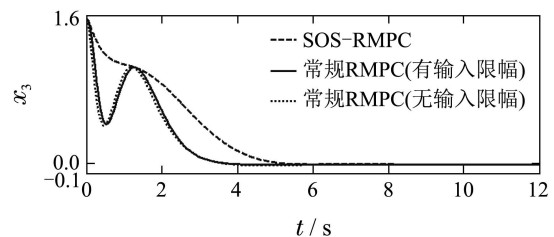
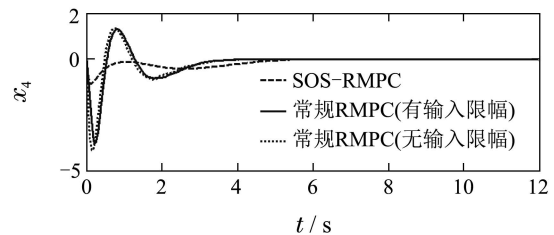
$$\begin{aligned}v_{0\min}(z) &= u_{\min} - (\cos z_1 + 2)z_3 + \\ &\quad (z_2^2 - 1) \sin z_1, \\ v_{0\max}(z) &= u_{\max} - (\cos z_1 + 2)z_3 + \\ &\quad (z_2^2 - 1) \sin z_1.\end{aligned}$$

由于 $v_{0\min}(z), v_{0\max}(z)$ 是非多项式的, 因此为了应用平方和(sum of squares, SOS)技术, 分别对函数 $\sin z_1, \cos z_1$ 进行三阶、四阶勒让德多项式近似, 并求解近似误差, 可得到

$$\begin{aligned}\bar{v}_{0\min}(z) &= \\ &-2z_3 - z_3(0.026z_1^4 - 0.452z_1^2 + 0.978) + \\ &(0.857z_1 - 0.093z_1^3)(z_2^2 - 1) - 17.703, \\ \bar{v}_{0\max}(z) &= \\ &-2z_3 - z_3(0.026z_1^4 - 0.452z_1^2 + 0.978) + \\ &(0.857z_1 - 0.093z_1^3)(z_2^2 - 1) + 17.703.\end{aligned}$$

然后, 对模型进行离散化, 设计平方和鲁棒模型预测控制器(sum of squares-robust model predictive control, SOS-RMPC), 选取集合 $\Psi = \text{diag}\{\pi, \pi, \pi, \pi\}$ 以及合适的参数 θ , 矩阵 L, R . 为验证SOS-RMPC的有效性, 将其在饱和约束下的控制性能, 分别与两种情况下的常规无约束多胞RMPC控制器^[13](即控制器后

有输入硬限幅和无限幅)进行仿真比较, 如图1-5所示. 并为探究勒让德多项式近似阶次对控制器控制性能的影响, 将 $\sin z_1, \cos z_1$ 分别取二阶、三阶和四阶、五阶勒让德多项式近似, 仿真对比如图6-10所示.

图1 输入 u Fig. 1 Input u 图2 状态 x_1 Fig. 2 State x_1 图3 状态 x_2 Fig. 3 State x_2 图4 状态 x_3 Fig. 4 State x_3 图5 状态 x_4 Fig. 5 State x_4

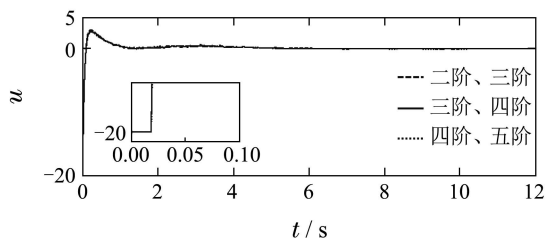


图6 输入 u
Fig. 6 Input u

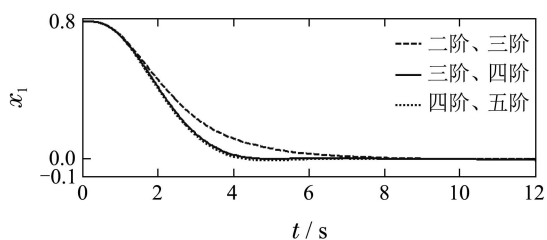


图7 状态 x_1
Fig. 7 State x_1

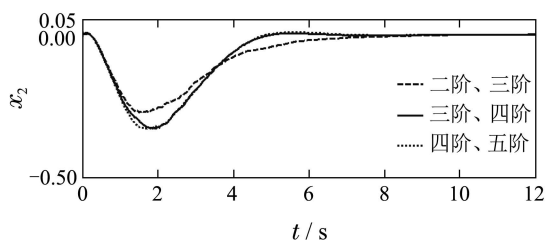


图8 状态 x_2
Fig. 8 State x_2

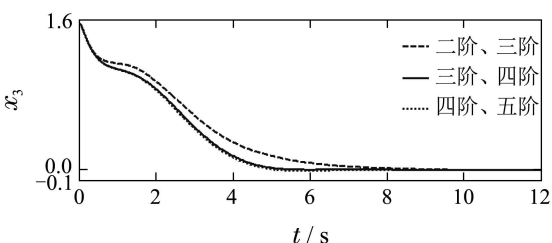


图9 状态 x_3
Fig. 9 State x_3

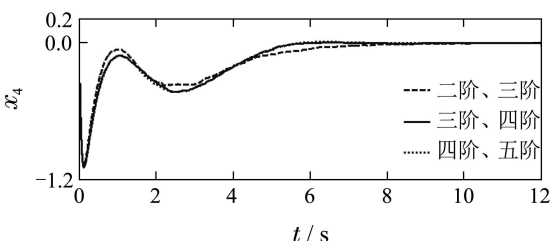


图10 状态 x_4
Fig. 10 State x_4

如图1–5所示,在模型参数不确定的影响下,SOS-RMPC和有输入限幅的常规RMPC控制器均能保证输入 u 满足饱和限制,并使系统稳定。但后者在初始时

间段(约为0.15 s)内,由于硬限幅的作用,输入一直保持在饱和边界值上,且饱和之后输入变化程度较大,使部分状态变化发生震荡;而SOS-RMPC的控制输入不但在饱和边界值停留时间极短(约0.02 s),有利于实际系统执行机构的保护,而且能使系统比较平稳地到达稳态。虽然无输入限幅的常规RMPC控制器明显缩短了调整时间,但输入严重超过了约束范围。由此说明,本文提出的控制方法在输入饱和条件下是有效的,并具有良好的鲁棒性。

从图6–10可以看出,3种不同阶次勒让德多项式近似得到的控制器均能保证系统鲁棒稳定,但当取二阶、三阶近似时,连杆及电机角度动态调整时间略长,状态收敛较慢;当取三阶、四阶近似时,角度动态则较快达到稳态;而再提高近似阶次,即四阶、五阶时,控制性能改变不大。这说明,当勒让德多项式近似阶次较低,近似误差较大时,控制性能相对较差,系统动态过程时间较长;提高近似阶次后,系统收敛较快,控制性能明显改善;但当达到一定近似误差范围内后,多项式近似阶次对控制器性能影响不大。

5 结论(Conclusions)

本文将一类带有参数不确定以及输入饱和的SISO仿射非线性系统转化为具有有界扰动以及状态依赖输入饱和的多胞LPV系统,并由此设计了SOS-RMPC控制器。在控制器设计中,范数有界定理的应用保证了系统状态在扰动下的有界性,勒让德多项式近似和SOS技术则用于构建凸优化问题来获得实际和辅助反馈控制律,从而保证了闭环系统在输入饱和和限制条件下的鲁棒稳定性。本文所提出的方法,相较于常规多胞RMPC控制器,在输入饱和限制下具有更好的稳定性,为带有输入饱和的复杂非线性系统发展,提供了新的研究思路。

参考文献(References):

- [1] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems* [M]. London: Springer, 1995.
- [2] RAWLINGS J B, MEADOWS E S, MUSKE K R. Nonlinear model predictive control: a tutorial and survey [C] // *IFAC Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*. Kyoto, Japan: IFAC, 1994: 203–214.
- [3] CALVET J P, ARKUN Y. Feedforward and feedback linearization of nonlinear systems and its implementation using internal model control (IMC) [J]. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 1988, 27(10): 1822–1831.
- [4] FRANCIS J, DOYLE III. An anti-windup input-output linearization scheme for SISO systems [J]. *Journal of Process Control*, 1999, 9(3): 213–220.
- [5] KURTZ M J, HENSON M A. Input-output linearizing control of constrained nonlinear processes [J]. *Journal of Process Control*, 1997, 7(1): 3–17.

- [6] GÜBNER T, JOST M, ADAMY J. Controller design for a class of nonlinear systems with input saturation using convex optimization [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(1): 258 – 265.
- [7] PAPPAS G J, LYGEROS J, GODBOLE D N. Stabilization and tracking of feedback linearizable systems under input constraints [C] // *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA: IEEE, 1995: 596 – 601.
- [8] GAO G, WANG J Z. Reference command tracking control for an air-breathing hypersonic vehicle with parametric uncertainties [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, 39(3): 222 – 236.
- [9] XI Yugeng, LI Dewei, LIN Shu. Model predictive control – status and challenges [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 222 – 236. (席裕庚, 李德伟, 林姝. 模型预测控制 – 现状与挑战 [J]. *自动化学报*, 2013, 39(3): 222 – 236.)
- [10] WANG Minghao, LIU Gang, ZHAO Pengtao, et al. Variable gain state feedback H_∞ control for hypersonic vehicle based on LPV [J]. *Journal of Astronautics*, 2013, 34(4): 488 – 495. (王明昊, 刘刚, 赵鹏涛, 等. 高超声速飞行器的LPV变增益状态反馈 H_∞ 控制 [J]. *宇航学报*, 2013, 34(4): 488 – 495.)
- [11] KOTHARE M V, BALAKRISHNAN V, MORARI M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1361 – 1379.
- [12] LAZAR M. *Model predictive control of hybrid systems: stability and robustness* [D]. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2006.
- [13] BUMROONGSRI P. An offline formulation of MPC for LPV systems using linear matrix inequalities [J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2014: article ID: 786351.
- [14] HE D F, HUANG H, CHEN Q X. Quasi-min-max MPC for constrained nonlinear systems with guaranteed input-to-state stability [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2014, 351 (6): 3405 – 3423.
- [15] FRANZÈ G. A nonlinear sum-of-squares model predictive control approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(6): 1466 – 1471.
- [16] CHESI G. LMI techniques for optimization over polynomials in control: a survey [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(11): 2500 – 2510.
- [17] JARVIS-WLOSZEK Z W. *Lyapunov based analysis and controller synthesis for polynomial systems using sum-of-squares optimization* [D]. Berkley: University of California, 2003.
- [18] SASTRY S S, KOKOTOVIC P V. Feedback linearization in the presence of uncertainties [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1988, 2(4): 327 – 346.
- [19] DING B C, XI Y G, CYCHOWSKI M T, et al. A synthesis approach for output feedback robust constrained model predictive control [J]. *Automatica*, 2008, 44(1): 258 – 264.
- [20] COURANT R, HILBERT D. *Methods of Mathematical Physics* [M]. Weinheim: Wiley, 1989.
- [21] SPONG M, VIDYASAGAR M. *Robot Dynamics and Control* [M]. New York: Wiley, 1989.

作者简介:

胡超芳 (1973–), 男, 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为预测控制、飞行器优化与控制, E-mail: cfhu@tju.edu.cn;

解倩倩 (1990–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为鲁棒预测控制, E-mail: qysu_123@163.com.