第 33 卷第 6 期
2016 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 33 No. 6
Jun. 2016

DOI: 10.7641/CTA.2016.50429

离散时间高阶不确定线性多个体系统保性能一致性分析

徐　君[1†], 张国良[1], 曾　静[2], 汤文俊[1], 黄　鑫[3]

(1. 火箭军工程大学 301教研室, 陕西 西安 710025;

2. 火箭军工程大学 数学教研室, 陕西 西安 710025; 3. 火箭军长沙地区代表室, 湖南 长沙 410205)

摘要: 本文研究了存在参数不确定性的离散时间高阶多个体系统保性能一致性问题, 给出了一种设计其线性一致性协议的方法. 首先, 通过模型转换的方法将该问题转换为一组离散时间不确定系统的稳定性问题; 然后, 构造合适的Lyapunov函数并利用离散时间系统稳定性理论, 推导出一个使离散时间高阶不确定多个体系统获得保性能一致的LMI充分条件; 接着, 以一致性序列的形式给出参数不确定条件下的离散时间高阶多个体系统的一致性收敛结果. 最后, 参数不确定的对比数值仿真验证了本文理论的正确性和有效性.

关键词: 不确定系统; 离散时间; 多个体系统; 一致性; 保性能

中图分类号: TP242　　　**文献标识码**: A

Guaranteed cost consensus analysis of discrete-time high-order uncertain linear multi-agent systems

XU Jun[1†], ZHANG Guo-liang[1], ZENG Jing[2], TANG Wen-jun[1], HUANG Xin[3]

(1. Teaching and Research Office 301, Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi 710025, China;
2. Teaching and Research Office of mathematics, Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi 710025, China;
3. Changsha Area Delegates' Office of Rocket Force, Changsha Hunan 410205, China)

Abstract: A guaranteed cost consensus problem of discrete-time high-order linear multi-agent systems with parameter uncertainties is studied, and a linear consensus protocol of it is designed in this paper. Firstly, the consensus problem is transformed into a stability problem of a group of general discrete-time uncertain linear systems via a model transformation method. Secondly, by constructing a suitable Lyapunov function and using the stability theory of discrete-time linear systems, a sufficient LMI condition is derived to insure that the discrete-time high-order uncertain linear multi-agent systems achieve guaranteed cost consensus. Thirdly, convergence results are given as consensus function sequences of discrete-time high-order linear multi-agent systems with parameter uncertainties. Finally, a contrast numerical experiment with uncertain parameters is provided to demonstrate the correctness and effectiveness of the theoretical results.

Key words: uncertain systems; discrete-time; multi-agent systems; consensus; guaranteed cost

1　引言(Introduction)

由于多个体系统在执行任务效率、容错性、鲁棒性、可重构性和硬件成本等方面都比单个体更具优势. 近年来, 受动物集群现象的启发, 多个体系统协调控制由于其广泛的应用前景受到持续关注, 逐渐成为自动控制、人工智能等多个领域的研究热点[1].

一致性问题作为多个体系统分布式协同控制的一个基础问题, 一经提出就得到广泛研究[2–8]. 它要求通过设计合适的一致性协议, 使得分布式多个体系统的某个或某些感兴趣的变量取得相同的值. 文献[9]提出了连续时间多个体系统的高阶一致性问题, 文献[10]给出了连续时间情况下的高阶多个体系统收敛的一致性函数. 文献[11]给出了固定拓扑高阶离散时间多个体系统一致性收敛的基本条件. 文献[12]分析了变拓扑高阶离散时间多个体系统一致性问题. 文献[13]给出了时延条件下高阶离散时间多个体系统达到一致性的充分条件. 随着研究的深入, 学者发现之前的研究仅考虑了系统的稳定性, 而对系统的性能考虑得不多, 因此最近学者逐渐开始研究多个体系统保性能一致性问题, 文献[14–15]研究了连续时间多个体系统的一阶保性能一致性问题, 文献[16]研究了连续时间多个体系统的二阶保性能一致性问题, 文献[17–18]研

收稿日期: 2015−05−21; 录用日期: 2016−03−29.
†通信作者. E-mail: Junxu1021@126.com ; Tel.: +86 13669208097.
本文责任编委: 武玉强.
国家自然科学基金项目(61374054).
Supported by National Natural Science Foundation of China (61374054).

究了基于领导者情况的连续时间高阶多个体系统的保性能一致性问题. 上述研究现状表明, 很多文献研究了连续时间多个体系统的保性能一致性问题, 但是对于离散时间多个体的保性能一致性问题研究还较少. 然而, 随着计算机技术的发展, 离散控制方式越来越多的在实际工程中得到应用, 同时又因为真实的系统很难建立其精确数学模型, 建立的系统数学模型常常含有一定的不确定性, 基于以上考虑, 本文开展了对离散时间高阶不确定多个体系统保性能一致性问题的研究.

本文将离散时间高阶不确定多个体系统分解成两个子系统, 从而通过模型转换将离散时间不确定多个体系统的一致性问题转换为离散时间不确定系统的稳定性问题. 然后通过Lyapunov方法推导出了一个求解一致性协议反馈矩阵的线性矩阵不等式, 以保证离散时间高阶不确定多个体系统获得保性能一致性, 并通过计算给出了系统的一致性收敛结果. 同时, 为了便于后文阅读, 本文作如下符号说明: 在后文中, $\mathbf{1}_N$ 表示维数为N的元素全为1的列向量, I表示适当维数的单位矩阵, $\otimes$表示Kronecker直积[19], $*$表示对称矩阵的中的相应对称元素.

2 问题描述(Problem formulation)

文献[9]指出高阶多个体系统一致性问题可以转换为一般线性群系统一致性问题, 基于此, 本文研究离散时间高阶不确定多个体系统的一致性问题, 可考虑如下一个由N个个体组成的同构不确定离散线性多个体系统模型:

$$\boldsymbol{x}_i(k+1)=(A+\Delta A)\boldsymbol{x}_i(k)+(B+\Delta B)\boldsymbol{u}_i(k), \quad (1)$$

其中, $i=1,2,\cdots,N$, $\boldsymbol{x}_i(k)\in\mathcal{I}^d$和$\boldsymbol{u}_i(k)\in\mathcal{I}^{d\times q}$分别表示个体$i$的系统状态和控制向量, A和B是适当维数的常数矩阵. ΔA和ΔB是适当维数的不确定矩阵, 并假定它们具有如下形式:

$$[\Delta A\,\Delta B]=DF[E_1\,E_2], \quad (2)$$

其中D, E_1和E_2是适当维数的常数矩阵, 它们反映了离散时间多个体系统(1)中的每一个个体的不确定性结构, F是一个满足

$$F^{\mathrm T}F\leqslant I \quad (3)$$

的未知矩阵, 且可以是时变的. 假定不确定离散线性多个体系统的通信拓扑为无向图G, $\mathcal{A}$为其邻接矩阵, a_{ij}为$\mathcal{A}$中对应元素, L为其Laplacian矩阵. 本文采用如下线性一致性控制协议:

$$\boldsymbol{u}_i(k)=K\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(\boldsymbol{x}_j(k)-\boldsymbol{x}_i(k)). \quad (4)$$

令$\boldsymbol{\delta}_{ij}(k)=\boldsymbol{x}_i(k)-\boldsymbol{x}_j(k)$, 定义一个如下保性能函数:

$$J_{\mathrm c}=J_{\mathrm{C}x}+J_{\mathrm{C}u}, \quad (5)$$

其中:

$$J_{\mathrm{C}x}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\boldsymbol{\delta}_{ij}^{\mathrm T}(k)Q_x\boldsymbol{\delta}_{ij}(k),$$
$$J_{\mathrm{C}u}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{u}_i^{\mathrm T}(k)Q_u\boldsymbol{u}_i(k),$$

其中Q_x和Q_u为给定的对称正定加权矩阵.

定义 1 对于离散时间高阶不确定线性多个体系统(1), 如果存在一个序列$\boldsymbol{c}(k)$和一个正数$J_{\mathrm c}^*$使得$\lim\limits_{k\to\infty}(\boldsymbol{c}(k)-\mathbf{1}_N\otimes\boldsymbol{c}(k))=\mathbf{0}$和$J_{\mathrm c}\leqslant J_{\mathrm c}^*$, 则称不确定多个体系统(1)达到保性能一致性, $\boldsymbol{c}(k)$被称为一致性序列, $J_{\mathrm c}^*$被称为保性能代价.

定义 2 如果存在一个常值矩阵K使得离散时间高阶不确定多个体系统(1)在一致性协议(4)作用下获得保性能一致性, 则称离散时间不确定多个体系统(1)是保性能一致性可镇定的.

注 1 $J_{\mathrm c}$是一个与不确定离散时间多智能体系统(1)参数相关的一个保性能函数, 其中, $J_{\mathrm{C}u}$描述了系统控制输入的能量消耗, $J_{\mathrm{C}x}$描述了一致性协议(4)造成的能量消耗, 保性能一致性的目的就是寻找一个$J_{\mathrm{C}u}$和$J_{\mathrm{C}x}$之间的平衡, 具体就是寻找一个合适的反馈增益矩阵K使得保性能函数$J_{\mathrm c}$存在一个上界$J_{\mathrm c}^*$.

3 保性能一致性协议设计(Guaranteed cost consensus protocols design)

引理 1[20] 用L表示一个无向图G的Laplacian矩阵, 则有零是它的一个特征值, 如果G连通, 则零是L的单一特征值, 并且L的其他所有特征值均为正实数.

令$\lambda_i(i=1,2,\cdots,N)$为Laplacian矩阵$L$的$N$个特征值, 其中$\lambda_1=0$, 其所对应的一个标准特征向量为$\bar{\boldsymbol{u}}_1=1/\sqrt{N}\boldsymbol{1}_N$, 同时其他特征值满足$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_N$, 则存在一个如下正交矩阵:

$$U=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt N} & \dfrac{\boldsymbol{1}_{N-1}^{\mathrm T}}{\sqrt N}\\ \dfrac{\boldsymbol{1}_{N-1}^{\mathrm T}}{\sqrt N} & \bar U\end{bmatrix}$$

满足$U^{\mathrm T}LU=J_{\mathrm L}$, 其中$J_{\mathrm L}$是$L$的约当标准型.

引理 2[21] 令矩阵

$$\tilde L=\begin{bmatrix}l_{22}-l_{12} & \cdots & l_{2N}-l_{1N}\\ \vdots & & \vdots\\ l_{N2}-l_{12} & \cdots & l_{NN}-l_{1N}\end{bmatrix},$$

用$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$和$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{N-1}$分别表示$L$和$\tilde L$的特征值, 并且它们满足$0=|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\cdots|\lambda_N|$, $|\mu_1|\leqslant|\mu_2|\leqslant\cdots|\mu_{N-1}|$, 则可以得到$\lambda_2=\mu_1$, $\lambda_3=\mu_2,\cdots,\lambda_N=\mu_{N-1}$.

将一致性协议(4)代入不确定离散时间多个体系统(1), 得到该系统的闭环系统方程为

$$\boldsymbol{x}_i(k+1)=(A+\Delta A)\boldsymbol{x}_i(k)+ (B+\Delta B)K\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(\boldsymbol{x}_j(k)-\boldsymbol{x}_i(k)). \tag{6}$$

令$\boldsymbol{x}(k)=[\boldsymbol{x}_1^{\rm T}(k)\ \boldsymbol{x}_2^{\rm T}(k)\ \cdots\ \boldsymbol{x}_N^{\rm T}(k)]^{\rm T}$, 则式(6)可写成如下矩阵形式:

$$\boldsymbol{x}(k+1)=I_N\otimes(A+\Delta A)\boldsymbol{x}(k)- L\otimes((B+\Delta B)K)\,\boldsymbol{x}(k). \tag{7}$$

令$\tilde{\boldsymbol{x}}(k)=(U^{\rm T}\otimes I_{\rm d})\boldsymbol{x}(k)=[\tilde{\boldsymbol{x}}_1^{\rm T}(k),\cdots,\tilde{\boldsymbol{x}}_N^{\rm T}(k)]^{\rm T}$, 则闭环多个体系统(7)等价于

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1)=I_N\otimes(A+\Delta A)\tilde{\boldsymbol{x}}(k)- J_{\rm L}\otimes((B+\Delta B)K)\,\tilde{\boldsymbol{x}}(k). \tag{8}$$

根据引理2, 不确定离散时间多个体系统(8)可分解为如下两个子系统:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{\rm c}(k+1)=(A+\Delta A)\tilde{\boldsymbol{x}}_{\rm c}(k), \tag{9}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{r,i}(k+1)= (A+\Delta A-\lambda_{i+1}(B+\Delta B)K)\,\tilde{\boldsymbol{x}}_{r,i}(k), \tag{10}$$

其中: $i=1,\cdots,N-1$, 子系统(9)决定了离散时间高阶不确定多个体系统(1)的一致分量, 具体结果会在后面定理4给出, 子系统(10)决定了不确定离散时间多个体系统的不一致分量, 即离散时间高阶不确定多个体系统(1)能否一致性镇定, 通过离散时间不确定稳定性理论分析, 可以得到如下定理.

定理 1 闭环离散时间多个体系统(7)能够获得一致性的充要条件是离散时间系统(10)渐近稳定.

证 令

$$\boldsymbol{\chi}_i(k)=\boldsymbol{x}_{i+1}(k)-\boldsymbol{x}_1(k),\ i=1,2,\cdots,N-1$$

和

$$\boldsymbol{\chi}(k)=[\boldsymbol{\chi}_1^{\rm T}(k)\ \boldsymbol{\chi}_2^{\rm T}(k)\ \cdots\ \boldsymbol{\chi}_{N-1}^{\rm T}(k)]^{\rm T},$$

则不确定离散时间多个体系统(7)可重新描述如下:

$$\boldsymbol{\chi}(k+1)=I_{N-1}\otimes(A+\Delta A)\boldsymbol{\chi}(k)- \tilde{L}\otimes((B+\Delta B)K)\,\boldsymbol{\chi}(k), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\chi}(k+1)=I_N\otimes(A+\Delta A)\boldsymbol{\chi}(k)- J_{\tilde{L}}\otimes((B+\Delta B)K)\,\boldsymbol{\chi}(k). \tag{12}$$

进而有

$$\boldsymbol{\chi}_i(k+1)=(A+\Delta A)\boldsymbol{\chi}_i(k)- \mu_i(B+\Delta B)K\boldsymbol{\chi}_i(k), \tag{13}$$

其中$i=1,\cdots,N-1$.

根据引理2, 不确定离散时间系统(13)等价于不确定离散时间系统(10).

充分性. 如果离散时间系统(10)即系统(13)是渐进稳定的, 则有$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\chi}(k)=0$, 于是有$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_i(k)-\boldsymbol{x}_1(k)=0$, $(i=2,3,\cdots,N)$ 根据定义1, 不确定离散时间多个体系统(7)的状态获得一致.

必要性. 根据定义1, 如果不确定离散时间多个体系统(7)状态获得一致, 则有$\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_i(k)-\boldsymbol{x}_j(k)\|=0, \forall i,j\in\mathcal{I}$, 因此有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\chi}_i(k)= \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_i(k)-\boldsymbol{x}_1(k)=0,\ i=2,\cdots,N. \tag{14}$$

至此, 定理1得证.

注 2 通过定理, 离散时间不确定闭环多个体系统(7)的保性能一致性问题转换为离散时间系统(13)的保性能二次稳定性问题, 这样就可以利用离散时间线性系统稳定性分析理论来研究离散时间闭环多个体系统(7)的保性能一致性问题.

观察可知, 不确定子系统(13)等价于

$$\boldsymbol{\chi}_i(k+1)=(A+\Delta A)\boldsymbol{\chi}_i(k)+\mu_i(B+\Delta B)\tilde{\boldsymbol{u}}_i(k),\quad i=1,\cdots,N-1, \tag{15}$$

其中$\tilde{\boldsymbol{u}}_i(k)=-K\boldsymbol{\chi}_i(k)$.

对于保性能函数(5), 它等价于

$$J_{{\rm C}x}=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{x}^{\rm T}(k)(2L\otimes Q_x)\boldsymbol{x}(k),$$

$$J_{{\rm C}u}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}^{\rm T}(k)(L^{\rm T}L\otimes K^{\rm T}Q_uK)\boldsymbol{x}(k).$$

又因为

$$\boldsymbol{x}^{\rm T}(k)(J_{\rm L}^{\rm T}J_{\rm L}\otimes K^{\rm T}Q_uK)\boldsymbol{x}(k)= \sum_{i=1}^{N-1}\mu_i^2\boldsymbol{\chi}_i^{\rm T}(k)K^{\rm T}Q_uK\boldsymbol{\chi}_i(k),$$

所以

$$J(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N-1}2\mu_i\boldsymbol{\chi}_i^{\rm T}(k)Q_x\boldsymbol{\chi}_i(k)+ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N-1}\mu_i^2\chi_i^{\rm T}(k)K^{\rm T}Q_uK\boldsymbol{\chi}_i(k),$$

其中$i=1,\cdots,N-1$.

引理 3 对离散不确定系统(1)和性能指标(5), 若存在一个矩阵K和一个正定对称矩阵P使得对所有非零状态$\boldsymbol{\chi}_i(k)$和所有满足式(3)的不确定矩阵F, 有

$$\boldsymbol{\chi}_i^{\rm T}(k)[A-\mu_iBK+DF(E_1-\mu_iE_2K)]^{\rm T}P\cdot [A-\mu_iBK+DF(E_1-\mu_iE_2K)]\boldsymbol{\chi}_i(k)- \boldsymbol{\chi}_i^{\rm T}(k)P\boldsymbol{\chi}_i(k)+ \boldsymbol{\chi}_i^{\rm T}(k)(2\mu_iQ_x+\mu_i^2K^{\rm T}Q_uK)\boldsymbol{\chi}_i(k)<0. \tag{16}$$

则不确定离散多个体系统(1)可一致性镇定, 一致性协议(4)此时为不确定离散多个体系统(1)的一个具

有性能矩阵P的二次保性能控制律, 相应的系统性能上界为$J^* = \boldsymbol{\chi}_i^{\mathrm{T}}(0)P\boldsymbol{\chi}_i(0)$.

证 如果存在正定矩阵P和矩阵K, 对于不确定离散系统(15), 使得对所有允许的不确定性, 矩阵不等式(17)成立, 取控制律$\tilde{\boldsymbol{u}}_i(k) = -K\boldsymbol{\chi}_i(k)$, 则系统(15)所对应的闭环系统为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_i(k+1) = &(A-\mu_iBK)\boldsymbol{\chi}_i(k)+\\ &DF(E_1-\mu_iE_2K)\boldsymbol{\chi}_i(k).\end{aligned} \tag{17}$$

选取Lyapunov函数$V_i(k) = \boldsymbol{\chi}_i^{\mathrm{T}}(k)P\boldsymbol{\chi}_i(k)$, 由矩阵$P$的正定性可推出Lyapunov函数$V_i(k)$是正定的, 沿闭环系统(15)的任意轨线, $V_i(k)$关于时间的导数为

$$\begin{aligned}&\Delta V_i(k) = V_i(k+1) - V_i(k) =\\ &\hat{\boldsymbol{\chi}}_i^{\mathrm{T}}(k)[A-\mu_iBK+DF(E_1-\mu_iE_2K)]^{\mathrm{T}}P*\\ &[A-\mu_iBK+DF(E_1-\mu_iE_2K)]\boldsymbol{\chi}_i(k)-\\ &\boldsymbol{\chi}_i^{\mathrm{T}}(k)P\boldsymbol{\chi}_i(k).\end{aligned}$$

由条件不等式(17)可知, 对系统所有的不确定性, 有

$$\begin{aligned}&\Delta V_i(k) <\\ &-\chi_i^{\mathrm{T}}(k)(2\mu_iQ_x+\mu_i^2K^{\mathrm{T}}Q_uK)\chi_i(k) < 0.\end{aligned} \tag{18}$$

由Lyapunov稳定性性理论, 闭环系统(18)是鲁棒渐进稳定的, 根据定理1可知不确定离散多个体系统(1)在一致性协议(4)作用下达到保性能一致性. 根据定义2, 不确定离散多个体系统(1)可一致镇定.

进一步, 对式(19)两边分别从时刻$k=0$到时刻$k=\infty$求和, 并利用闭环系统的渐进稳定性原理, 可得

$$\begin{aligned}J = &\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N-1}2\mu_i\boldsymbol{\chi}_i^{\mathrm{T}}(k)Q_x\boldsymbol{\chi}_i(k)+\\ &\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N-1}\mu_i^2\boldsymbol{\chi}_i^{\mathrm{T}}(k)K^{\mathrm{T}}Q_uK\boldsymbol{\chi}_i(k) \leqslant\\ &\sum_{i=1}^{N-1}V(\hat{\boldsymbol{\chi}}_i(0)) =\\ &\sum_{i=1}^{N-1}\boldsymbol{\chi}_i^{\mathrm{T}}(0)P\boldsymbol{\chi}_i(0).\end{aligned}$$

因此, $J^* = \sum\limits_{i=1}^{N-1}\boldsymbol{\chi}_i^{\mathrm{T}}(0)P\boldsymbol{\chi}_i(0)$ 是不确定离散多个体系统(7)闭环性能的一个上界, 引理3得证.

当不确定多个体系统(1)的每个子系统稳定时, 取$\boldsymbol{u}_i(k)=0$, 系统状态都最终趋于零, 多个体系统(1)达到状态一致, 此类情况比较简单不在本文的讨论范畴, 当不确定离散多个体系统(1)的子系统不稳定时, 通过寻找合适的矩阵K通过一致性协议(4)使得不确定离散多个体系统(1)可一致性镇定是本论文关注的重点, 因此矩阵A和B必须可镇定, 反馈增益矩阵K才可能有解, 这一点同离散系统稳定性分析是一样的, 因此给出假设1.

假设 1 离散时间不确定多个体系统(1)的系统矩阵A和B可镇定.

另外当不确定多个体系统(1)的通信拓扑不连通时, 根据引理1, 不确定离散时间系统(1)的Laplacian矩阵L至少包含两个零特征值, 观察分解后的子系统(10), 必然会存在一个子系统$\tilde{\boldsymbol{u}}_i(k)=0$的控制量恒成立, 无论如何子系统(10)也无法获得稳定, 因此给出假设2.

假设 2 离散时间不确定多个体系统(1)的通信拓扑连通.

引理 4[22] 设A是任一方阵, 则存在矩阵$P>0$, 使得$A^{\mathrm{T}}PA-P+T<0$当且仅当存在矩阵$X>0$, 使得

$$\begin{bmatrix}-X & AX\\ XA^{\mathrm{T}} & -X+XTX\end{bmatrix} < 0.$$

定理 2 离散时间高阶不确定多个体系统(1)保性能一致可镇定当且仅当存在常数$\varepsilon>0$, 矩阵K和$X>0$时, 使得

$$\begin{bmatrix}\varepsilon DD^{\mathrm{T}}-X & (A-\mu_iBK)X & 0\\ X(A-\mu_iBK)^{\mathrm{T}} & -X+X(2\mu_iQ_x+\mu_i^2K^{\mathrm{T}}Q_uK)X & X(E_1-\mu_iE_2K)^{\mathrm{T}}\\ 0 & (E_1-\mu_iE_2K)X & -\varepsilon I\end{bmatrix} < 0 \tag{19}$$

成立, 其中$i=1,\cdots,N-1$, 即当矩阵不等式(20)有可行解K和$X>0$时, 不确定离散系统(1)具有性能矩阵的一个二次保性能控制律(4).

证 根据引理3, 对于离散时间不确定系统(15)存在一个二次保性能控制律$\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k) = -K\boldsymbol{\chi}_i(k)$, 当且仅当存在矩阵$K$和$X>0$时, 对于所有与允许的不确定矩阵$F$, 矩阵不等式

$$\begin{aligned}&[A-\mu_iBK+DF(E_1-\mu_iE_2K)]^{\mathrm{T}}P\cdot\\ &[A-\mu_iBK+DF(E_1-\mu_iE_2K)]-\\ &P+2\mu_iQ_x+\mu_i^2K^{\mathrm{T}}Q_uK<0\end{aligned} \tag{20}$$

成立, 由引理4, 上式等价于存在矩阵$X>0$, 使得

$$\begin{bmatrix}-X & [A-\mu_iBK+DF(E_1-\mu_i\mathrm{E}_2K)]X\\ X[A-\mu_iBK+DF(E_1-\mu_i\mathrm{E}_2K)]^{\mathrm{T}} & -X+X(2\mu_iQ_x+\mu_i^2K^{\mathrm{T}}Q_uK)X\end{bmatrix} < 0 \tag{21}$$

成立, 其中$i=1,\cdots,N-1$. 定义矩阵

$$Y = \begin{bmatrix}-X & (A-\mu_iBK)X\\ X(A-\mu_iBK)^{\mathrm{T}} & -X+X(2\mu_iQ_x+\mu_i^2K^{\mathrm{T}}Q_uK)X\end{bmatrix}, \tag{22}$$

则式(22)可重新写成

$$Y+\begin{bmatrix}D\\0\end{bmatrix}F[\,0\ \ (E_1-\mu_iE_2K)X\,]+$$
$$[0\ \ (E_1-\mu_iE_2K)X]^{\mathrm T}F^{\mathrm T}\begin{bmatrix}D\\0\end{bmatrix}^{\mathrm T}<0. \tag{23}$$

定义

$$H=\begin{bmatrix}D\\0\end{bmatrix},\ E=[0\ \ (E_1-\mu_iE_2K)X].$$

引理 5[23]　给定适当维数的矩阵Y, D和D, 其中Y是对称的, 则

$$Y+DFE+E^{\mathrm T}F^{\mathrm T}D^{\mathrm T}<0, \tag{24}$$

对所有满足$F^{\mathrm T}F\leqslant I$的矩阵$F$成立, 有

$$Y+\varepsilon DD^{\mathrm T}+\varepsilon^{-1}EE^{\mathrm T}<0. \tag{25}$$

根据引理5, 对所有满足$F^{\mathrm T}F\leqslant I$的矩阵$F$, 矩阵不等式(24)成立当且仅当存在一个常数$\varepsilon>0$, 使得

$$Y+\varepsilon\begin{bmatrix}D\\0\end{bmatrix}[\,D^{\mathrm T}\ \ 0\,]+$$
$$\varepsilon^{-1}\begin{bmatrix}0\\X(E_1-\mu_iE_2K)^{\mathrm T}\end{bmatrix}\cdot$$
$$[0\ \ (E_1-\mu_iE_2K)X]<0, \tag{26}$$

即

$$\begin{bmatrix}\varPsi_1 & \varPsi_2\\ * & \varPsi_3\end{bmatrix}<0,\ i=1,2,\cdots,N-1, \tag{27}$$

其中:

$$\varPsi_1=\varepsilon DD^{\mathrm T}-X,\ \varPsi_2=(A-\mu_iBK)X,$$
$$\varPsi_3=-X+X(2\mu_iQ_x+\mu_i^2K^{\mathrm T}Q_uK)X+$$
$$\varepsilon^{-1}X(E_1-\mu_iE_2K)^{\mathrm T}(E_1-\mu_iE_2K)X.$$

由Schur补性质[24], 进一步得到式(28)等价于矩阵不等式(22), 再根据定理1可知, 不确定离散时间系统(1)在一致性协议(4)下获得保性能一致性. 定理2得证.

定理2给出了一个求解不确定离散时间系统(7)获得一致性的充分条件, 但由于矩阵不等式(28)是一个非线性矩阵不等式. 无法直接求出矩阵K, 进而推导出定理3.

定理 3　离散时间高阶不确定多个体系统(7)存在保性能控制律当且仅当存在常数$\varepsilon>0$, 矩阵K和对称正定矩阵X, 使得

$$\begin{bmatrix}\varepsilon DD^{\mathrm T}-X & AX-\mu_iBW & 0 & 0 & 0\\ (AX-\mu_iBW)^{\mathrm T} & -X & (E_1X-\mu_iE_2W)^{\mathrm T} & X & \mu_i(W)^{\mathrm T}\\ 0 & E_1X-\mu_iE_2W & -\varepsilon I & 0 & 0\\ 0 & X & 0 & -\dfrac{1}{2\mu_i}Q_x{}^{-1} & 0\\ 0 & \mu_iW & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\mu_i^2}Q_u{}^{-1}\end{bmatrix}<0 \tag{28}$$

成立, 其中$i=1,\cdots,N-1$. 进而, 当矩阵不等式(30)有　解W和$X>0$时, $\tilde{\boldsymbol u}_i(k)=-WX^{-1}\boldsymbol\chi_i(k)$是离散时间不确定多个体系统(7)的一个二次保性能控制律, 相应的系统性能指标上界表示为$J_{\mathrm c}^*\leqslant(N-1)\operatorname{tr}(X^{-1})$.

证　由矩阵的Schur补性质, 式(28)等价于

$$\begin{bmatrix}\varepsilon DD^{\mathrm T}-X & AX-\mu_iBKX & 0 & 0 & 0\\ (AX-\mu_iBKX)^{\mathrm T} & -X & (E_1X-\mu_iE_2KX)^{\mathrm T} & X & \mu_i(KX)^{\mathrm T}\\ 0 & E_1X-\mu_iE_2KX & -\varepsilon I & 0 & 0\\ 0 & X & 0 & -\dfrac{1}{2\mu_i}Q_x{}^{-1} & 0\\ 0 & \mu_iKX & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\mu_i^2}Q_u{}^{-1}\end{bmatrix}<0 \tag{29}$$

成立, 其中$i=1,\cdots,N-1$. 因此, 在上式取$W=KX$, 即得到矩阵不等式(29), 定理3得证.

定理 4　如果离散时间高阶不确定多个体系统(7)达到保性能一致性, 则一致性序列$\boldsymbol c(k)$满足

$$\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol c(k)-\boldsymbol 1_N\otimes$$
$$(\frac{1}{N}(A+\Delta A)^k\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol x_i(0)))=0, \tag{30}$$

其中$k=0,1,2,\cdots$.

证　由文中第4部分知

$$\boldsymbol x_{\mathrm c}(k)=(U\otimes I_{\mathrm d})[\tilde{\boldsymbol x}_{\mathrm c}^{\mathrm T}(k)\ \ 0]^{\mathrm T},$$
$$\boldsymbol x_{\mathrm r}(k)=(U\otimes I_{\mathrm d})[0\ \ \tilde{\boldsymbol x}_{\mathrm r}^{\mathrm T}(k)]^{\mathrm T},$$

$\boldsymbol x(k)$可被唯一分解为$\boldsymbol x(k)=\boldsymbol x_{\mathrm c}(k)+\boldsymbol x_{\mathrm r}(k)$, 根据定理1知, 子系统(10)渐近稳定, 不确定离散时间多个体系统(7)获得保性能一致性, 即由$\boldsymbol x_{\mathrm r}(0)$引起的不一致分量$\boldsymbol x_{\mathrm r}(k)$满足$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol x_{\mathrm r}(k)=0$, 因此一致性函数序列$\boldsymbol c(k)$完全由子系统(9)决定, 又因为$[\tilde{\boldsymbol x}_{\mathrm c}^{\mathrm T}(k),0]^{\mathrm T}=\boldsymbol e_1\otimes\tilde{\boldsymbol x}(k)$, 将$\tilde{\boldsymbol x}(0)=(U^{\mathrm T}\otimes I_{\mathrm d})\boldsymbol x(0)$代入

$$x_{\mathrm c}(0)=\bar{\boldsymbol u}_1\otimes\tilde{\boldsymbol x}_1(0)=\bar{\boldsymbol u}_1\otimes((\boldsymbol e_1^{\mathrm T}\otimes I_{\mathrm d})\tilde{\boldsymbol x}(0))$$

得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_{\rm c}(0)=\bar{\boldsymbol{u}}_1\otimes((\boldsymbol{e}_1^{\rm T}\otimes I_{\rm d})*(U^{\rm T}\otimes I_{\rm d})\boldsymbol{x}(0))=\\
&\bar{\boldsymbol{u}}_1\otimes(\boldsymbol{e}_1^{\rm T}U^{\rm T}\otimes I_{\rm d})\boldsymbol{x}(0))=\\
&\bar{\boldsymbol{u}}_1\otimes(\frac{1}{\sqrt{N}}\boldsymbol{1}_N^{\rm T}\otimes I_{\rm d})\boldsymbol{x}(0))=\\
&\boldsymbol{1}_N^{\rm T}\otimes(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i(0)),
\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_{\rm c}(k)=(A+\Delta A)^k\boldsymbol{x}_{\rm c}(0)=\\
&\boldsymbol{1}_N\otimes((A+\Delta A)^k(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i(0))),
\end{aligned}$$

即离散时间高阶不确定多个体系统(1)在一致性协议(4)作用下, 系统状态都渐近收敛于序列$\boldsymbol{1}_N\otimes(\frac{1}{N}(A+\Delta A)^k\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i(0))$, $k=0,1,2,\cdots$, 即式(30)成立, 定理4 的证明完成.

注 3 定理4给出了离散时间高阶不确定多个体系统(1)在一致性协议(4)作用下的一致性序列的表现形式, 说明了一致性序列$\boldsymbol{c}(k)$与系统(1)的初始状态, 通信拓扑和系统属性相关, 同时可以看出此协议给出的系统状态为平均一致性, 在这一点上与连续时间多个体系统是一致的, 具体可参见文献[2]. 另外需要指出的是, 根据第4部分假设$\Delta A=DFE_1$且$F^{\rm T}F\leqslant I$,令

$$m_1=\|\boldsymbol{1}_N\otimes(\frac{1}{N}(A-DE_1)^k\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i(0))\|$$

和

$$m_2=\|\boldsymbol{1}_N\otimes(\frac{1}{N}(A+DE_1)^k\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i(0))\|,$$

因此有$\min\{m_1,m_2\}\leqslant\|c(k)\|\leqslant\max\{m_1,m_2\}$为一致性收敛序列的变化范围. 但对于其他类型的参数不确定性ΔA, 一致性收敛序列变化范围不一定能够获得.

4 仿真算例(Simulation)

设离散时间不确定高阶多个体系统模型(1)具体为如下形式:

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0.2\\ -0.4\\ 1\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}0.1 & 0 & 0\\ 0 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0.3\end{bmatrix},\ E_1=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3 & 0\\ 0.2 & 0.4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$E_2=\begin{bmatrix}0.2\\ 0.1\\ 0.3\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}r_1 & 0 & 0\\ 0 & r_2 & 0\\ 0 & 0 & r_3\end{bmatrix},$$

其中: r_1,r_2和r_3是离散时间不确定性多个体系统(1)的模型参数, 满足$-1\leqslant r_i\leqslant 1,\ i=1,2,3$.

则离散时间不确定多个体系统(1)可以重新写成

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_i(k+1)=\\
&(A+DFE_1)\boldsymbol{x}_i(k)+(B+DFE_2)\boldsymbol{u}_i(k).
\end{aligned}\tag{31}$$

定义保性能代价加权矩阵如下:

$$Q_x=\begin{bmatrix}0.6 & 0 & 0\\ 0 & 0.6 & 0\\ 0 & 0 & 0.7\end{bmatrix},\ Q_u=1.$$

任意选取多个体系统(1)的初始状态为$\boldsymbol{x}_1(0)=[1\ \ 5\ \ -2]^{\rm T}$, $\boldsymbol{x}_2(0)=[2\ \ 4\ \ 3]^{\rm T}$, $\boldsymbol{x}_3(0)=[1\ \ 1\ \ 2]^{\rm T}$, $\boldsymbol{x}_4(0)=[3\ \ 2\ \ 1]^{\rm T}$, $\boldsymbol{x}_5(0)=[5\ \ 6\ \ -2]^{\rm T}$, $\boldsymbol{x}_6(0)=[-3\ \ 3\ \ 4]^{\rm T}$, $\boldsymbol{x}_7(0)=[-2\ \ -4\ \ -3]^{\rm T}$, $\boldsymbol{x}_8(0)=[-5\ \ -2\ \ -1]^{\rm T}$. 设离散时间不确定多个体系统(1)的个体个数$N=8$, 通信拓扑$G$如图1所示.

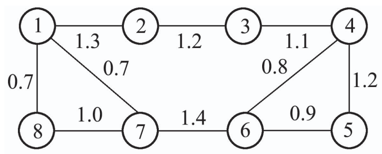
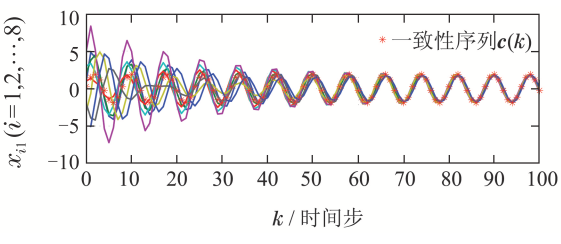


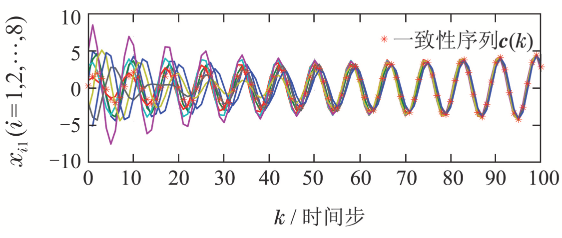
图 1 多个体系统(1)的通信拓扑G

Fig. 1 The interaction topology of G multi-agent system (1)

通过应用定理3, 可以得到$K=[0.0844\ \ -1098\ \ 0.3041]^{\rm T}$, 任意选取满足条件的$r_1=0.35$, $r_1=0.25$和$r_1=0.15$, 利用定理4计算出系统(1)在参数$r_j\ (j=1,2,3)$变化前后的一致性序列$\boldsymbol{c}(k)$, 实验结果如图2–4所示. 图2–4给出了系统(1)参数$r_j\ (j=1,2,3)$变化前后在一致性协议(4)作用下的状态轨迹变化曲线, 图中$*$表示定理4计算出来的一致性序列轨迹, 其他实线表示系统状态的变化轨迹. 图5给出了保性能指标$J_{\rm c}$和$J_{\rm c}^*$的变化轨迹.



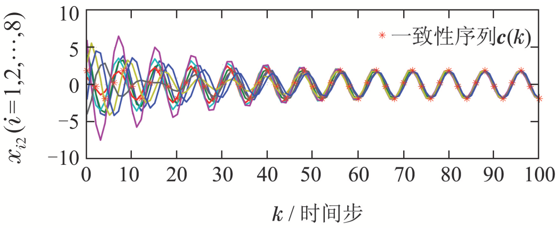
(a) 系统参数变化前的状态轨迹



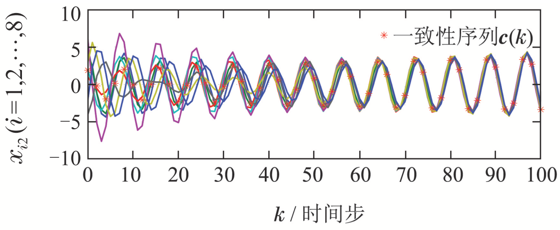
(b) 系统参数变化后的状态轨迹

图 2 状态$\boldsymbol{x}_{i1}$在参数$r_j(j=1,2,3)$变化前后的状态轨迹

Fig. 2 Comparison of state trajectories of $\boldsymbol{x}_{i1}$ before and after parameters $r_j(j=1,2,3)$ change



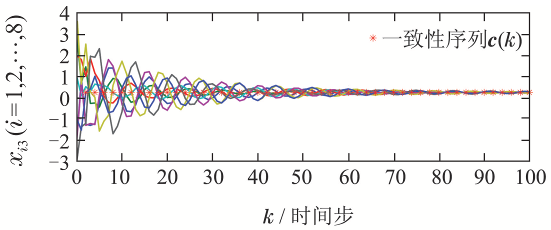
(a) 系统参数变化前的状态轨迹



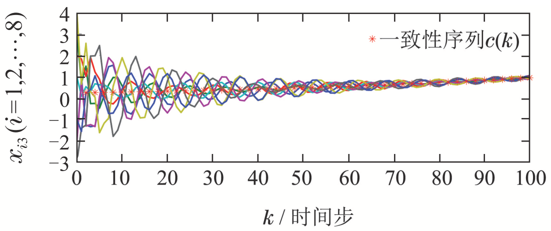
(b) 系统参数变化后的状态轨迹

图 3 状态$\boldsymbol{x}_{i2}$在参数$r_j(j=1,2,3)$变化前后的状态轨迹

Fig. 3 Comparison of state trajectories of $\boldsymbol{x}_{i2}$ before and after parameters $r_j(j=1,2,3)$ change



(a) 系统参数变化前的状态轨迹



(b) 系统参数变化后的状态轨迹

图 4 状态$\boldsymbol{x}_{i3}$在参数$r_j(j=1,2,3)$变化前后的状态轨迹

Fig. 4 Comparison of state trajectories of $\boldsymbol{x}_{i3}$ before and after parameters $r_j(j=1,2,3)$ change

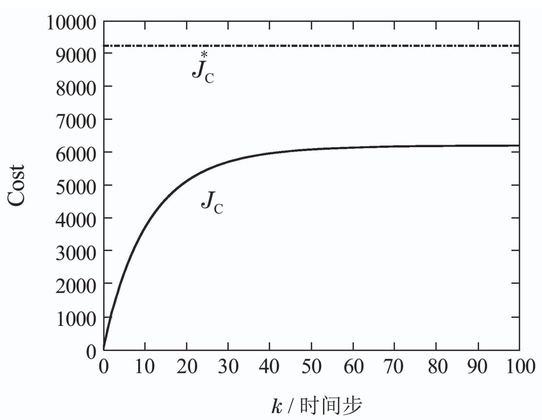


图 5 保性能代价轨迹图

Fig. 5 Trajectories of cost

从图2–4可以看出, 离散时间不确定多个体系统(1)的一致性收敛序列与不确定参数$r_j\ (j=1,2,3)$有关. 当系统的不确定性为零时, 系统的状态收敛于$\boldsymbol{1}_N\otimes(A^k(\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i(0)))$, 当系统包含参数不确定性时, 系统的状态收敛于$\boldsymbol{1}_N\otimes((A+DFE_1)^k(\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i(0)))$, 与定理4计算出的一致性序列$\boldsymbol{c}(k)$相同, 验证定理3和定理4的正确性和有效性. 图5表明$J_{\rm c}<J_{\rm c}^*$在仿真过程中恒成立, 满足定义1保性能一致性要求. 实验充分说明了不确定离散多个体系统(1)在定理3所求得的增益矩阵K下, 受一致性协议(4)作用, 能够获得保性能一致.

5 结语(Conclusions)

本文在无向拓扑针通信条件下, 对离散时间高阶不确定多个体系统参数不确定情况的保性能一致性问题进行了研究, 给出了系统获得保性能一致的一个LMI充分条件和一致性最终收敛结果. 数值仿真验证了本文理论的正确性和有效性需要指出的是, 本文的结论是基于无向通信拓扑情况下推导出来的, 具有一定的局限性, 作者打算下一步对有向图和时延通信条件不理想等情况下的离散时间高阶不确定多个体系统保性能一致性进行分析.

参考文献(References):

[1] PETTERSEN K Y, GRAVDAHL J T. *Group Coordination and Cooperative Control* [M]. Berlin: Springer, 2006.

[2] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.

[3] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multi agent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.

[4] WU Jin, ZHANG Guoliang, ZENG Jing, et al. Multi-robots formation discrete-time modeling and stability analysis of formation control algorithm [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(3): 1 – 9. (吴晋, 张国良, 曾静, 等. 多机器人编队离散模型及队形控制稳定性分析 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(3): 1 – 9.)

[5] SUN Yijie, ZHANG Guoliang, ZHANG Shengxiu, et al. Convergence analysis for consensus protocol of heterogeneous multi-agent systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(11): 1524 – 1529.
(孙一杰, 张国良, 张胜修, 等. 一类异构多智能体系统一致性协议的收敛性分析 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(11): 1524 – 1529.)

[6] HAN G, GUAN Z, CHENG X, et al. Multiconsensus of second order multiagent systems with directed topologies [J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2013, 11(6): 1122 – 1127.

[7] HAN G, GUAN Z, CHEN J, etal. Multi-tracking of first order multiagent networks via self-triggered control [J]. *Asian Journal of Control*, 2015, 17(5): 1 – 10.

[8] HAN G, GUAN Z, LI J, et al. Multi-consensus of multi-agent networks via a rectangular impulsive approach [J]. *Systems and Control Letters*, 2015, 76(2): 28 – 34.

[9] XIAO F, WANG L. Consensus problems for high-dimensional multiagent systems [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2007, 1(3): 830 – 837.

[10] XI J, CAI N, ZHONG Y. Consensus problems for high-order linear time-invariant swarm systems [J]. *Physica A*, 2010, 389(24): 5619 – 5627.

[11] YOU K Y, XIE L H. Network topology and communication data rate for consensusability of discrete-time multi-agent systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(10): 2262 – 2275.

[12] SU Y, HUANG J. Two consensus problems for discrete-time multi-agent systems with switching network topology [J]. *Automatica*, 2012, 48(9): 1988 – 1997.

[13] TAN C, LIU G P. Consensus of discrete-time linear networked multi-agent systems with communication delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(11): 2962 – 2968.

[14] GUAN Z, HU B, CHI M, et al. Guaranteed performance consensus in second-order multi-agent systems with hybrid impulsive control [J]. *Automatica*, 2014, 50(9): 2415 – 2418.

[15] WANG Z, XI J, YAO Z. Guaranteed cost consensus for multi-agent systems with fixed topologies [J]. *Asian Journal of Control*, 2015, 17(2): 729 – 735.

[16] WANG Z, XI J, YAO Z, et al. Guaranteed cost consensus problems for second-order multi-agent systems [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2015, 9(3): 367 – 373.

[17] CHENG Y, UGRINOVSKII V. Guaranteed performance leader-follower control for multiagent systems with linear IQC-constrained coupling [C] //*American Control Conference (ACC)*. Washington: IEEE, 2013: 2625 – 2630.

[18] CHENG Y, UGRINOVSKII V, WEN G. Guaranteed cost tracking for uncertain coupled multi-agent systems using consensus over a directed graph [C] //*Australian Control Conference (AUCC)*. Perth: IEEE, 2013: 375 – 378.

[19] HORN R A, JOHNSON C R. *Opics in Matrix Analysis* [M]. Cambridge, U K: Cambridge University Press, 1991.

[20] FAX J A, MURRAY R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465 – 1476.

[21] GUAN Z H, LIU Z W, FENG G, et al. Impulsive consensus algorithms for second-order multi-agent networks with sampled information [J]. *Automatica*, 2012, 48(7): 1397 – 1404.

[22] YU Li. *Robust Control-LMI Approach* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.
(俞立. 鲁棒控制–线性矩阵不等式处理方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.)

[23] BARMISH B. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1985, 46(4): 399 – 408.

[24] GHAOUI L, FERON E, BALAKRISHNAN V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics Press, 1994.

作者简介:

徐 君 (1986–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为先进控制理论与应用、多机器人协同导航、控制, E-mail: Junxu1021@126.com;

张国良 (1970–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为先进控制理论与应用、机器人, E-mail: zhgl@sohu.com;

曾 静 (1973–), 女, 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为先进控制理论与应用、机器人, E-mail: moulaizj@163.com;

汤文俊 (1986–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为先进控制理论与应用、多机器人和无线传感器网络, E-mail: 13468972665@163.com;

黄 鑫 (1985–), 男, 助理工程师, 目前研究方向为惯性导航和多机器人协同, E-mail: 44647207@qq.com.