

轮式移动机器人的位置量测输出反馈轨迹跟踪控制

鄢立夏, 马保离[†]

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘要: 针对机器人的姿态角难以精确测量的困难, 本文研究基于位置测量的轮式移动机器人的轨迹跟踪问题. 首先提出一种利用机器人的位置信息估计其姿态角的降维状态观测器, 当机器人的线速度严格大于零时, 可保证姿态角观测误差的指数收敛. 然后给出一种新的状态反馈轨迹跟踪控制律, 当参考轨迹满足一定的激励条件时, 可以保证机器人的线速度严格大于零且跟踪误差全局渐近收敛. 进一步结合姿态角观测器和状态反馈控制律, 得到一种输出反馈轨迹跟踪控制算法. 理论分析表明, 当参考轨迹满足一定的激励条件时, 所提出的输出反馈控制算法可以保证跟踪误差的全局渐近收敛. 最后对所提出的姿态角观测器、状态反馈和输出反馈轨迹跟踪控制算法进行了仿真验证, 证实了算法的有效性, 并且当存在位置测量误差时, 所提出的输出反馈轨迹跟踪控制算法仍可以保证机器人对参考轨迹的实际跟踪.

关键词: 轮式移动机器人; 状态观测器; 输出反馈; 轨迹跟踪

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Output feedback trajectory tracking control of wheeled mobile robots with position measurements

YAN Li-xia, MA Bao-li[†]

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: To cope with the difficulty in posture angle measurement of wheeled mobile robots (WMRs), we investigate the trajectory tracking control problem with only position measurements in this work. Firstly, a reduced-order state observer for posture angle is designed using position information, ensuring exponential convergence of the observing error provided that the linear velocity of the robot keeps strictly positive. Under certain excitation conditions of the reference trajectory, we then propose a trajectory tracking control law using state feedback approach, guaranteeing the linear velocity of the robot strictly positive and the tracking errors globally convergent to zero. The proposed observer and state feedback control law are further combined to obtain the output feedback trajectory tracking control law. Theoretical analysis shows that, under certain excitation conditions of the reference trajectory, the obtained output feedback control law ensures that the tracking errors globally asymptotically tend to zero. Finally, numerical simulations are carried out to validate the proposed schemes, showing that the posture observer, the state and output feedback trajectory tracking control laws are all effective, and furthermore, the output feedback tracking control law can still achieve practical tracking of the reference trajectory in the presence of position measurement errors.

Key words: wheeled mobile robots; state observer; output feedback; trajectory tracking

1 引言(Introduction)

轮式移动机器人 (wheeled mobile robots, WMRs) 的理想模型形式简单且受纯滚动约束, 是一种典型的非完整系统. 对WMRs的研究主要考虑定点镇定、路径跟踪和轨迹跟踪这3类控制问题^[1]. 因不满足Brockett必要条件, 无法设计时不变连续光滑控制律解决WMRs的镇定问题^[2]. 针对WMRs的轨迹跟踪控制问题, 文献[3]提出一种利用反步法设计的一致渐近

稳定控制律, 并应用于WMRs轨迹跟踪, 类似方法可参见文献[4-5]. 文献[6]利用动态反馈线性化方法, 提出一种局部渐近稳定的轨迹跟踪控制律. 文献[7]针对参数不确定轮式移动机器人给出一种统一控制器设计方法, 可实现对任意期望轨迹的实际跟踪.

在实际控制过程中, 需要对WMRs的状态进行测量, 其中针对姿态角的常见测量方法有: 1) 航迹推算, 以数字芯片为核心, 利用光电编码器等设备测量轮速,

收稿日期: 2015-04-30; 录用日期: 2015-12-17.

[†]通信作者. E-mail: mabaoli@buaa.edu.cn; Tel.: +86 10-82314723.

本文责任编辑: 方勇纯

“973”项目子课题(2012CB821202), 国家自然科学基金项目(61573034, 61327807)资助.

Supported by Sub-Project of “973” Program (2012CB821202) and National Natural Science Foundation of China (61573034, 61327807).

通过累积求和, 获得机器人姿态. 因存在积累误差, 此方法不利于长时间运行^[8-10]. 2) 捷联惯导, 将陀螺仪和加速度计等器件集为一体, 设计组合滤波器获取姿态角, 但惯性器件对温度敏感, 存在温漂和随机误差, 滤波器调节比较复杂^[11-12], 尽管利用如文献[13]采用的光纤陀螺仪可以避免陀螺仪温漂等问题, 但成本过高. 3) 图像处理技术, 利用高速摄像头识别机器人位置和标志点, 再估计运动姿态角, 此种技术处理速度快, 执行系统与位姿采集系统可相互独立, 但图像技术成本高, 位置测量误差较大^[5, 14-15].

考虑到上述硬件问题, 可针对WMRs的姿态角及相关变量设计状态观测器, 再结合状态反馈控制律构造输出反馈控制律. 输出反馈系统的稳定性分析可采用级联系统理论. Pantelay等学者对级联系统进行了细致研究, 关于级联系统的一般形式和闭环系统一致渐近稳定对增长率的限制条件等结果可参见文献[16-19]. 文献[20]针对WMRs位置误差和姿态误差, 提出一种全维状态观测器, 提出的输出反馈控制律可保证轨迹跟踪误差局部渐近收敛. 文献[21]在车体坐标系下, 分别针对位置误差及姿态角误差构造状态观测器, 提出一种局部指数稳定轨迹跟踪控制律. 文献[22]提出一种针对姿态角误差的降维状态观测器, 构造的输出反馈控制律可保证闭环系统局部渐近稳定. 文献[23]考虑利用图像技术获取WMRs位置信息的情况, 提出一种针对姿态角的观测器和一种局部渐近稳定输出反馈控制律. 文献[23]假定机器人本体与两个固定信标之间的相对角度可测量, 针对WMRs的位置和姿态角, 提出一种全维状态观测器, 文献[24]以文献[25]为基础, 针对机器人的姿态角, 提出一种降维状态观测器, 这两篇文章给出的输出反馈控制律均可应用于WMRs局部路径跟踪, 但都缺少对闭环系统稳定性的理论分析. 文献[26]以不变流形原理^[27]为基础, 提出针对姿态角正余弦函数值的指数状态观测器, 提出的输出反馈控制律解决局部轨迹跟踪问题. 文献[28]假定机器人运动线速度为常数, 提出一种利用位置信息估计姿态角的观测器并构造输出反馈控制律实现路径跟踪误差的局部指数收敛.

上述关于WMRs的输出反馈控制存在缺陷, 没能得到全局性的结果或仅解决路径跟踪问题. 本文针对这些不足, 同时考虑到实际情况下, 测量WMRs的位置信息可利用RFID技术^[29]等低成本方法, 提出一种利用位置信息估计姿态角的降维状态观测器, 然后构造一种全局状态反馈轨迹跟踪控制律. 最后结合所设计的姿态角观测器和所提出的状态反馈控制律, 得到一种基于位置输出的轨迹跟踪控制律. 理论分析和仿真结果均验证了控制律的有效性. 与文献[23]提出的基于位置信息的轨迹跟踪控制律相比, 本文提出的控制律无切换过程, 对机器人运行速度有限幅机制, 控

制器及状态观测器均不包含机器人的加速度. 另外, 与文献[28]提出的基于位置测量信息的路径跟踪控制律相比, 本文所提出的姿态角观测器放松了机器人线速度为正常数的条件, 仅要求线速度为大于零的时变函数, 适用范围更广; 此外, 文献[28]提出的输出反馈控制律仅可保证路径跟踪误差局部收敛到零, 而本文所提出的输出反馈控制律可保证轨迹跟踪误差全局收敛到零. 并且仿真结果表明, 当存在定位噪声时, 本文提出的轨迹跟踪算法仍然有效.

2 问题描述(Problem formation)

WMRs的一种简化运动学模型可表示为^[28]

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \omega, \quad (1)$$

其中: (x, y) 与 θ 分别表示机器人在惯性坐标系下的位置和姿态角, v 和 ω 分别表示机器人的运动线速度和角速度, 同时也是系统(1)的控制输入.

考虑轮式移动机器人的轨迹跟踪问题, 设光滑参考位置轨迹为 $P_r = (x_r(t), y_r(t))$.

假设 1 $(x_r(t), y_r(t), \dot{x}_r(t), \dot{y}_r(t))$ 为已知量, $(\ddot{x}_r(t), \ddot{y}_r(t))$ 有界, 运动线速度 $v_r = \sqrt{\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2}$ 正向有界, 即存在正常数 v_{rM} 和 v_{rm} , 满足

$$v_{rM} \geq v_r(t) \geq v_{rm} > 0. \quad (2)$$

假设 2 机器人的位置信息 (x, y) 为量测输出, 可由RFID标签技术或其他方法测得, 速度 (v, ω) 为控制输入, 由光电编码器测得, 姿态角 θ 不可测.

在假设1-2下, 本文研究的输出反馈轨迹跟踪控制问题为: 设计动态输出反馈控制律 $(v(t), \omega(t))$.

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = \Phi(x, y, v, \omega, \hat{z}), \\ v = F_1(x, y, x_r, y_r, \dot{x}_r, \dot{y}_r, \ddot{x}_r, \ddot{y}_r, \hat{z}), \\ \omega = F_2(x, y, x_r, y_r, \dot{x}_r, \dot{y}_r, \ddot{x}_r, \ddot{y}_r, \hat{z}), \end{cases} \quad (3)$$

使得轨迹跟踪误差 $(x - x_r, y - y_r)$ 渐近收敛到零, 其中 \hat{z} 为动态辅助变量, (F_1, F_2, Φ) 为连续非线性函数.

3 观测器设计(Observer design)

本节基于机器人运动学模型(1)设计降维状态观测器实现对机器人姿态角的估计. 考虑状态变换

$$z_1 = x, \quad z_2 = y, \quad z_3 = \cos \theta, \quad z_4 = \sin \theta, \quad (4)$$

结合假设2, 可知 (z_1, z_2) 是可被直接测量的状态, 相应的 (z_3, z_4) 是需要估计的状态.

假设 3 $v_M \geq v(t) \geq v_m > 0$, 其中 v_M, v_m 为正常数.

定理 1 在假设2-3下, 针对轮式移动机器人系统(1), 关于 (z_3, z_4) 的一个渐近指数状态观测器为

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_3 = -\hat{z}_4 \omega - L \hat{z}_3 v, \\ \dot{\hat{z}}_4 = \hat{z}_3 \omega - L \hat{z}_4 v, \\ \hat{z}_3 = \zeta_3 + L z_1, \\ \hat{z}_4 = \zeta_4 + L z_2, \end{cases} \quad (5)$$

其中: (ζ_3, ζ_4) 为观测器的状态变量, (\hat{z}_3, \hat{z}_4) 分别为 (z_3, z_4) 的观测值, 常数 $L > 0$.

注 1 指数状态观测器可保证观测误差指数收敛到零^[28].

证 分别对 z_1, z_2, z_3, z_4 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_3 v, \quad \dot{z}_2 = z_4 v, \\ \dot{z}_3 &= -z_4 \omega, \quad \dot{z}_4 = z_3 \omega. \end{aligned} \quad (6)$$

定义观测误差为

$$\begin{aligned} e_3 &= z_3 - \hat{z}_3, \\ e_4 &= z_4 - \hat{z}_4, \end{aligned} \quad (7)$$

对 e_3, e_4 关于时间求导数并将式(5)代入可得

$$\begin{cases} \dot{e}_3 = \dot{z}_3 - \dot{\hat{z}}_3 = -e_4 \omega - L e_3 v, \\ \dot{e}_4 = \dot{z}_4 - \dot{\hat{z}}_4 = e_3 \omega - L e_4 v. \end{cases} \quad (8)$$

考虑非负函数 $V_o = \frac{1}{2}(e_3^2 + e_4^2)$, 对 V_o 关于时间求导并将式(8)代入可得

$$\dot{V}_o = -L(e_3^2 + e_4^2)v \leq -2v_m L V_o, \quad (9)$$

那么 $V_o(t) \leq V_o(0)e^{-2v_m L t}$, 即

$$\|(e_3, e_4)\|_2 \leq \|(e_3(0), e_4(0))\|_2 e^{-v_m L t}. \quad (10)$$

由于 $v_m > 0, L > 0$, 因此 (e_3, e_4) 渐近指数趋于零, 即式(5)是关于 (z_3, z_4) 的渐近指数状态观测器.

由式(10)知 (\hat{z}_3, \hat{z}_4) 指数趋近于 $(\cos \theta, \sin \theta)$, 因此姿态角 θ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的估计值为

$$\hat{\theta} = \arctan 2(\hat{z}_4, \hat{z}_3). \quad (11)$$

4 状态反馈控制 (State feedback trajectory tracking control)

因为诸多现有的状态反馈控制律不满足假设3, 导致观测器(5)不可用. 因此本节针对系统(1)的状态反馈轨迹跟踪问题描述为: 在假设1下, 设计满足假设3的 $(v(t), \omega(t))$:

$$\begin{cases} v = F_1(x, y, \omega, x_r, y_r, \dot{x}_r, \dot{y}_r, \ddot{x}_r, \ddot{y}_r, \theta), \\ \omega = F_2(x, y, v, x_r, y_r, \dot{x}_r, \dot{y}_r, \ddot{x}_r, \ddot{y}_r, \theta), \end{cases} \quad (12)$$

使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x - x_r) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} (y - y_r) = 0$.

定义位置跟踪误差为

$$\zeta_1 = x - x_r, \quad \zeta_2 = y - y_r. \quad (13)$$

定理 2 若假设1成立, 则状态反馈控制律

$$\begin{cases} v = \sqrt{(\dot{x}_r - f_1(\zeta_1))^2 + (\dot{y}_r - f_2(\zeta_2))^2}, \\ \omega = \dot{\theta}^* - k_3 \zeta_3 - v \zeta_1 g_1(\theta, \theta^*) - v \zeta_2 g_2(\theta, \theta^*) \end{cases} \quad (14)$$

可保证位置跟踪误差 (ζ_1, ζ_2) 渐近收敛且假设3成立.

其中:

$$\begin{cases} f_1 = k_1 \arctan \zeta_1, \quad f_2 = k_2 \arctan \zeta_2, \\ \cos \theta^* = \frac{\dot{x}_r - f_1}{v}, \quad \sin \theta^* = \frac{\dot{y}_r - f_2}{v}, \\ \theta^* = \arctan 2(\sin \theta^*, \cos \theta^*), \\ \zeta_3 = \theta - \theta^*, \\ \dot{\theta}^* = \frac{1}{v^2} [\dot{y}_r(\dot{x}_r - f_1) - \dot{x}_r(\dot{y}_r - f_2)] - \\ \frac{1}{v^2} [(\dot{x}_r - f_1)\dot{f}_2 - (\dot{y}_r - f_2)\dot{f}_1], \\ g_1(a, b) = \begin{cases} \frac{\cos a - \cos b}{a - b}, & a \neq b, \\ -\sin \frac{a+b}{2}, & a = b, \end{cases} \\ g_2(a, b) = \begin{cases} \frac{\sin a - \sin b}{a - b}, & a \neq b, \\ \cos \frac{a+b}{2}, & a = b. \end{cases} \end{cases}$$

同时, k_1, k_2, k_3 为控制律参数, 满足

$$\begin{cases} k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0, \\ k_1^2 + k_2^2 \leq \gamma^2 \frac{4}{\pi^2} v_r^2, \quad 0 < \gamma < 1. \end{cases} \quad (15)$$

注 2 函数 $g_i (i = 1, 2)$ 在 $a = b$ 处连续且满足

$$|g_i(a + \Delta a, b) - g_i(a, b)| \leq 2\text{sat}(|a|), \quad (16)$$

其中 $\text{sat}(a) = \begin{cases} a, & |a| \leq 1, \\ \text{sgn } a, & |a| > 1 \end{cases}$, 证明见附录.

证 首先由控制律的表达式(14)验证假设3成立, 将 v 展开并作适当运算有

$$v = \sqrt{v_r^2 + f_1^2 + f_2^2 - 2[\dot{x}_r, \dot{y}_r] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}}. \quad (17)$$

此外, 在以下的推导中用到由假设1推导而得的恒等式 $v_r = \sqrt{\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2} = \|[\dot{x}_r, \dot{y}_r]\|_2$. 利用向量点乘不等式可得

$$[\dot{x}_r, \dot{y}_r] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \leq \|[\dot{x}_r, \dot{y}_r]\|_2 \left\| \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right\|_2, \quad (18a)$$

$$[\dot{x}_r, \dot{y}_r] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \geq -\|[\dot{x}_r, \dot{y}_r]\|_2 \left\| \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right\|_2. \quad (18b)$$

结合式(18a)和式(17)可得

$$v \geq \sqrt{v_r^2 + f_1^2 + f_2^2 - 2v_r \sqrt{f_1^2 + f_2^2}} = \sqrt{(v_r - \sqrt{f_1^2 + f_2^2})^2}. \quad (19)$$

基于 (f_1, f_2) 的表达式和 $|\arctan \zeta_i| \leq \frac{\pi}{2}$, 并利用式(15), 可知

$$\begin{aligned} \sqrt{f_1^2 + f_2^2} &\leq \sqrt{(k_1^2 + k_2^2) \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \leq \\ \sqrt{\gamma^2 \frac{4}{\pi^2} v_{rm}^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} &= \gamma v_{rm}. \end{aligned} \quad (20)$$

由式(19)–(20)和假设1中的 $v_r \geq v_{rm} > 0$ 可导出

$$v \geq v_r - \gamma v_{rm} \geq (1 - \gamma)v_{rm} \triangleq v_m > 0. \quad (21)$$

同理, 结合式(18b)及假设1中的 $v_{rM} \geq v_r > 0$ 可以导出

$$v \leq v_r + \gamma v_{rm} \leq v_{rM} + \gamma v_{rm} \triangleq v_M, \quad (22)$$

因此 $v_M \geq v \geq v_m > 0$, 即假设3成立.

记 $\zeta = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3]^T$, 求导并作适当运算可得

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = -f_1 + v(\cos \theta - \cos \theta^*), \\ \dot{\zeta}_2 = -f_2 + v(\sin \theta - \sin \theta^*), \\ \dot{\zeta}_3 = \omega - \dot{\theta}^*. \end{cases} \quad (23)$$

针对系统(23), 考虑正定函数 $V = \frac{1}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)$, 沿系统(23)的解轨线对 V 求导得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\zeta}_1 \zeta_1 + \dot{\zeta}_2 \zeta_2 + \dot{\zeta}_3 \zeta_3 = \\ &= -\zeta_1 f_1 - \zeta_2 f_2 + (\theta - \theta^*)(\omega - \dot{\theta}^*) + \\ &= v\zeta_1(\cos \theta - \cos \theta^*) + v\zeta_2(\sin \theta - \sin \theta^*). \end{aligned} \quad (24)$$

将控制律(14)代入可得

$$\dot{V} = -\zeta_1 f_1 - \zeta_2 f_2 - k_3 \zeta_3^2 < 0. \quad (25)$$

所以 \dot{V} 负定, 结合 V 径向无穷大的性质, 可知在全状态反馈控制律(14)的作用下, 系统(23)全局渐近稳定, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_i = 0 (i = 1, 2, 3)$.

注3 当 $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_i = 0 (i = 1, 2, 3)$ 时, $f_1, f_2 \rightarrow 0$, 导致 $\cos \theta^* \rightarrow \frac{\dot{x}_r}{v}$, $\sin \theta^* \rightarrow \frac{\dot{y}_r}{v}$, $\theta \rightarrow \theta^*$, 这表明

$$\theta \rightarrow \theta^* \rightarrow \arctan 2\left(\frac{\dot{y}_r}{v}, \frac{\dot{x}_r}{v}\right), \quad (26)$$

即机器人实际运动方向与参考轨迹的切线方向重合.

5 输出反馈控制及稳定性分析(Output feedback trajectory tracking control and stability analysis)

本节研究针对系统(1)的输出反馈轨迹跟踪控制问题, 利用 $\hat{z}_3, \hat{z}_4, \hat{\theta}$ 分别代替状态反馈控制律(14)中的 $\cos \theta, \sin \theta, \theta$, 构成基于位置输出的轨迹跟踪控制律

$$\begin{cases} v = \sqrt{(\dot{x}_r - f_1(\zeta_1))^2 + (\dot{y}_r - f_2(\zeta_2))^2}, \\ \omega = \hat{\theta}^* - k_3 \hat{z}_3 - v\zeta_1 g_1(\hat{\theta}, \theta^*) - \\ \quad v\zeta_2 g_2(\hat{\theta}, \theta^*), \end{cases} \quad (27)$$

其中 $\hat{z}_3 = \hat{\theta} - \theta^*$. 同时

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^* &= \frac{1}{v^2} [\dot{y}_r(\dot{x}_r - f_1) - \dot{x}_r(\dot{y}_r - f_2)] - \\ &= \frac{1}{v^2} (\dot{x}_r - f_1) \frac{k_2 v}{1 + \zeta_2^2} \hat{z}_4 + \\ &= \frac{1}{v^2} (\dot{y}_r - f_2) \frac{k_1 v}{1 + \zeta_1^2} \hat{z}_3. \end{aligned} \quad (28)$$

定理3 在控制律(27)的作用下, 系统(23)的状态有界且趋于零.

证 重新定义观测误差为

$$\begin{cases} e_\theta = \theta - \hat{\theta}, \\ e_c = \cos \theta - \hat{z}_3, \\ e_s = \sin \theta - \hat{z}_4. \end{cases} \quad (29)$$

因为 v 和 θ^* 的表达式均不含 θ , 所以没有观测误差项. 考察观测误差对状态反馈控制律 ω 造成的改变, 记

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \hat{\theta}^* - \dot{\theta}^*, \quad \Delta_2 = \theta - \hat{\theta}, \\ \Delta_3 &= g_1(\theta, \theta^*) - g_1(\hat{\theta}, \theta^*), \\ \Delta_4 &= g_2(\theta, \theta^*) - g_2(\hat{\theta}, \theta^*). \end{aligned} \quad (30)$$

计算可得

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\theta}^* - k_3 \zeta_3 - v\zeta_1 g_1(\theta, \theta^*) - \\ &= v\zeta_2 g_2(\theta, \theta^*) + \Delta = \omega_s + \Delta, \end{aligned} \quad (31)$$

其中: ω_s 为上节给出的角速度状态反馈控制律,

$$\Delta = \Delta_1 + k_3 \Delta_2 + v\zeta_1 \Delta_3 + v\zeta_2 \Delta_4,$$

满足

$$\Delta \leq |\Delta_1| + |k_3 \Delta_2| + |v\zeta_1 \Delta_3| + |v\zeta_2 \Delta_4|. \quad (32)$$

将控制律(27)代入式(23)可得

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = -f_1 + v(\cos \theta - \cos \theta^*), \\ \dot{\zeta}_2 = -f_2 + v(\sin \theta - \sin \theta^*), \\ \dot{\zeta}_3 = \omega_s - \dot{\theta}^* + \Delta. \end{cases} \quad (33)$$

采用与定理2相同的 V 函数, 按步骤验证闭环系统(33)的稳定性.

步骤1 证明 V 全局有界.

将式(27)代入 \dot{V} 的表达式(24)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\zeta_1 f_1 - \zeta_2 f_2 - k_3 \zeta_3^2 - \zeta_3 \Delta \leq \\ &= -\zeta_1 f_1 - \zeta_2 f_2 - k_3 \zeta_3^2 + |\zeta_3 \Delta|. \end{aligned} \quad (34)$$

记 $W = \zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2 + k_3 \zeta_3^2$, 则

$$\dot{V} \leq -W + |\zeta_3 \Delta|. \quad (35)$$

结合式(16), 计算可得

$$\begin{cases} |\Delta_1| \leq k_1 |e_c| + k_2 |e_s|, \quad |\Delta_2| \leq |e_\theta|, \\ |\Delta_3| \leq 2 \text{sat}(|e_\theta|), \quad |\Delta_4| \leq 2 \text{sat}(|e_\theta|), \end{cases} \quad (36)$$

所以

$$\begin{aligned} |\Delta| &\leq k_1 |e_c| + k_2 |e_s| + k_3 |e_\theta| + \\ &= 2v_M \text{sat}(|e_\theta|) (|\zeta_1| + |\zeta_2|). \end{aligned} \quad (37)$$

记 E_1, E_2 为

$$\begin{cases} E_1 = (k_1 |e_c| + k_2 |e_s| + k_3 |e_\theta|), \\ E_2 = 4v_M \text{sat}(|e_\theta|). \end{cases} \quad (38)$$

由于 e_c, e_s, e_θ 指数收敛到零, 可知存在常数 $c_1 > 0, c_2 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, 使得

$$\begin{cases} E_1 \leq \sqrt{2}c_1 e^{-\lambda_1 t}, \\ E_2 \leq c_2 e^{-\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (39)$$

结合 $|\zeta_i| \leq \sqrt{2V}$ ($i = 1, 2, 3$), 将式(35)化为

$$\dot{V} \leq -W + 2c_1 e^{-\lambda_1 t} \sqrt{V} + 2c_2 e^{-\lambda_2 t} V, \quad (40)$$

因而

$$\dot{V} \leq 2c_1 e^{-\lambda_1 t} \sqrt{V} + 2c_2 e^{-\lambda_2 t} V.$$

记 $M = \sqrt{V}$, 则

$$D^+ M \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} M. \quad (41)$$

由比较原理可以得到

$$M \leq \frac{c_1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{c_2}{\lambda_2} M \triangleq C, \quad (42)$$

因此 $M(t)$ 有界, V 有界, 即 $V \in L_\infty$.

步骤 2 证明 V 趋于零.

记 $E(t) = 2c_1 e^{-\lambda_1 t} C + 2c_2 e^{-\lambda_2 t} C^2$, 由式(40)可得

$$\dot{V} \leq -W + E, \quad (43)$$

选取范数 $\|\zeta\| = \|\zeta\|_2 = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2}$.

由于 (V, W) 全局正定且径向无界, 所以存在 κ_∞ 函数 $\alpha_i(\|\zeta\|)$ ($i = 1, 2, 3, 4$)^[30], 满足

$$\begin{cases} \alpha_1(\|\zeta\|) \leq W \leq \alpha_2(\|\zeta\|), \\ \alpha_3(\|\zeta\|) \leq V \leq \alpha_4(\|\zeta\|), \end{cases} \quad (44)$$

并可选取 α_i 的具体形式为

$$\begin{cases} \alpha_1(\|\zeta\|) = \|\zeta\| \text{sat}\left(\frac{\|\zeta\|}{2}\right), \\ \alpha_2(\|\zeta\|) = k_M \|\zeta\|^2, \\ \alpha_3(\|\zeta\|) = \alpha_4(\|\zeta\|) = \frac{1}{2} \|\zeta\|^2, \end{cases} \quad (45)$$

其中 $k_M = \max(k_1, k_2, k_3)$. 计算可得 α_i 的反函数为

$$\begin{cases} \alpha_1^{-1} = \begin{cases} \sqrt{2\alpha_1(\|\zeta\|)}, & \forall \alpha_1(\|\zeta\|) \leq 2, \\ \|\zeta\|, & \forall \alpha_1(\|\zeta\|) > 2, \end{cases} \\ \alpha_2^{-1} = \sqrt{\frac{\alpha_2(\|\zeta\|)}{k_M}}, \\ \alpha_3^{-1} = \alpha_4^{-1} = \sqrt{2\alpha_3(\|\zeta\|)}. \end{cases} \quad (46)$$

取常数 β 满足 $0 < \beta < 1$, 由式(43)可得

$$\dot{V} \leq -(1 - \beta)\alpha_1(\|\zeta\|) - \beta\alpha_1(\|\zeta\|) + E. \quad (47)$$

由于 $E(t)$ 指数收敛到零, 因此对于任意小 $\delta > 0$, 存在

时间 T_1 , 满足

$$E(t) \leq \delta, \quad t \geq T_1, \quad (48)$$

且当

$$V(t) \geq \alpha_4 \circ \alpha_1^{-1}\left(\frac{\delta}{\beta}\right) = \frac{1}{2}[\alpha_1^{-1}\left(\frac{\delta}{\beta}\right)]^2$$

时, 使得 $-\beta\alpha_1(\|\zeta\|) + E \leq 0$, 导致

$$\dot{V} \leq -(1 - \beta)\alpha_1(\xi) < 0, \quad (49)$$

因此 V 最终一致有界, 最终一致界为

$$V \leq \alpha_4 \circ \alpha_1^{-1}\left(\frac{\delta}{\beta}\right) = \frac{1}{2}[\alpha_1^{-1}\left(\frac{\delta}{\beta}\right)]^2. \quad (50)$$

对于任意小 $\varepsilon > 0$, 可选取 $\delta = \beta\alpha_1(\sqrt{2\varepsilon})$. 由式(50)知 $V \leq \varepsilon$, 即 V 的最终一致界为 ε , 因为 ε 可以任意小, 因此 V 趋于零, 从而位置跟踪误差 (ζ_1, ζ_2) 趋于零.

6 仿真结果(Simulation results)

本节对所得到的算法进行仿真验证, 考虑假设 1, 选取光滑“8”字形参考轨迹 P_r 为

$$\begin{cases} x_r = h_1 \sin(2h_2 t), \\ y_r = h_1 \sin(h_2 t), \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad (51)$$

其中 $[h_1, h_2] = [5, 0.02]$. 计算可得

$$\begin{cases} \dot{x}_r = 2h_1 h_2 \cos(2h_2 t), \dot{y}_r = h_1 h_2 \cos(h_2 t), \\ \ddot{x}_r = -4h_1 h_2^2 \sin(2h_2 t), \ddot{y}_r = -h_1 h_2^2 \sin(h_2 t), \\ v_r = h_1 h_2 \sqrt{4\cos^2(2h_2 t) + \cos^2(h_2 t)}, \\ \theta_r = \arctan 2(\dot{y}_r, \dot{x}_r). \end{cases} \quad (52)$$

注 4 调节 h_1 即为调节“8”字形参考轨迹的范围, 即 $(x_r, y_r) \subset \{(x_r, y_r) \mid -h_1 \leq x_r \leq h_1, -h_1 \leq y_r \leq h_1\}$.

同时, 机器人的位置跟踪误差可表示为

$$V_t = \sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2}. \quad (53)$$

6.1 降维状态观测器仿真实验(Simulation result of reduced-order observer)

本小节给出降维状态观测器的仿真结果. 假设机器人的运动轨迹与参考轨迹 P_r 一致, 机器人的运动线速度满足 $v = v_r = \sqrt{\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2}$. 设置初始条件及观测器参数, 具体为

$$\begin{cases} [x(0), y(0), \theta(0)] = [0, -5, 1.5\pi], \\ [\hat{z}_3, \hat{z}_4] = [0, 0], \\ L = 1, \end{cases}$$

仿真时间 20 s. 定理 1 中选用的非负函数 V_0 的仿真结果见图 1, 结果表明观测误差指数收敛.

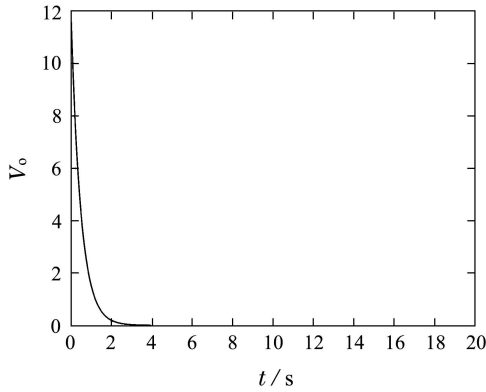


图1 降维状态观测器仿真实验结果

Fig. 1 The simulation result of reduced-order observer

6.2 状态反馈控制仿真实验(Simulation results of state feedback trajectory tracking control)

设置初始状态和满足不等式(15)的控制参数为

$$\begin{cases} [k_1, k_2, k_3] = [0.11, 0.11, 1], \\ [x_r(0), y_r(0), x(0), y(0)] = [0, -5, 0, -6], \end{cases}$$

仿真时间80 s. 机器人的运动轨线如图2所示, 图3为位置跟踪误差 \$V_t\$ 的变化情况. 仿真结果显示, 在状态反馈控制律作用下, 机器人的跟踪误差渐近收敛到零.

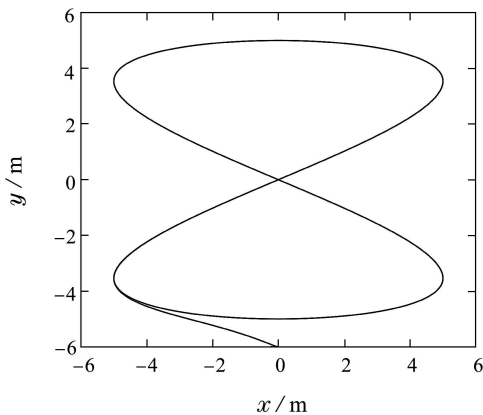


图2 状态反馈控制中机器人的运行轨线

Fig. 2 The robot trajectory in state feedback control

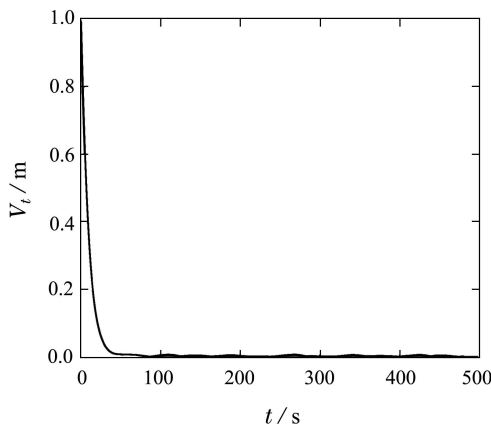


图3 状态反馈控制中 \$V_t\$ 的变化情况

Fig. 3 Trajectory tracking error in state feedback control

6.3 输出反馈控制仿真实验(Simulation results of output feedback control)

6.3.1 无定位噪声条件下输出反馈控制仿真实验(Simulation results of output feedback control without position noise)

选取观测器及控制律参数, 同时设定初始状态为

$$\begin{cases} [k_1, k_2, k_3, L] = [0.11, 0.11, 0.01, 4], \\ [x_r(0), y_r(0), x(0), y(0)] = [0, -5, 0, -6], \end{cases}$$

仿真时间480 s. 机器人运动轨迹如图4所示, 位置跟踪误差 \$V_t\$ 的变化情况见图5. 仿真结果显示, 输出反馈控制律使得机器人跟踪误差渐近收敛到零.

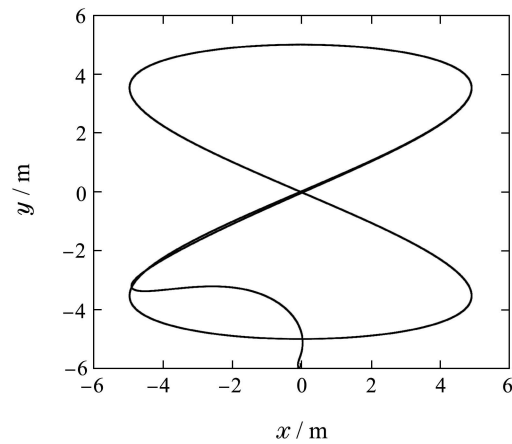


图4 无定位噪声条件下输出反馈控制中机器人的运行轨线

Fig. 4 The robot trajectory in output control without position noise

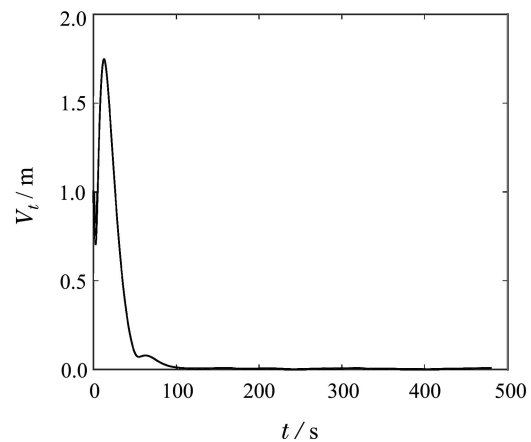


图5 无定位噪声条件下输出反馈控制中 \$V_t\$ 的变化情况

Fig. 5 Trajectory tracking error in output feedback control without position noise

6.3.2 强定位噪声条件下输出反馈控制仿真实验(Simulation results of output feedback control with position noise)

考虑存在强定位噪声的RFID定位方案, 假设在地面间隔10 cm均匀粘贴存储位置信息的RFID标签. 在

控制中, 取距离机器人最近的标签坐标作为机器人的位置. 选择观测器和控制器参数, 并设置初始状态为

$$\begin{cases} [k_1, k_2, k_3, L] = [0.11, 0.11, 0.1, 0.6], \\ [x_r(0), y_r(0), x(0), y(0)] = \\ [0, -5, 0, -6], \end{cases}$$

仿真时间480 s. 机器人运动轨迹见图6, 位置跟踪误差 V_t 的变化情况见图7.

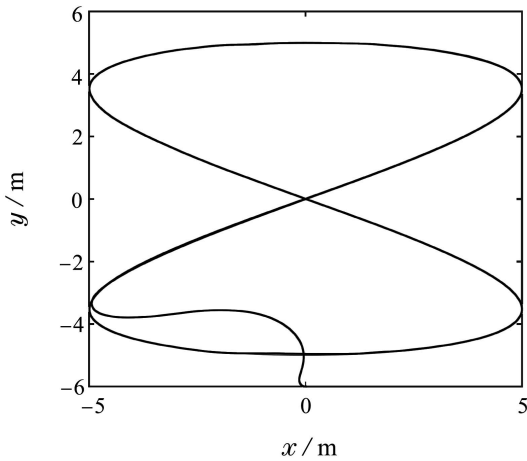


图6 强定位噪声条件下输出反馈控制中机器人的运行轨迹
Fig. 6 The robot trajectory in output feedback control with position noise

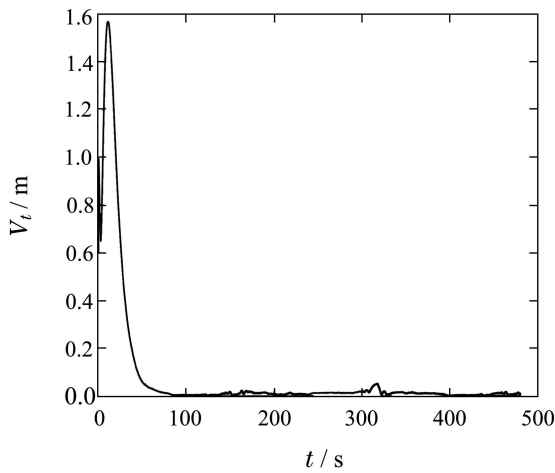


图7 强定位噪声条件下输出反馈控制中 V_t 的变化情况
Fig. 7 Trajectory tracking error in output feedback control with position noise

由图7可知, 在强定位噪声条件下, 机器人位置跟踪误差未收敛到零, 进入稳态(100 s)后的最大跟踪误差为0.05 m, 平均跟踪误差为0.01 m, 可见在强定位误差的情况下, 本文提出的输出跟踪控制算法仍然有效. 另外, 对于相同参考轨迹, 图8和图9为利用文献[23]提出的输出反馈控制器的轨迹跟踪仿真结果, 其中控制参数取

$$\begin{cases} [x(0), y(0)] = [0, -6], \\ [x_r(0), y_r(0)] = [0, -5], \\ [k_{d11}, k_{p11}] = [1, 2], \\ [k_{d12}, k_{p12}] = [1, 2], \\ [k_{p21}, k_{p22}] = [0.5, 0.5], \\ [\Gamma, \delta] = [0.15, 0.08], \end{cases} \quad (54)$$

参数的含义见文献. 在文献[23]控制器作用下, 机器人进入稳态(100 s)后的最大跟踪误差为0.64 m, 平均跟踪误差为0.08 m. 可以看出, 文献[23]提出的算法使得机器人进入稳态后还会产生大的跟踪误差, 线速度较小时尤为明显, 这由其切换机制造成. 与文献[23]提出的算法相比, 本文提出的控制律无切换, 动态平稳, 在强定位噪声条件下的稳态跟踪误差小. 另外, 本文提出算法无需测量机器人的加速度, 适用范围更广.

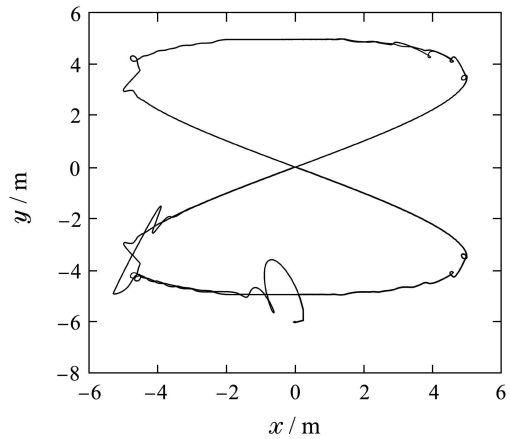


图8 文献[23]控制器作用下机器人的运行轨迹
Fig. 8 The robot trajectory under output feedback control law of [23]

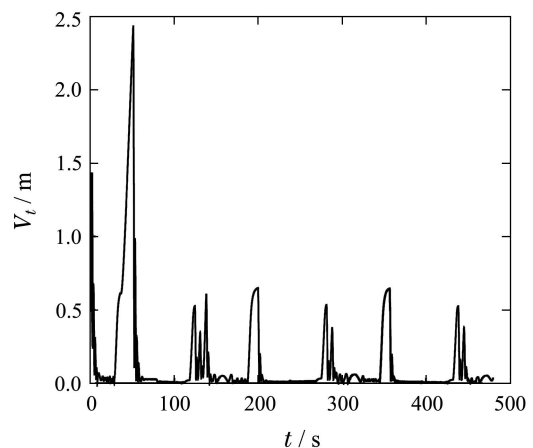


图9 文献[23]控制器作用下 V_t 的变化情况
Fig. 9 Trajectory tracking error under output feedback control law of [23]

总体仿真结果显示, 本文提出的输出反馈控制算法在无定位噪声情况下, 可以保证机器人实现对参考轨迹的全局渐近跟踪, 在强定位噪声条件下, 可实现对参考轨迹的实际跟踪.

7 结论(Conclusions)

本文利用轮式移动机器人的位置信息,提出一种针对机器人姿态角的降维状态观测器,随后给出新的状态反馈全局轨迹跟踪控制律,并结合观测器及状态反馈控制律构造出输出反馈控制律.与现有成果相比,本文提出的观测器具有形式简单和运算量小等优点,构造的输出反馈控制律可实现对光滑参考轨迹的全局跟踪,并能够在强定位噪声条件下,实现对参考轨迹的实际跟踪.在下一步工作中,笔者将搭建实验平台对所提出的算法进行验证.

参考文献(References):

- [1] LAPIERRE L, SOETANTO D, PASCOAL A. Nonsingular path following control of a unicycle in the presence of parametric modeling uncertainties [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, 16(10): 485 – 503.
- [2] BROCKETT R W. Asymptotic stability and feedback stabilization [M] // *Differential Geometric Control Theory*. Boston, America: Birkhauser, 1983.
- [3] FIERRO R, LEWIS F L. Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics [C] // *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans: IEEE, 1995, 4: 3805 – 3810.
- [4] AGUIAR A P, HESPANHA J P. Trajectory-tracking and path-following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(8): 1362 – 1379.
- [5] ZOHAR I, AILON A, RABINOVICI R. Mobile robot characterized by dynamic and kinematic equations and actuator dynamics: trajectory tracking and related application [J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2011, 59(6): 343 – 353.
- [6] ORIOLO G, DE LUCA A, VENDITTELLI M. WMR control via dynamic feedback linearization: design, implementation, and experimental validation [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, 10(6): 835 – 852.
- [7] PANG Hailong, MA Baoli. Adaptive unified controller of arbitrary trajectory tracking for wheeled mobile robots with unknown parameters [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(3): 285 – 292. (庞海龙, 马保离. 不确定轮式移动机器人的任意轨迹跟踪 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(3): 285 – 292.)
- [8] KIM K R, LEE J C, KIM J H. Dead-reckoning for a two-wheeled mobile robot on curved surfaces [C] // *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Minneapolis: IEEE, 1996, 2: 1732 – 1737.
- [9] VON DER HARDT H J, WOLF D, HUSSON R. The dead reckoning localization system of the wheeled mobile robot ROMANE [C] // *IEEE/SICE/RSJ International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems*. Washington: IEEE, 1996: 603 – 610.
- [10] KIM J H, LEE J C. Dead-reckoning scheme for wheeled mobile robots moving on curved surfaces [J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2014, 79(2): 211 – 220.
- [11] ABDULRAHIM K, HIDE C, MOORE T, et al. Aiding low cost inertial navigation with building heading for pedestrian navigation [J]. *Journal of Navigation*, 2011, 64(2): 219 – 233.
- [12] WEN H, HU D K. ARM based low cost integrated navigation system technology research [J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2013, 291(16): 2537 – 2542.
- [13] KORKISHKO Y N, FEDOROV V, PRILUTSKII V, et al. Strapdown inertial navigation systems based on fiber-optic gyroscopes [J]. *Gyroscopy and Navigation*, 2014, 5(4): 195 – 204.
- [14] BECERRA H M, SAGUES C, MEZOUAR Y, et al. Visual navigation of wheeled mobile robots using direct feedback of a geometric constraint [J]. *Autonomous Robots*, 2014, 37(2): 137 – 156.
- [15] SIMONCIC S, PODRZAJ P. Vision-based control of a line-tracing mobile robot [J]. *Computer Applications in Engineering Education*, 2014, 22(3): 474 – 480.
- [16] PANTELEY E. Global uniform asymptotic stability of cascade time-varying nonlinear systems: case study [C] // *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*. Kobe: IEEE, 1996, 1: 590 – 591.
- [17] PANTELEY E, LORIA A. On global uniform asymptotic stability of nonlinear time-varying systems in cascade [J]. *Systems & Control Letters*, 1998, 33(2): 131 – 138.
- [18] PANTELEY E, LORIA A. Global uniform asymptotic stability of cascaded non autonomous nonlinear systems [C] // *The 4th European Control Conference*. Brussels: IEEE, 1997: 453 – 456.
- [19] PANTELEY E, LORIA A. Growth rate conditions for uniform asymptotic stability of cascaded time-varying systems [J]. *Automatica*, 2001, 37(3): 453 – 460.
- [20] JAHOO K, SEUNGJOON C, SANGCHUL W. Observer-based trajectory tracking control for a wheeled mobile robot [C] // *The 7th Asia Control Conference*. Hong Kong: IEEE, 2009: 1644 – 1649.
- [21] JAKUBIAK J, LEFEBER E, TCHON K, et al. Two observer-based tracking algorithms for a unicycle mobile robot [J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2002, 12(4): 513 – 522.
- [22] NOIJEN S, LAMBRECHTS P, NIJMEIJER H. An observer-controller combination for a unicycle mobile robot [J]. *International Journal of Control*, 2005, 78(2): 81 – 87.
- [23] VELASCO-VILLA M, ARANDA-BRICAIRE E, RODRIGUEZ-CORTES H, et al. Trajectory tracking for a wheeled mobile robot using a vision based positioning system and an attitude observer [J]. *European Journal of Control*, 2012, 18(4): 348 – 355.
- [24] HE Gang, MA Baoli. Nonlinear reduced-order state observer for nonholonomic wheeled mobile robots [C] // *Proceedings of 2006 Chinese Control and Decision Conference*. Shenyang: Editorial Office of Control and Decision, 2006: 1031 – 1034. (何刚, 马保离. 移动机器人的一种非线性降维状态观测器 [C] // 中国控制与决策学术年会论文集. 沈阳: 《控制与决策》编辑部, 2006: 1031 – 1034.)
- [25] ISHIKAWA M, SAMPEI M. State estimation of non-holonomic mobile robots using nonlinear observers [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Nagoya: IEEE, 1995, 2: 1379 – 1384.
- [26] RODRIGUEZ C H, ARANDA B E. Observer based trajectory tracking for a wheeled mobile robot [C] // *American Control Conference*. New York: IEEE, 2007: 991 – 996.
- [27] KARAGIANNIS D, ASTOLFI A. Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications [C] // *The 44th IEEE Conference on European Control Conference*. Seville: IEEE, 2005: 7775 – 7780.
- [28] MA Baoli. Observer-based path following control of wheeled mobile robots [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(5): 756 – 760. (马保离. 基于观测器的轮式移动机器人路径跟踪控制 [J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(5): 756 – 760.)
- [29] MIAH M S, GUEAIEB W. Mobile robot trajectory tracking using noisy RSS measurements: an RFID approach [J]. *ISA Transactions*, 2014, 53(2): 433 – 443.
- [30] KHALIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. New York: Prentice Hall, 2011.

附录 注2证明(Appendix Proof of Remark 2)

证 对 g_1 由和差化积公式可得

$$g_1(a, b) = -\sin \frac{a+b}{2} \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\frac{a-b}{2}}. \quad (\text{A1})$$

令 $\varpi'(d) = \frac{\sin d}{d}$, 可知 $\lim_{d \rightarrow 0} \varpi'(d) = 1$, 因此可得

$$\lim_{a-b \rightarrow 0} g_1(a, b) = -\sin \frac{a+b}{2}, \quad (\text{A2})$$

所以 g_1 在 $a=b$ 处连续. 同时, 通过计算可得 $|\varpi'| \leq 1$. 计算 g_1 对 a 的偏导数并化简得到

$$\begin{aligned} \frac{\delta g_1}{\delta a} &= -\frac{1}{2} \varpi\left(\frac{a-b}{2}\right) - \frac{1}{2} \varpi'\left(\frac{a-b}{2}\right) \leq \\ &\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = 1. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

因 g_1 连续光滑, 由中值定理知存在 $a_\Delta \in (a, a + \Delta a)$, 使得

$$g_1(a + \Delta a, b) - g_1(a, b) = \Delta a \frac{\delta g_1}{\delta a}(a_\Delta, b). \quad (\text{A4})$$

进一步推得 $|g_1(a + \Delta a, b) - g_1(a, b)| \leq |\Delta a|$. 同时对于 g_1 有 $|g_1(a, b)| \leq 1$, 所以

$$|g_1(a + \Delta a, b) - g_1(a, b)| \leq 2 |g_1| \leq 2. \quad (\text{A5})$$

结合式(A3)可得 $|g_1(a + \Delta b, b) - g_1(a, b)| \leq 2 \text{sat}(|\Delta a|)$.

同理可得 $|g_2(a + \Delta a, b) - g_2(a, b)| \leq 2 \text{sat}(|\Delta a|)$.

作者简介:

鄢立夏 (1991-), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为非线性系统控制、轮式移动机器人, E-mail: robotyanlx@yahoo.com;

马保离 (1963-), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性系统控制、机器人控制, E-mail: mabaoli@buaa.edu.cn.