

不确定噪声方差定常系统保性能鲁棒Kalman滤波器

杨智博^{1,2}, 杨春山¹, 邓自立^{1†}

(1. 黑龙江大学 电子工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 北京大学 电气工程学院, 吉林 吉林 132021)

摘要: 对带不确定噪声方差线性定常系统鲁棒Kalman滤波, 提出一般的统一的保性能鲁棒性概念. 用Lyapunov方程方法, 提出两类保性能极大极小鲁棒稳态Kalman滤波器. 一类是寻求不确定噪声方差最大扰动域(鲁棒域), 使得对于扰动域内的所有扰动, 确保系统滤波精度偏差的最大下界是零, 最小上界是所预置的精度偏差指标; 另一类是在预置噪声方差有界扰动域内, 寻求滤波精度偏差的最大下界和最小上界. 通过引入不确定噪声方差扰动的参数化表示, 问题转化为相应的非线性与线性最优化问题, 可分别用Lagrange乘数法和线性规划(LP)方法求解. 应用于跟踪系统的仿真例子验证了所提结果的正确性和有效性.

关键词: 不确定噪声方差; 极大极小鲁棒Kalman滤波器; 保性能鲁棒性; Lyapunov方程方法

中图分类号: O211.64 文献标识码: A

Guaranteed-cost robust Kalman filters for time-invariant systems with uncertain noise variances

YANG Zhi-bo^{1,2}, YANG Chun-shan¹, DENG Zi-li^{1†}

(1. School of Electronic Engineering, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China;
2. School of Electrical Engineering, Beihua University, Jilin Jilin 132021, China)

Abstract: For the robust Kalman filtering of linear time-invariant systems with uncertain noise variances, the concept of general and unified guaranteed-cost robustness of Kalman filtering is presented, and two classes of guaranteed cost mini-max robust steady-state Kalman filters are presented by using the Lyapunov equation approach. One class is to find the maximal perturbation region (robust region) of uncertain noise variances such that for all admissible perturbations in this region the accuracy deviations are guaranteed to have zero as the maximal lower bound and the prescribed accuracy deviation index as the minimal upper bound. The other class is to find the maximal lower bound and the minimal upper bound of the accuracy deviations over the prescribed bounded perturbation region of noise variances. The problems are converted into corresponding nonlinear and linear optimization problems by introducing the parameterized representation of noise variances perturbations. They are solved by Lagrange multiplier method and linear programming (LP) approach, respectively. A simulation example applied to tracking system validates the correctness and effectiveness of the proposed method.

Key words: uncertain noise variance; min-max robust Kalman filter; guaranteed cost robustness; Lyapunov equation approach

1 引言(Introduction)

Kalman滤波广泛应用于目标跟踪、信号处理、GPS定位、机器人、遥感、无人机、卫星测控等领域, 其基本前提为假设系统模型参数和噪声方差精确已知. 但实际应用中, 由于模型简化、未建模动态及不确定干扰等因素, 使得此假设常常不成立. 这将导致系统滤波性能恶化, 甚至滤波发散^[1-2]. 所谓鲁棒Kalman滤波器, 就是对于所有容许的不确定性, 确保所设计的滤波器的实际滤波误差方差有最小上界^[2]. 目前,

不确定系统鲁棒Kalman滤波器设计主要基于Riccati方程方法或者线性矩阵不等式(linear matrix inequalities, LMI)方法^[2-4]. 但二者主要是针对系统模型参数不确定而噪声方差精确已知的情形进行设计的. 对于带不确定噪声方差系统的鲁棒Kalman滤波问题报道较少^[5-8]. 文献[6-7]提出了鲁棒Kalman滤波器设计的Lyapunov方程方法, 但其局限性在于仅仅解决了系统滤波精度偏差的最大下界问题, 而未考虑其上界问题. 文献[8]用博弈理论设计了针对带不确定噪声方差

收稿日期: 2015-05-06; 录用日期: 2015-10-29.

†通信作者. E-mail: dzl@hlju.edu.cn; Tel.: +86 13804583507.

本文责任编辑: 方海涛.

国家自然科学基金项目(60874063, 60374026)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (60874063, 60374026).

的广义系统保性能鲁棒Kalman滤波器, 保性能意味着确保滤波精度偏差在预置指标范围内^[8]. 但仅考虑滤波精度偏差的上界问题, 对于其下界问题未提及. 除此之外, 文献[8]是已知滤波精度偏差上界, 反求不确定噪声方差的最大扰动域, 可归结为带约束的非线性最优化问题, 本文称其为第1类保性能鲁棒Kalman滤波问题. 反之, 已知不确定噪声方差的有界扰动域, 求在该扰动域上鲁棒滤波器精度偏差的最大下界和最小上界问题, 本文称其为第2类保性能鲁棒Kalman滤波问题, 尚未见文献报道. 文献[6-7]仅对已知不确定噪声方差的有下界的扰动域, 求鲁棒滤波器精度偏差的最大下界. 带范数有界的模型参数不确定系统保性能鲁棒Kalman滤波问题^[2-4, 9], 类似于第2类问题.

对于带不确定噪声方差系统保性能鲁棒Kalman滤波器的设计, 本文主要贡献如下:

提出了保性能鲁棒性的一般的统一的概念, 即确保精度偏差有最大下界和最小上界, 克服了现有文献中保性能鲁棒性概念的局限性.

基于极大极小鲁棒估计原理和Lyapunov方程方法, 用噪声方差扰动参数化方法提出了两类保性能鲁棒Kalman滤波器的设计方法, 它们分别解决上述第1类与第2类保性能鲁棒Kalman滤波问题. 可简单地用Lagrange乘数法和线性规划(LP)方法分别求解.

提出用Lyapunov方程方法证明保性能鲁棒性, 严格证明了精度偏差有最大下界和最小上界: 它不同于文献[8]用博弈理论的证明方法.

2 问题的提出(Problem formulation)

考虑带不确定噪声方差的不确定线性定常系统

$$\begin{cases} x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t), \\ y(t) = Hx(t) + v(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: t 为离散时间, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ 为观测. $w(t) \in \mathbb{R}^l$ 及 $v(t) \in \mathbb{R}^m$ 为输入和观测噪声, Φ, Γ, H 为已知的适当维数常阵.

假设1 $w(t)$ 和 $v(t)$ 为零均值互不相关白噪声, 其未知不确定实际方差分别为 \bar{Q} 和 \bar{R} , 且相应的已知保守上界方差分别为 Q 和 R , 即

$$\bar{Q} \leq Q, \bar{R} \leq R. \quad (2)$$

定义不确定噪声方差扰动为

$$\Delta Q = Q - \bar{Q}, \Delta R = R - \bar{R}. \quad (3)$$

由式(2), 可得

$$\Delta Q \leq 0, \Delta R \leq 0. \quad (4)$$

假设2 噪声方差扰动 $\Delta Q \geq 0$ 和 $\Delta R \geq 0$ 可参数化为

$$\Delta Q = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i Q_i, \Delta R = \sum_{j=1}^q e_j R_j, \quad (5)$$

$$\begin{cases} 0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_i^m, i = 1, \dots, p, \\ 0 \leq e_j \leq e_j^m, j = 1, \dots, q, \end{cases} \quad (6)$$

其中: $Q_i \geq 0$ 和 $R_j \geq 0$, ε_i^m 和 e_j^m 为扰动参数的上界.

注1 当 \bar{Q} 及 \bar{R} 为对角阵时, 本文一般选取 $Q_i \geq 0$ 为对角阵, 其第 (i, i) 对角元素为1, 其他元素为0. 类似地, 选取 $R_j \geq 0$ 为第 (j, j) 对角元素为1, 其他元素为0的对角阵. 因此, 不确定扰动可参数化表示为

$$\begin{cases} \Delta Q = Q - \bar{Q} = \text{diag}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l\} = \sum_{i=1}^l \varepsilon_i Q_i, \\ \Delta R = R - \bar{R} = \text{diag}\{e_1, \dots, e_m\} = \sum_{j=1}^m e_j R_j. \end{cases} \quad (7)$$

注2 本文阐述的噪声方差扰动参数化原理的基本思想是半正定噪声方差扰动 $\Delta Q = Q - \bar{Q} \geq 0$ 和 $\Delta R = R - \bar{R} \geq 0$ 可分别用一些简单的半正定扰动方位阵 Q_i 和 R_j 的非负标量加权线性组合表示, 如式(5)所示. 当 \bar{Q} 和 \bar{R} 为对角阵时, 注1的表达式(7)已体现了这个参数化原理. 对 \bar{Q} 和 \bar{R} 为非对角阵的一般情形, 可根据具体实际问题情况构造半正定扰动方位阵 Q_i 和 R_j . 半正定扰动方位阵的每个元素为1或0, 当元素为1时, 意味着该元素被扰动, 当元素为0时, 意味着该元素无扰动. 非负标量加权系数 ε_i 或 e_j 表示该元素的扰动量. 例如, 对 $l = 2$, 取简单半正定扰动方位阵为

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0, Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (8)$$

则扰动 $\Delta Q \geq 0$ 的一种参数化表示为

$$\Delta Q = \varepsilon_1 Q_1 + \varepsilon_2 Q_2, \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0. \quad (9)$$

这表示实际噪声方差 \bar{Q} 的第 $(1, 1)$ 对角元素有扰动量, 且 \bar{Q} 的所有元素还含有相同扰动量 ε_2 . 因 $\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0$, 故式(9)满足 $\Delta Q \geq 0$. 注意, 因为本文要求 $\Delta Q \geq 0$, 因此不能选择非半正定阵作为扰动方位阵. 例如, $Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 为非半正定阵, 它不能作为扰动方位阵. 应强调指出, 在扰动参数化表达式(5)中, 要求假设 $\varepsilon_i \geq 0, e_j \geq 0$, 是为了保证 $\Delta Q \geq 0$ 和 $\Delta R \geq 0$. 因为已选择 Q_i 和 R_j 为半正定, 故它们的非负标量加权也是半正定的.

假设3 (Φ, H) 为能检测对, $(\Phi, \Gamma Q^{1/2})$ 为能稳对^[1], 其中 $Q = Q^{1/2}(Q^{1/2})^T$, 上标T为转置号.

本文的目标为在假设1-3下设计两类保性能鲁棒稳态Kalman滤波器.

3 保性能鲁棒Kalman滤波器(Guaranteed cost robust Kalman filter)

依据极大极小鲁棒估计原理^[10-11], 带保守上界 Q 和 R 的最坏情形保守系统(1)的保守稳态最小方差Kalman滤波器为^[12]

$$\hat{x}(t|t) = \Psi \hat{x}(t-1|t-1) + Ky(t), \quad (10)$$

$$K = \Sigma H^T [H \Sigma H^T + R]^{-1}, \quad (11)$$

$$P = [I_n - KH] \Sigma, \quad (12)$$

$$\Psi = [I_n - KH] \Phi, \quad (13)$$

其中: Ψ 为稳定矩阵^[12], I_n 为 $n \times n$ 单位阵, 保守预报误差方阵 Σ 满足Riccati方程

$$\Sigma = \Phi[\Sigma - \Sigma H^T(H\Sigma H^T + R)^{-1}H\Sigma]\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T. \quad (14)$$

由式(1)和式(10), 可得保守滤波误差 $\hat{x}(t|t) = x(t) - \hat{x}(t|t)$ 为

$$\hat{x}(t|t) = \Psi \hat{x}(t-1|t-1) - Kv(t) + (I_n - KH)\Gamma w(t-1), \quad (15)$$

从而有保守稳态误差方阵满足Lyapunov方程

$$P = \Psi P \Psi^T + KRK^T + [I_n - KH]\Gamma Q \Gamma^T [I_n - KH]^T. \quad (16)$$

注3 注意式(10)中由带保守上界 Q 和 R 的系统(1)产生的保守观测 $y(t)$ 是不可用的, 因此在式(10)中, 由带实际噪声方差 \bar{Q} 和 \bar{R} 的系统(1)生成的实际观测 $y(t)$ 代替保守观测得到实际Kalman滤波器.

引理1 考虑Lyapunov方程

$$P = \Psi P \Psi^T + U, \quad (17)$$

其中: P, Ψ 及 U 为 $n \times n$ 矩阵, 且 U 为对称阵, Ψ 为稳定矩阵. 若 U 为(半)正定矩阵, 则Lyapunov方程有唯一的对称(半)正定解 P .

类似地, 由式(15)可得到实际滤波误差方阵满足Lyapunov方程

$$\bar{P} = \Psi \bar{P} \Psi^T + K \bar{R} K^T + [I_n - KH]\Gamma \bar{Q} \Gamma^T [I_n - KH]^T. \quad (18)$$

由式(16)减式(18), 令 $\Delta P = P - \bar{P}$, 有Lyapunov方程

$$\Delta P = \Psi \Delta P \Psi^T + K \Delta R K^T + [I_n - KH]\Gamma \Delta Q \Gamma^T [I_n - KH]^T. \quad (19)$$

其唯一解为^[12]

$$\Delta P = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi^s ([I_n - KH]\Gamma \Delta Q \Gamma^T [I_n - KH]^T + K \Delta R K^T) \Psi^{sT}. \quad (20)$$

将式(5)代入式(19), 可得

$$\Delta P = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i \left[\sum_{s=0}^{\infty} \Psi^s (I_n - KH)\Gamma Q_i \Gamma^T (I_n - KH)^T \Psi^{sT} \right] + \sum_{j=1}^q e_j \left[\sum_{s=0}^{\infty} \Psi^s K R_j K^T \Psi^{sT} \right]. \quad (21)$$

定义

$$C_i = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi^s (I_n - KH)\Gamma Q_i \Gamma^T (I_n - KH)^T \Psi^{sT}, \quad (22)$$

$$D_j = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi^s K R_j K^T \Psi^{sT}. \quad (23)$$

由式(22)和式(23), 可得 $C_i (i = 1, \dots, p), D_j (j = 1, \dots, q)$ 分别满足如下Lyapunov方程:

$$C_i = \Psi C_i \Psi^T + (I_n - KH)\Gamma Q_i \Gamma^T (I_n - KH)^T, \quad (24)$$

$$D_j = \Psi D_j \Psi^T + K R_j K^T. \quad (25)$$

可用迭代法求解^[11]Lyapunov方程式(24)及式(25). 由 $Q_i \geq 0, R_j \geq 0$, 可得

$$\begin{cases} (I_n - KH)\Gamma Q_i \Gamma^T (I_n - KH)^T \geq 0, \\ K R_j K^T \geq 0. \end{cases} \quad (26)$$

因此对式(24)–(25)应用引理1, 可得

$$C_i \geq 0, D_j \geq 0. \quad (27)$$

对上式取矩阵迹运算

$$c_i = \text{tr} C_i \geq 0, d_j = \text{tr} D_j \geq 0, \quad (28)$$

其中符号tr表示矩阵的迹. 于是由式(21)有

$$\text{tr} \Delta P = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i c_i + \sum_{j=1}^q e_j d_j. \quad (29)$$

由式(16)(18)–(19), 有如下函数关系:

$$\text{tr} P = J(K, Q, R), \text{tr} \bar{P} = J(K, \bar{Q}, \bar{R}), \quad (30)$$

$$\text{tr} \Delta P = \text{tr} P - \text{tr} \bar{P} = J(K, \Delta Q, \Delta R), \quad (31)$$

称 $\text{tr} \bar{P}$ 为实际Kalman滤波器的实际精度, 而 $\text{tr} P$ 为实际滤波器的鲁棒精度(总体精度)^[10]. 这里称 $\text{tr} P - \text{tr} \bar{P}$ 为实际精度与鲁棒精度之间的偏差, 简称精度偏差或偏离度^[8]. 定义式(31)为精度偏差性能函数.

定义1 对带不确定噪声方差系统, 若存在不确定噪声方差扰动 ΔQ 和 ΔR 的一个扰动域 $\Omega^m(\Delta Q, \Delta R)$, 使得对于该域中的所有扰动, 相应的滤波精度偏差有最大下界和/或最小上界, 则称实际Kalman滤波器具有保性能鲁棒性, 并称该扰动域为鲁棒域.

现在对不确定噪声方差系统提出两类保性能鲁棒Kalman滤波问题:

问题1 寻求不确定噪声方差的最大扰动域, 确保在此扰动域内的所有容许的不确定扰动, 相应的系统实际滤波精度与鲁棒精度的精度偏差的最大下界是零, 最小上界是预置的偏差指标 $r (r > 0)$.

问题2 对于预置的实际噪声方差的有界扰动域, 寻求此扰动域内所有容许扰动下的相应的滤波实际精度与相应鲁棒精度的偏差的最大下界和最小上界.

3.1 第1类保性能鲁棒Kalman滤波问题(The first class of guaranteed cost robust Kalman filters)

问题1可由下面提出的第1类保性能鲁棒Kalman滤波器解决. 对于给定的精度偏差指标 $r > 0$, 由式

(5)和式(6)可得不确定扰动所构建的最大扰动域为

$$\begin{aligned} \Omega^m &= \Omega^m(\Delta Q, \Delta R) = \\ &\{(\Delta Q, \Delta R) : 0 \leq \Delta Q \leq \Delta Q^m, \\ &0 \leq \Delta R \leq \Delta R^m\}, \end{aligned} \quad (32)$$

其中噪声方差最大扰动为

$$\Delta Q^m = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i^m Q_i, \quad \Delta R^m = \sum_{j=1}^q e_j^m R_j. \quad (33)$$

由式(3)有, 实际 $\bar{Q}^m = Q - \Delta Q^m$, $\bar{R}^m = R - \Delta R^m$. 因此, 实际滤波误差阵满足Lyapunov方程

$$\begin{aligned} \bar{P}^m &= \Psi \bar{P}^m \Psi^T + K \bar{R}^m K^T + \\ &[I_n - KH] \Gamma \bar{Q}^m \Gamma^T [I_n - KH]^T. \end{aligned} \quad (34)$$

由式(16)减去式(34)并令 $\text{tr} \Delta P^m = \text{tr} P - \text{tr} \bar{P}^m$, 可得

$$\begin{aligned} \text{tr} \Delta P^m &= J(K, \Delta Q^m, \Delta R^m) = \\ &J(K, Q, R) - J(K, \bar{Q}^m, \bar{R}^m). \end{aligned} \quad (35)$$

由式(32)–(33), 寻求最大扰动域 $\Omega^m(\Delta Q, \Delta R)$ 等价于寻求最大参数扰动域 Ω_0^m , 即

$$\begin{aligned} \Omega_0^m &= \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q) | 0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_i^m, \\ &0 \leq e_j \leq e_j^m, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q\}. \end{aligned} \quad (36)$$

这等价于极大化超立方体

$$\begin{aligned} 0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_i^m, \quad 0 \leq e_j \leq e_j^m, \\ i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q \end{aligned}$$

的体积 J_m ,

$$J_m = \varepsilon_1^m \cdots \varepsilon_p^m e_1^m \cdots e_q^m. \quad (37)$$

由式(29), 精度偏差 $\text{tr} \Delta P$ 是扰动参数 ε_i 和 e_j 的线性函数, 它在扰动域 Ω_0^m 上的极大值必在边界点 $(\varepsilon_1^m, \dots, \varepsilon_p^m, e_1^m, \dots, e_q^m)$ 处达到^[13], 因此问题等价于在如下线性约束条件下的非线性最优化问题

$$\sum_{i=1}^p \varepsilon_i^m c_i + \sum_{j=1}^q e_j^m d_j = r. \quad (38)$$

如果对于 $i = i_0$ 或者 $j = j_0$, 得到 $c_{i_0} = 0$ 或 $d_{j_0} = 0$; 则 ε_{i_0} 或 e_{j_0} 对于噪声方差扰动而言为非约束扰动参数. 不失一般性假定 $c_i > 0$ 及 $d_j > 0$.

因 J_m 与 $\ln J_m$ 有相同的极值点, 问题又等价于在约束条件(38)下, 极大化 $\ln J_m$, 应用Lagrange乘法, 引入带Lagrange乘子 λ 的辅助函数

$$\begin{aligned} F &= \ln J_m + \lambda(r - \sum_{i=1}^p \varepsilon_i^m c_i - \sum_{j=1}^q e_j^m d_j) = \\ &\sum_{i=1}^p \ln \varepsilon_i^m + \sum_{j=1}^q \ln e_j^m + \lambda(r - \sum_{i=1}^p \varepsilon_i^m c_i + \\ &\sum_{j=1}^q e_j^m d_j). \end{aligned} \quad (39)$$

问题归结为无约束极大化 F 的问题. 分别置 F 关于 ε_i^m , e_j^m 和 λ 的偏导数为零, 可求得极大值点为

$$\begin{cases} \varepsilon_i^m = r/(p+q)c_i, & i = 1, \dots, p, \\ e_j^m = r/(p+q)d_j, & j = 1, \dots, q, \end{cases} \quad (40)$$

其中 c_i, d_j 由式(28)计算得出.

定理1 对于带不确定噪声方差的系统(1), 在假设1–3的条件下, 实际Kalman滤波器(10)是保性能鲁棒Kalman滤波器, 即对于预置的精度偏差指标 $r > 0$, 存在由式(40)规定的由式(36)给出的最大参数扰动域 Ω_0^m , 对该扰动域内所有扰动参数 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q)$, 相应的精度偏差满足

$$0 \leq \text{tr} P - \text{tr} \bar{P} \leq r, \quad (41)$$

其中零和 r 分别为精度偏差 $\text{tr} P - \text{tr} \bar{P}$ 的最大下界和最小上界, 称实际Kalman滤波器(10)为第1类保性能鲁棒Kalman滤波器, 并称式(32)和式(33)所描述的噪声方差扰动域 $\Omega^m(\Delta Q, \Delta R)$ 或由式(36)给出的参数扰动域 Ω_0^m 为鲁棒域.

证 对任意的 $(\Delta Q, \Delta R) \in \Omega^m$, 由式(4)及 Ψ 的稳定性, 对式(19)应用引理1, 可得 $\Delta P \geq 0$, 即

$$P \geq \bar{P}. \quad (42)$$

对式(42)取矩阵迹运算, 引出

$$0 \leq \text{tr} P - \text{tr} \bar{P}. \quad (43)$$

即精度偏差有下界零. 取 $\Delta Q = 0, \Delta R = 0$, 则 $(0, 0) \in \Omega^m$, 对式(19)应用引理1, 引出 $\Delta P = 0$; 由此引出 $\text{tr} \Delta P = \text{tr} P - \text{tr} \bar{P} = 0$. 因而零为精度偏差的最大下界. 事实上, 用反证法, 假如存在精度偏差的另一个下界 $\mu > 0$, 则对任意的 $(\Delta Q, \Delta R) \in \Omega^m$, 有

$$\text{tr} \Delta P \geq \mu > 0. \quad (44)$$

特别取 $\Delta Q = 0, \Delta R = 0$, 即 $(0, 0) \in \Omega^m$, 则有

$$\mu \leq \text{tr} \Delta P = 0. \quad (45)$$

显然, 式(45)与式(44)相矛盾, 于是零为精度偏差的最大下界.

由式(29)(35)和式(38), 可得

$$\begin{aligned} J(K, \Delta Q^m, \Delta R^m) &= \\ J(K, Q, R) - J(K, \bar{Q}^m, \bar{R}^m) &= \\ \text{tr} P - \text{tr} \bar{P}^m = \text{tr} \Delta P^m = r. \end{aligned} \quad (46)$$

由式(32), 对任意的 $(\Delta Q, \Delta R) \in \Omega^m(\Delta Q, \Delta R)$, 有

$$\Delta Q \leq \Delta Q^m, \quad \Delta R \leq \Delta R^m. \quad (47)$$

由式(16)减去式(34), 并令 $\Delta P^m = P - \bar{P}^m$ 可得

$$\begin{aligned} \Delta P^m &= \Psi \Delta P^m \Psi^T + K \Delta R^m K^T + \\ &[I_n - KH] \Gamma \Delta Q^m \Gamma^T [I_n - KH]^T, \end{aligned} \quad (48)$$

其中: $\Delta R^m = R - \bar{R}^m$, $\Delta Q^m = Q - \bar{Q}^m$, 定义 $\Delta = \Delta P^m - \Delta P$, 由式(48)减去式(19), 可得 Lyapunov 方程

$$\Delta = \Psi \Delta \Psi^T + K(\Delta R^m - \Delta R)K^T + [I_n - KH] \Gamma (\Delta Q^m - \Delta Q) \Gamma^T [I_n - KH]^T. \quad (49)$$

由式(47)(49)及引理1, 可得 $\Delta \geq 0$, 进而对 Δ 取矩阵迹运算有

$$\text{tr} \Delta P \leq \text{tr} \Delta P^m. \quad (50)$$

由式(46)和式(50), 可得

$$J(K, \Delta Q, \Delta R) \leq J(K, \Delta Q^m, \Delta R^m) = r. \quad (51)$$

由式(31)可得式(41)的第2个不等式成立. 取 $\Delta Q = \Delta Q^m$, $\Delta R = \Delta R^m$, 则 $(\Delta Q^m, \Delta R^m) \in \Omega^m$, 进而由式(46)有 $J(K, \Delta Q, \Delta R) = r$. 类似用反证法可证明 r 是精度偏差的最小上界. 证毕.

注4 由式(41)可知, 实际精度 $\text{tr} \bar{P}$ 满足下式:

$$\text{tr} P - r \leq \text{tr} \bar{P} \leq \text{tr} P. \quad (52)$$

较小的 $r > 0$ 意味着 $\text{tr} \bar{P}$ 近似于 $\text{tr} P$; 由式(52)容易证明 $\text{tr} \bar{P}$ 的最小上界为 $\text{tr} P$, 最大下界为 $\text{tr} P - r$. 应强调指出, 式(41)的第1个不等式 $0 \leq \text{tr} P - \text{tr} \bar{P}$, 及零是 $\text{tr} P - \text{tr} \bar{P}$ 的最大下界意味着 $\text{tr} \bar{P} \leq \text{tr} P$, 且 $\text{tr} \bar{P}$ 有最小上界 $\text{tr} P$.

3.2 第2类保性能鲁棒 Kalman 滤波问题(The second class of guaranteed cost robust Kalman filters)

问题2所述保性能鲁棒卡尔曼滤波问题可转化为基于已知预置扰动域的简单线性规划问题来解决.

假定预置不确定噪声方差的有界参数扰动域为由式(36)给出的超立方体, 其中 ε_i^m, e_j^m 为已知的预置的扰动参数上界, 且扰动参数的下界为零. 因此, 由式(33)可得不确定噪声方差扰动 ΔQ^m 及 ΔR^m , 且由式(4)知不确定噪声方差扰动下界为零. 由式(5)(32)–(33)可得相应的预置不确定噪声方差的有界扰动域 Ω^m .

定理2 对于带不确定噪声方差的系统(1), 在假设1–3条件下, 实际 Kalman 滤波器(10)为保性能鲁棒 Kalman 滤波器, 即对于由式(36)给出的预置的不确定噪声方差参数的扰动域 Ω_0^m 内的所有扰动, 相应实际精度 $\text{tr} \bar{P}$ 及鲁棒精度 $\text{tr} P$ 的偏差 $\text{tr} \Delta P = \text{tr} P - \text{tr} \bar{P}$ 有最小上界 r_m 和最大下界零, 即

$$0 \leq \text{tr} P - \text{tr} \bar{P} \leq r_m, \quad (53)$$

其中 r_m 由下式计算:

$$r_m = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i^m c_i + \sum_{j=1}^q e_j^m d_j, \quad (54)$$

其中 c_i 和 d_j 由式(28)定义.

证 由式(29), 可得精度偏差为

$$r = \text{tr} P - \text{tr} \bar{P} = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i c_i + \sum_{j=1}^q e_j d_j, \quad (55)$$

注意 r 是在已知扰动域 Ω_0^m 上 ε_i 和 e_j 的线性函数. 在已知预置的扰动域 Ω_0^m 上, 极大化式(55), 这是简单的线性规划问题. 易知 r 在已知扰动域 Ω_0^m 上的最大值必为扰动域端点 $(\varepsilon_1^m, \dots, \varepsilon_p^m, e_1^m, \dots, e_q^m)$ 处的函数值^[13], 可由式(54)计算得出. 事实上, 对 Ω_0^m 中的任意点 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q)$ 有 $0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_i^m, 0 \leq e_j \leq e_j^m$, 由式(54)减去式(55), 可得

$$r_m - \text{tr} \Delta P = \sum_{i=1}^p c_i (\varepsilon_i^m - \varepsilon_i) + \sum_{j=1}^q d_j (e_j^m - e_j) \geq 0. \quad (56)$$

由此式引出式(53)的第2个不等式. 特别取 $\varepsilon_i = \varepsilon_i^m, e_j = e_j^m$, 即取

$$\Delta Q = \Delta Q^m, \Delta R = \Delta R^m$$

可得 $(\Delta Q^m, \Delta R^m) \in \Omega^m$, 由式(54)–(55), 有 $r = \text{tr} \Delta P = r_m$. 由此用反证法容易证明 r_m 为精度偏差 $\text{tr} P - \text{tr} \bar{P}$ 的最小上界.

对任意的 $(\Delta Q, \Delta R) \in \Omega^m$, 由式(4), 并对式(19)应用引理1引出 $\Delta P \geq 0$, 从而引出式(53)的第1个不等式成立. 取 $\Delta Q = 0, \Delta R = 0$, 对式(19)应用引理1, 引出 $\Delta P = 0$; 从而引出 $\text{tr} \Delta P = 0$. 利用反证法可证零为精度偏差 $\text{tr} P - \text{tr} \bar{P}$ 的最大下界.

注5 应强调指出, 保性能鲁棒 Kalman 滤波问题2是问题1的逆问题. 问题1是预置最大精度偏差 $r > 0$, 求噪声方差最大扰动域, 而问题2是预置噪声方差参数扰动域, 求在该域上的最大精度偏差 r_m ; 因此, 定理2可看成是定理1的逆定理.

4 应用于跟踪系统的仿真例子 (Simulation example applied to tracking system)

例1 考虑典型的服从随机匀加速运动的运动目标(例如, 飞机、导弹、舰船、坦克等)跟踪系统

$$s(t+1) = s(t) + T_0 \dot{s}(t) + \frac{1}{2} T_0^2 \ddot{s}(t), \quad (57)$$

$$\dot{s}(t+1) = \dot{s}(t) + T_0 \ddot{s}(t), \quad (58)$$

$$\ddot{s}(t+1) = \rho \ddot{s}(t) + w(t), \quad (59)$$

$$y_1(t) = s(t) + v_1(t), \quad (60)$$

$$y_2(t) = \dot{s}(t) + v_2(t), \quad (61)$$

其中: T_0 为采样周期, $s(t), \dot{s}(t)$ 和 $\ddot{s}(t)$ 分别为运动目标在采样时刻 tT_0 的位置、速度和加速度, ρ 为标量参数, $y_1(t), y_2(t)$ 分别为传感器对位置和速度的观测信号, $w(t), v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 分别为零均值, 方差各为 Q, σ_{v1}^2 和 σ_{v2}^2 的互不相关白噪声.

引入状态变量 $x(t) = [s(t), \dot{s}(t), \ddot{s}(t)]^T$, 则易知该跟踪系统(57)–(61)有状态空间模型(1), 其中:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T_0 & 0.5T_0^2 \\ 0 & 1 & T_0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (62)$$

$$y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T, v(t) = [v_1(t), v_2(t)]^T,$$

仿真中取

$$T_0 = 1, \rho = 0.9, R = \text{diag}\{0.81, 0.36\}, Q = 4, \\ Q_1 = 1, R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

该模型是跟踪系统的典型的或基本的模型之一, 有重要和广泛的应用背景, 可应用于无人机姿态估计^[14]、GPS定位^[15]、火箭跟踪^[16]及焊缝跟踪^[17-18]等; 然而, 在上述文献^[14-18]应用研究中的局限性是假设模型参数 ρ 和噪声方差 Q 和 R 是精确已知的. 没有考虑带不确定噪声方差的情形. 这种情形由于在系统中存在未建模误差和不确定随机干扰引起, 并且通常是不可避免的. 因而可用本文提出的方法设计两类保性能鲁棒Kalman滤波器来保证跟踪精度, 达到设计要求.

情形 1 预置 $r = 0.2$. 由式(40)得最大扰动参数

$$\varepsilon_1^m = 0.0346, e_1^m = 0.6350, e_2^m = 0.0559. \quad (64)$$

由式(33)可得噪声方差最大扰动为

$$\Delta Q^m = 0.0346, \Delta R^m = \text{diag}\{0.6350, 0.0559\}. \quad (65)$$

经计算相应的估计精度偏差指标满足

$$\text{tr}\Delta P^m = J(K, \Delta Q^m, \Delta R^m) = 0.2. \quad (66)$$

图1表示估计精度偏差 $\text{tr}\Delta P = J(K, \Delta Q, \Delta R)$ 关于扰动域中任意的 $(\Delta Q, \Delta R) \in \Omega^m(\Delta Q, \Delta R)$ 的函数关系, 其中 $\Delta R = \delta\Delta R^m, (0 \leq \delta \leq 1)$, δ 为标量变化参数, 可保证 ΔR 在 $0 \Delta R^m$ 范围内变化.

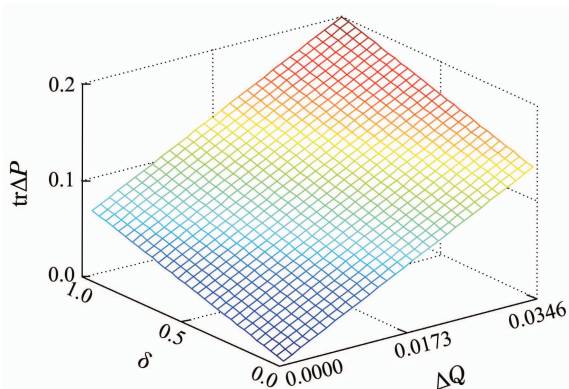


图 1 第1类保性能鲁棒Kalman滤波器精度偏差 $\text{tr}\Delta P$ 随 ΔQ 和 ΔR 的变化($\Delta R = \delta\Delta R^m$)

Fig. 1 The changes of accuracy deviations $\text{tr}\Delta P$ with respect to ΔQ and ΔR for the first class of guaranteed cost robust Kalman filter ($\Delta R = \delta\Delta R^m$)

选取式(64)所构建的鲁棒域 Ω_0^m 中任意的 $\varepsilon_1 = 0.0334 < \varepsilon_1^m$, 及 $\delta = 0.9655$, 即 $e_1 = 0.6131 < e_1^m$, $e_2 = 0.0540 < e_2^m$ 时, 由式(5)可得

$$\Delta Q = 0.0334, \Delta R = \text{diag}\{0.6131, 0.0540\}. \quad (67)$$

经计算相应的估计精度偏差满足

$$\text{tr}\Delta P = J(K, \Delta Q, \Delta R) = 0.1931 < 0.2. \quad (68)$$

取 $\Delta Q = 0, \Delta R = 0$, 可得 $\text{tr}\Delta P = 0$. 图1验证了式(41)的结论: $0 \leq \text{tr}\Delta P \leq 0.2$.

情形 2 预置扰动参数上界 $\varepsilon_1^m = 0.0782, e_1^m = 0.0431, e_2^m = 0.0539$. 由式(36)可求得预置的扰动域. 由式(54)可得在预置扰动域上精度偏差最大值为 $r_m = 0.2190$.

图2给出了第2类问题估计精度偏差 $\text{tr}\Delta P$ 与不确定扰动 $(\Delta Q, \Delta R) \in \Omega^m(\Delta Q, \Delta R)$ 之间的函数关系, 其中 $\Delta R = \delta\Delta R^m, (0 \leq \delta \leq 1)$. 由图2可知当选取预置鲁棒域 Ω_0^m 中任意 $\varepsilon_1 = 0.0701$, 及 $\delta=0.8966$, 即 $e_1 = 0.0386, e_2 = 0.0483$ 时, 相应的精度偏差值为 $\text{tr}\Delta P = 0.1968 < r_m$. 当选取 $\varepsilon_1 = 0, \delta = 0$, 即 $e_1 = 0, e_2 = 0$ 时, 可得估计精度偏差为 $\text{tr}\Delta P = 0$. 由此可见, 对于预置的不确定噪声方差参数扰动域(36)中的所有容许扰动, 相应的实际精度 $\text{tr}\bar{P}$ 与鲁棒精度 $\text{tr}P$ 的偏差, 即 $\text{tr}\Delta P = \text{tr}P - \text{tr}\bar{P}$ 有最小上界 $r_m = 0.2490$ 及最大下界零. 图2验证了式(53)的结论.

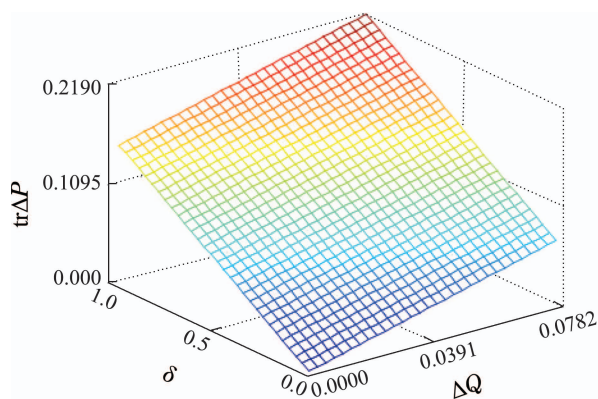


图 2 第2类保性能鲁棒Kalman滤波器精度偏差 $\text{tr}\Delta P$ 随 ΔQ 和 ΔR 的变化($\Delta R = \delta\Delta R^m$)

Fig. 2 The changes of accuracy deviations $\text{tr}\Delta P$ with respect to ΔQ and ΔR for the second class of guaranteed cost robust Kalman filter ($\Delta R = \delta\Delta R^m$)

5 结论(Conclusions)

对带不确定噪声方差线性离散定常系统, 依据极大极小鲁棒估计原理, 基于带不确定噪声方差保守上界的最坏情形系统, 设计最小方差保守Kalman滤波器, 进而设计了保性能鲁棒极大极小Kalman滤波器,

主要贡献如下:

1) 对带不确定噪声方差系统提出了保性能鲁棒性完整的、统一的概念,即确保滤波实际精度关于鲁棒精度的偏差有最小上界和最大下界,且适用于两类保性能鲁棒性.克服了文献[6-7]中鲁棒性仅保证精度偏差有最大下界的局限性,及文献[8]中保性能鲁棒性仅给出精度偏差上界的局限性。

2) 用Lyapunov方程方法提出两类保性能鲁棒Kalman滤波器的设计方法,解决了实际精度偏差最小上界和最大下界的问题.通过引入不确定噪声方差扰动域参数化表示,本文将两类保性能鲁棒Kalman滤波器的设计问题转化为相应的带约束的非线性与线性最优化问题求解。

3) 提出用Lyapunov方程方法证明所设计的滤波器的保性能鲁棒性.它不同于文献[8]的博弈理论证明方法.本文研究成果可推广至带不确定噪声方差的多传感器系统的保性能鲁棒融合Kalman滤波器设计。

参考文献(References):

- [1] ANDERSON B D O, MOORE J B. *Optimal Filtering* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1979.
- [2] LEWIS F L, XIE L H, SOB Y C. *Optimal and Robust Estimation* [M]. Second Edition. New York: CRC Press, 2008.
- [3] ZHU X, SOH Y C, XIE L H. Design and analysis of discrete-time robust Kalman filters [J]. *Automatica*, 2002, 38(6): 1069 – 1077.
- [4] EBIHARA Y, HAGIVARA T. A dilated LMI approach to robust performance analysis of linear time-invariant uncertain systems [J]. *Automatica*, 2005, 41(11): 1933 – 1941.
- [5] DONG Z, YOU Z. Finite-horizon robust Kalman filtering for uncertain discrete time-varying systems with uncertain covariance white noises [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2006, 13(8): 493 – 496.
- [6] QI W J, ZHANG P, DENG Z L. Weighted Fusion Robust Steady-State Kalman filters for Multisensor System with Uncertain Noise Variances [J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 2014, Article ID 369252, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/3629252>.
- [7] QI W J, ZHANG P, DENG Z L. Robust weighted fusion Kalman predictors with uncertain noise variances [J]. *Digital Signal Processing*, 2013, 30(1): 37 – 54.
- [8] XI H SH. The guaranteed estimation performance filter for discrete-time descriptor systems with uncertain noise [J]. *International Journal of Systems Science*, 1997, 28(1): 113 – 121.
- [9] PETERSEN I R, MCFARLANE D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(9): 1971 – 1977.
- [10] QI W J, ZHANG P, DENG Z L. Robust weighted fusion Kalman filters for multisensory time-varying systems with uncertain noise variances [J]. *Signal Processing*, 2014, 99(6): 185 – 200.
- [11] QI W J, ZHANG P, DENG Z L. Robust weighted fusion time-varying Kalman smoothers for multisensory system with uncertain noise variances [J]. *Information Sciences*, 2014, 282: 15 – 37.
- [12] KAILATH T, SAYED A H, HASSIBI B. *Linear Estimate* [M]. New York: Prentice Hall, 2000.
- [13] BOYD S, VANDANBERGHE L. *Convex Optimization* [M]. London: Cambridge University Press, 2004.
- [14] WANG Shaohua, YANG Ying. Quadrotor aircraft attitude estimation and control based on Kalman filter [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(9): 1109 – 1105.
(汪绍华, 杨莹. 基于卡尔曼滤波的四旋翼飞行器姿态估计和控制算法研究 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(9): 1109 – 1105.)
- [15] WANG Xinlong, SHEN Lixun, DING Yangbin. Adaptive system model of the vehicle kinematic positioning based on GPS [J]. *Control and Decision*, 2005, 20(1): 103 – 105.
(王新龙, 申历勋, 丁扬斌. 利用GPS进行车辆动态定位的自适应模型研究 [J]. 控制与决策, 2005, 20(1): 103 – 105.)
- [16] BOLZANI J C, FERREIRA, WALDMANN J. Covariance intersection-based sensor fusion for sounding rocket tracking and impact area prediction [J]. *Control Engineering Practice*, 2007, 15(4): 389 – 409.
- [17] GAO Xiangdong, CHEN Yongping, YUAN Ruonan, et al. Seam-tracking control using a Kalman filter [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(6): 977 – 980.
(高向东, 陈永平, 袁弱男, 等. 卡尔曼滤波焊缝跟踪控制 [J]. 控制理论与应用, 2007, 24(6): 977 – 980.)
- [18] GAO Xiangdong, ZONG Xungao, YOU Deyong, et al. Application of Kalman filter with colored noises to the experiment of seam tracking [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(7): 931 – 935.
(高向东, 仲训昊, 游德勇, 等. 色噪声下卡尔曼滤波焊缝跟踪算法的试验研究 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(7): 931 – 935.)

作者简介:

杨智博 (1983–), 女, 讲师, 博士研究生, 主要从事不确定系统鲁棒Kalman滤波方面的研究, E-mail: dengzili789@163.com;

杨春山 (1975–), 男, 副教授, 博士研究生, 主要从事多传感器信息融合鲁棒Kalman滤波方面的研究, E-mail: limm@sina.com.cn;

邓自立 (1938–), 男, 教授, 主要从事状态估计、多传感器信息融合、鲁棒Kalman滤波等方面的研究, E-mail: dzl@hlj.edu.cn.