

反馈辅助学习算法在Lebesgue-p范数意义下的单调收敛性

毕宏博¹, 孙明轩^{2†}, 陈佳泉¹

(1. 衢州学院 电气与信息工程学院, 浙江 衢州 324000; 2. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023)

摘要: 针对一类线性时不变系统, 讨论存在固定初始偏移时的学习控制问题, 提出带有反馈辅助项的比例微分(proportion differentiation, PD)型学习控制算法, 分析所提算法在Lebesgue-p范数意义下的单调收敛性, 获得对期望轨迹的渐近跟踪结果. 进一步地, 为获得系统输出对期望轨迹的完全跟踪, 给出带有初始修正策略的比例-积分-微分(proportion multiple integration differentiation, PMID)型学习律, 并给出了所提学习算法的单调收敛性能分析结果. 最后, 通过数值结果, 验证了所提学习算法的跟踪性能和单调收敛性能.

关键词: 迭代学习控制; 反馈辅助; 初始修正; Lebesgue-p范数; 单调收敛

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Monotonic convergence of feedback-aided iterative learning control algorithms in the sense of Lebesgue-p norm

BI Hong-bo¹, SUN Ming-xuan^{2†}, CHEN Jia-quan¹

(1. College of Electrical and Information Engineering, Quzhou University, Quzhou Zhejiang 324000, China;

2. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China)

Abstract: Feedback-aided proportion differentiation (PD)-type iterative learning control is proposed for a class of linear time invariant systems in the presence of a fixed initial shift. Based on Lebesgue-p norm, the monotonic convergence analysis result is obtained, and the output trajectory asymptotically convergence to the desired one. Furthermore, a kind of PID-proportion multiple integration differentiation (PMID)-type learning algorithm with initial rectifying strategy is addressed to realize completely tracking result, and the monotonic convergence analysis processes are stated. Finally, numerical results are presented to demonstrate the tracking performance and the monotonic convergence property of the proposed learning algorithms.

Key words: iterative learning control; feedback-aided; initial rectifying; Lebesgue-p norm; monotonic convergence

1 引言(Introduction)

迭代学习控制^[1]策略适用于在有限区间上重复运行的动态系统, 它利用系统第 k 次运行时输出量与期望轨迹的偏差更新控制输入量, 获得新的控制信号, 并应用于系统的第 $k+1$ 次迭代过程. 这一控制方法因设计简单, 并不需要系统准确的数学模型, 仅利用系统较少的先验知识, 即可提高系统的瞬态性能, 并获得有限区间上的完全跟踪效果, 引起人们的普遍关注.

一般地, 学习算法要求各次迭代初态与期望初态一致. 系统具体运行时, 要求期望初态已知. 若系统期望初态未知, 而是允许各次迭代的初态均固定在某一点上的情形时, 众所周知, 单纯的微分(differentiation, D)型学习律不能保证固定初态条件下的收敛性, 而比例微分(proportion differentiation, PD)

型学习律可实现极限输出轨迹渐近收敛于期望轨迹. 为实现对期望轨迹的一致收敛结果, 文[2]引入初始脉冲作用, 理论上可以实现除初始点外的完全跟踪结果, 然而, 这种脉冲修正作用在实际中不可行. 文[3]首先给出了固定初始误差下D型与PD型学习的输出极限轨迹, 获得了系统跟踪误差渐近收敛于零的结果. 文[4-5]提出在学习律中引入初始修正作用, 用以抵消输出误差初始值对系统收敛过程的影响, 并针对相对阶为一或高相对阶系统, 提出相应的学习算法, 并将上述结果推广至离散学习系统.

迭代学习控制算法常采用开环学习或闭环学习这两种典型方式. 开环学习律依照系统正则性构造, 由于其中的更新量均采用上一次系统运行时产生的

收稿日期: 2015-05-29; 录用日期: 2016-04-25.

†通信作者. E-mail: mxsun@zjut.edu.cn.

本文责任编辑: 詹宜巨.

国家自然科学基金项目(61174034, 61374103, 61573320), 浙江工业大学重中之重学科开放研究基金项目(20151011), 衢州学院人才培养科研启动项目(BSYJ201505), 高等学校访问学者教师专业发展项目(FX2013195)资助.

Supported by National Natural Science Fund of China (61174034, 61374103, 61573320), Open Top Disciplined Foundation of Zhejiang University of Technology (20151011), Scientific Research Foundation for Talented Scholars of Quzhou University (BSYJ201505) and Professional Development of Teachers in Higher Education Institutions (FX2013195).

信息,并未采用系统当前次运行所产生的最新信息,故更新不够及时.闭环学习律克服了开环学习律这方面的缺陷,但该学习律往往要求提高增益满足收敛性条件;另一方面,由于更新量中的修正项含当前次迭代运行产生的输出导数信号,而该信号由于因果性的原因无法获得,只能利用其估计值替代,从而影响算法的收敛性能.另外,利用系统当前次运行产生的信息的控制算法还见于开闭环学习律^[6-8].文^[9]提出的反馈辅助PD型学习律是一种具体形式的开闭环学习律,它利用上一次迭代产生的输出导数信号和当前次迭代产生的输出信号,构成控制输入学习律的修正项,以期加快学习过程收敛速度.系统结构见图1.

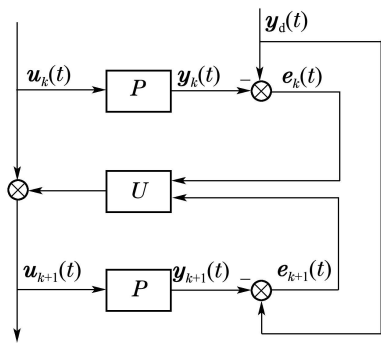


图1 反馈辅助学习控制系统

Fig. 1 Feedback-aided learning control system

现有关于迭代学习策略控制性能的讨论多集中于分析算法的收敛性.具体的收敛性分析过程可基于压缩映射进行分析^[10-11].本文基于压缩映射方法,在Lebesgue-p范数意义下讨论所提学习算法单调收敛性能,并给出相应学习过程的输出极限轨迹.通过数值仿真,验证所提学习算法的有效性.

2 问题的提出(Problem formulation)

考虑下述线性定常系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k(t) = A\mathbf{x}_k(t) + B\mathbf{u}_k(t), \\ \mathbf{y}_k(t) = C\mathbf{x}_k(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $t \in [0, T]$, k 表示系统重复运行的次数, $\mathbf{x}_k(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_k(t) \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{y}_k(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为第 k 次迭代的系统状态、控制输入和输出向量, A, B, C 为具有适当维数的系统参数矩阵.

针对系统(1),提出如下带有反馈辅助作用的PD型迭代学习律:

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \Gamma(\dot{\mathbf{e}}_k(t) + L\mathbf{e}_{k+1}(t)), \quad (2)$$

式中: $\Gamma \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为增益矩阵,且 L 的特征值均具有正实部, $\mathbf{e}_k(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_k(t)$ 为跟踪误差, $\mathbf{y}_d(t)$ 为期望轨迹.

连续系统(1)在给定的时间区间 $[0, T]$ 上重复运

行时,假定运行期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t)$ 和对应的状态 $\mathbf{x}_d(t)$ 连续可微,且各次运行时初始误差保持一致,即 $\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_d(0)$.对于连续系统(1),控制目标是寻找控制输入 $\mathbf{u}_k(t)$ 使得当迭代次数 k 趋于无穷大时,系统输出 $\mathbf{y}_k(t)$ 一致收敛于预先设定的参考轨迹 $\mathbf{y}_d^*(t)$.

为便于讨论算法的收敛性能,给出如下的引理:

引理 1 对于向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 定义 $\|\mathbf{x}\|_p = [\int_0^T (\sum_{i=1}^n |x_i(t)|)^p dt]^{\frac{1}{p}}$. 其中 $1 \leq p \leq \infty$; 对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 定义 $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$, 有下述关系成立:

$$\|A\mathbf{x}\|_p \leq \|A\|_1 \|\mathbf{x}\|_p. \quad (3)$$

证 由Lebesgue-p范数的定义,可得

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x}\|_p &= [\int_0^T (\sum_{i=1}^m |A_i\mathbf{x}|)^p dt]^{\frac{1}{p}} \leq \\ &[\int_0^T (\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j|)^p dt]^{\frac{1}{p}} \leq \\ &(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|) [\int_0^T ((\sum_{j=1}^n |x_j|)^p dt)^{\frac{1}{p}} = \\ &\|A\|_1 \|\mathbf{x}\|_p. \end{aligned}$$

此引理旨在建立向量范数与矩阵范数之间的联系.

引理 2 如果 $\mathbf{x}(t), \mathbf{c}(t)$ 均为 n 维向量, $A, B_i (i = 1, 2, \dots, n), C$ 为具有合适维数的矩阵,且

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \\ \mathbf{c}(t) &+ C \int_0^t e^{A(t-\tau_1)} B_1 \mathbf{x}(\tau_1) d\tau_1 + \\ &C \int_0^t e^{A(t-\tau_1)} B_2 \int_0^{\tau_1} \mathbf{x}(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \\ &C \int_0^t e^{A(t-\tau_1)} B_n \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} \mathbf{x}(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $t \in [0, T]$, 则

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t) + C[0, 0, \dots, 1]x'.$$

这里给出矩阵 x' 的定义.

在式(4)中,记

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \int_0^t e^{A(t-\tau_1)} B_1 \mathbf{x}(\tau_1) d\tau_1 + \\ &\int_0^t e^{A(t-\tau_1)} B_2 \int_0^{\tau_1} \mathbf{x}(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \\ &\int_0^t e^{A(t-\tau_1)} B_n \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} \mathbf{x}(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1. \end{aligned} \quad (5)$$

令

$$\int_0^t \dots \int_0^{\tau_{n-2}} \mathbf{r}(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1} \dots d\tau_1 = \mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{r}(t) = \mathbf{x}'_n.$$

定义矩阵 $x' = (\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_n)^T$.

证 详见附录.

进一步地, 下述推论给出了 $n = 1$ 时的结果.

推论 1 若 $\mathbf{x}(t), \mathbf{c}(t)$ 均为 n 维向量, A, B, C 为具有合适维数的矩阵, 且

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{x}(\tau) d\tau,$$

其中 $t \in [0, T]$, 则

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t) + C \int_0^t e^{(A+BC)(t-\tau)} B \mathbf{c}(\tau) d\tau.$$

这一推论将Bellman-Gronwall引理推广到了矩阵形式.

3 反馈辅助PD型学习律的收敛性分析(Convergence analysis of feedback-aided PD-type learning law)

在控制律(2)的作用下, 假定轨迹

$$\mathbf{y}_d^*(t) = \mathbf{y}_d(t) - e^{-Lt}(\mathbf{y}_d(0) - C\mathbf{x}_0), t \in [0, T] \quad (6)$$

可实现, 即当系统(1)存在固定初始偏差 \mathbf{x}_0 时, 存在控制量 $\mathbf{u}_d^*(t)$ 使得输出为 $\mathbf{y}_d^*(t)$, 且对应的状态为 $\mathbf{x}_d^*(t)$,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_d^*(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t (A\mathbf{x}_d^*(\tau) + B\mathbf{u}_d^*(\tau)) d\tau, \\ \mathbf{y}_d^*(t) = C\mathbf{x}_d^*(t). \end{cases} \quad (7)$$

记 $\mathbf{e}^*(t) = e^{-Lt}(\mathbf{y}_d(0) - C\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{e}_k^*(t) = \mathbf{y}_d^*(t) - \mathbf{y}_k(t)$.

定理 1 若系统(1)存在固定初始偏差, 在控制器(2)的作用下, 且

$$\rho < 1, \quad (8)$$

其中:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2,$$

$$\rho_0 = \|I - CB\Gamma\|_1,$$

$$\rho_1 = \|Ce^{A(\cdot)}AB\Gamma + Ce^{(A-B\Gamma LC)(\cdot)}B\Gamma L(I - CB\Gamma)\|_1,$$

$$\rho_2 = \|Ce^{(A-B\Gamma LC)(\cdot)}B\Gamma L\|_1 \|Ce^{A(\cdot)}AB\Gamma\|_1,$$

则迭代次数 k 趋于无穷时, 误差轨迹 $\mathbf{e}_k^*(t)$ 在时间区间 $[0, T]$ 上单调一致收敛于零.

证 由 $\mathbf{e}_k^*(t)$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1}^*(t) &= \mathbf{y}_d^*(t) - \mathbf{y}_{k+1}(t) = \\ &= \mathbf{y}_d^*(t) - \mathbf{y}_k(t) - (\mathbf{y}_{k+1}(t) - \mathbf{y}_k(t)) = \\ &= \mathbf{e}_k^*(t) - C(\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)) = \\ &= \mathbf{e}_k^*(t) - Ce^{At}(\mathbf{x}_{k+1}(0) - \mathbf{x}_k(0)) - \\ &= C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B(\mathbf{u}_{k+1}(\tau) - \mathbf{u}_k(\tau)) d\tau = \\ &= \mathbf{e}_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma(\dot{\mathbf{e}}_k(\tau) + \\ &= Le_{k+1}(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

因为 $\dot{\mathbf{e}}_k^*(t) + Le_{k+1}^*(t) = \dot{\mathbf{e}}_k(t) + Le_{k+1}(t)$, 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1}^*(t) &= \\ \mathbf{e}_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma(\dot{\mathbf{e}}_k^*(\tau) + Le_{k+1}^*(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

利用分部积分法, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1}^*(t) &= \\ (I - CB\Gamma)\mathbf{e}_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} AB\Gamma\mathbf{e}_k^*(\tau) d\tau - \\ C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma Le_{k+1}^*(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

根据引理2, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1}^*(t) &= \\ (I - CB\Gamma)\mathbf{e}_k^*(t) - C \int_0^t (e^{A(t-\tau)} AB\Gamma + \\ e^{(A-B\Gamma LC)(t-\tau)} B\Gamma L(I - CB\Gamma))\mathbf{e}_k^*(\tau) d\tau + \\ C \int_0^t e^{(A-B\Gamma LC)(t-\tau)} B\Gamma LC \cdot \\ \int_0^\tau e^{A(\tau-\tau_1)} AB\Gamma\mathbf{e}_k^*(\tau_1) d\tau_1 d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

根据引理1和推广的卷积Young不等式, 可得如下结果:

$$\|\mathbf{e}_{k+1}^*(t)\|_p \leq \rho \|\mathbf{e}_k^*(t)\|_p.$$

又由式(8), 可得下式:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_k^*(t)\|_p = 0.$$

这表明系统在控制律(2)的作用下, 当迭代次数 k 趋于无穷大时, 系统输出在Lebesgue-p范数意义下渐近收敛于期望轨迹. 反馈辅助PD型学习律产生的极限轨迹与开环学习律产生的轨迹相同, 但由于反馈辅助项的引入, 可加快算法的收敛速度, 同时回避了闭环控制律的非因果问题.

4 反馈辅助PID型学习律的收敛性分析(Convergence analysis of feedback-aided PID-type learning law)

为实现系统输出在预先指定的时间区间上对期望轨迹的完全跟踪, 本小节给出带有初始修正作用的反馈辅助PID型学习律, 并给出了在此学习律的作用下的极限轨迹.

设计如下的反馈辅助PID型学习律:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1}(t) &= \\ \mathbf{u}_k(t) + \Gamma(\dot{\mathbf{e}}_k(t) + L_1\mathbf{e}_{k+1}(t) + \\ L_2 \int_0^t \mathbf{e}_{k+1}(\tau) d\tau + \mathbf{r}(t)), \end{aligned} \quad (13)$$

其中: $\Gamma(\cdot, \cdot) \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为系统的增益矩阵, 且 L_1, L_2 的特征值均具有正实部.

定理 2 若系统(1)存在固定初始偏差, 在控制

器(13)作用下,且满足如下条件:

C1)

$$\begin{aligned} & \|I - CBF\|_1 + \|C\phi_{22}B\Gamma L_1\|_1 \|Ce^{A(\cdot)}AB\Gamma\|_1 + \\ & \|Ce^{A(\cdot)}AB\Gamma\|_1 + \|C\phi_{22}B\Gamma L_1(I - CBF)\|_1 + \\ & T\|C\phi_{22}B\Gamma L_2\|_1 \|I - CBF\|_1 + \\ & T\|C\phi_{22}B\Gamma L_2\|_1 \|Ce^{A(\cdot)}AB\Gamma\|_1 < 1, \end{aligned}$$

其中:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B\Gamma L_2 C & A + B\Gamma L_1 C \end{pmatrix},$$

$$e^{A'(t-\tau)} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}.$$

C2) 初始状态 $x_k(0) = x_0 \neq x_d(0) (k=0, 1, \dots)$, 则系统的极限轨迹

$$y_d^*(t) = \begin{cases} y_d(t) - \sum_{k=0}^2 \frac{e^{(k)}(0)}{k!} t^k - \sum_{j=0}^2 \left(\sum_{l=0}^2 \frac{a_{jl} e^{(l)}(0)}{h^{j-l+2}} \right) t^{j+2}, & 0 \leq t \leq h, \\ y_d(t), & h < t \leq T. \end{cases}$$

证 由 $e_k^*(t)$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned} e_{k+1}^*(t) &= y_d^*(t) - y_{k+1}(t) = \\ e_k^*(t) &- C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma(\dot{e}_k^*(\tau) + \\ & L_1 e_{k+1}^*(\tau) + L_2 \int_0^\tau e_{k+1}^*(\tau_1) d\tau_1) d\tau, \end{aligned} \quad (14)$$

其中初始修正项 $r(t)$ 满足

$$\dot{e}^*(t) + L_1 e^*(t) + L_2 \int_0^t e^*(\tau) d\tau + r(t) = 0,$$

即

$$r(t) = -\dot{e}^*(t) - L_1 e^*(t) - L_2 \int_0^t e^*(\tau) d\tau.$$

选取 $e^*(t)$ 如下:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} e^{(k)}(0) t^k + \\ & \sum_{j=0}^2 \left(\sum_{l=0}^2 \frac{a_{jl}}{h^{j-l+2}} e^{(l)}(0) \right) t^{j+2}, \\ \dot{e}^*(t) &= \sum_{k=0}^1 \frac{e^{(k+1)}(0)}{k!} t^k + \\ & \sum_{j=0}^2 (j+2) \left(\sum_{l=0}^2 \frac{a_{jl} e^{(l)}(0)}{h^{j-l+2}} \right) t^{j+1}, \\ \int_0^t e^*(\tau) d\tau &= \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k!} e^{(k-1)}(0) t^k + \\ & \sum_{j=0}^2 \frac{1}{j+3} \left(\sum_{l=0}^2 \frac{a_{jl}}{h^{j-l+2}} e^{(l)}(0) \right) t^{j+3}. \end{aligned}$$

令 $e^*(h), \dot{e}^*(h)$ 和 $\int_0^h e^*(\tau) d\tau = 0$, 可得各参数 a_{jl} 值,

进一步可得误差 $e^*(t) = 0, \dot{e}^*(t) = 0$.

式(14)可整理得

$$\begin{aligned} & -C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma \dot{e}_k^*(\tau) d\tau = \\ & -CB\Gamma e_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} AB\Gamma e_k^*(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

可将式(14)改写如下:

$$\begin{aligned} e_{k+1}^*(t) &= \\ & (I - CBF) e_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} AB\Gamma e_k^*(\tau) d\tau - \\ & C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma L_1 e_{k+1}^*(\tau) d\tau - \\ & C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma L_2 \int_0^\tau e_{k+1}^*(\tau_1) d\tau_1 d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

记 $B'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B\Gamma L_1 c(t) + B\Gamma L_2 \int_0^t c(\tau) d\tau \end{pmatrix}$, 并由

引理2, 可得

$$\begin{aligned} e_{k+1}^*(t) &= \\ & (I - CBF) e_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} AB\Gamma e_k^*(\tau) d\tau - \\ & C[0, 1] \int_0^t e^{A'(t-\tau)} B'(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

则

$$\begin{aligned} e_{k+1}^*(t) &= \\ & (I - CBF) e_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} AB\Gamma e_k^*(\tau) d\tau - \\ & C \int_0^t \phi_{22} (B\Gamma L_1 c(\tau) + B\Gamma L_2 \int_0^\tau c(s) ds) d\tau = \\ & (I - CBF) e_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} AB\Gamma e_k^*(\tau) d\tau - \\ & C \int_0^t \phi_{22} B\Gamma L_1 ((I - CBF) e_k^*(\tau) - \\ & C \int_0^\tau e^{A(\tau-l)} AB\Gamma e_k^*(l) dl) d\tau - \\ & C \int_0^t \phi_{22} B\Gamma L_2 \int_0^\tau ((I - CBF) e_k^*(s) - \\ & C \int_0^s e^{A(s-m)} AB\Gamma e_k^*(m) dm) ds d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

在式(17)两端取 $\|\cdot\|_p$,

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}^*(t)\|_p &\leq \\ & (\|I - CBF\|_1 + \|Ce^{A(\cdot)}AB\Gamma\|_1 + \\ & \|C\phi_{22}B\Gamma L_1(I - CBF)\|_1 + \\ & \|C\phi_{22}B\Gamma L_1\|_1 \|Ce^{A(\cdot)}AB\Gamma\|_1 + \\ & T\|C\phi_{22}B\Gamma L_2\|_1 \|I - CBF\|_1 + \\ & T\|C\phi_{22}B\Gamma L_2\|_1 \|Ce^{A(\cdot)}AB\Gamma\|_1) \|e_k^*(t)\|_p. \end{aligned} \quad (18)$$

由条件C1), 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k^*(t) = 0. \quad (19)$$

证毕.

这表明系统在带有初始修正策略的控制律 (13) 的作用下, 当迭代次数 k 趋于无穷大时, 在 Lebesgue-p 范数意义下, 系统输出可在预先给定的有限时间上实现对期望轨迹的完全跟踪.

更一般地, 本节给出带有初始修正作用的 FAP-MID 型学习律 (feedback-aided proportional multiple integral derivative-type learning law), 并给出系统在此学习律作用下的极限轨迹.

设计 FAPMID 学习律如下:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma(\dot{e}_k(t) + L_1 e_{k+1}(t) + L_2 \int_0^t e_{k+1}(\tau) d\tau + \dots + L_{n+1} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} e_{k+1}(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1 + r(t)). \quad (20)$$

定理 3 若系统(1)存在固定初始偏差, 在控制器(20)的作用下, 且满足如下条件:

C1)

$$(1 + \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} T^i \|C\phi_{n+1, n+1} B\Gamma L_{i+1}\|_1) \cdot (\|I - CB\Gamma\|_1 + \|Ce^{A(\cdot)} AB\Gamma\|_1) < 1,$$

其中, 记

$$A'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B\Gamma L_{n+1} C & B\Gamma L_n C & B\Gamma L_{n-1} C & \dots & A + B\Gamma L_1 C \end{pmatrix},$$

$$e^{A'(t-\tau)} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n+1,1} & \phi_{n+1,2} & \dots & \phi_{n+1, n+1} \end{pmatrix}.$$

C2) 系统初态 $x_k(0) = x_0 \neq x_d(0) (k=0, 1, \dots)$, 则系统的极限轨迹为

$$y_d^*(t) = \begin{cases} y_d(t) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} e^{(k)}(0) t^k - \sum_{j=0}^{n+1} \left(\sum_{l=0}^{n+1} \frac{a_{jl}}{h^{j-l+n+1}} e^{(l)}(0) \right) t^{j+n+1}, & 0 \leq t \leq h, \\ y_d(t), & h < t \leq T. \end{cases}$$

证 由 $e_k^*(t)$ 的定义, 可得

$$e_{k+1}^*(t) = y_d^*(t) - y_{k+1}(t) = e_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma(\dot{e}_k(\tau) + L_1 e_{k+1}(\tau) + \dots + L_{n+1} \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} e_{k+1}(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1 + r(t)) =$$

$$e_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Gamma(\dot{e}_k^*(\tau) + L_1 e_{k+1}^*(\tau) + \dots + L_{n+1} \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} e_{k+1}^*(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1 d\tau), \quad (21)$$

其中初始修正项 $r(t)$ 可使得

$$\dot{e}^*(t) + L_1 e^*(t) + L_2 \int_0^t e^*(\tau) d\tau + \dots + L_{n+1} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} e^*(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1 + r(t) = 0,$$

则

$$r(t) = -\dot{e}^*(t) - L_1 e^*(t) - L_2 \int_0^t e^*(\tau) d\tau - \dots - L_{n+1} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} e^*(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1.$$

$e^*(t)$ 可表示为

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} e^{(k)}(0) t^k + \sum_{j=0}^{n+1} \left(\sum_{l=0}^{n+1} \frac{a_{jl}}{h^{j-l+n+1}} e^{(l)}(0) \right) t^{j+n+1},$$

则

$$\dot{e}^*(t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} e^{(k+1)}(0) t^k + \sum_{j=0}^{n+1} (j+n+1) \left(\sum_{l=0}^{n+1} \frac{a_{jl}}{h^{j-l+n+1}} e^{(l)}(0) \right) t^{j+n},$$

且

$$\int_0^t e^*(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k!} e^{(k-1)}(0) t^k + \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j+n+2} \left(\sum_{l=0}^{n+1} \frac{a_{jl}}{h^{j-l+n+1}} e^{(l)}(0) \right) t^{j+n+2}.$$

进一步地,

$$\int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{i-1}} e^*(\tau_i) d\tau_i \dots d\tau_1 = \sum_{k=1}^{n+i+1} \frac{1}{k!} e^{(k-i)}(0) t^k + \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{\prod_{m=1}^i (j+n+1+m)} \left(\sum_{l=0}^{n+1} \frac{a_{jl}}{h^{j-l+n+1}} e^{(l)}(0) \right) t^{j+n+i+1},$$

其中 $i \in \{2, 3, \dots, n\}$.

令

$$\dot{e}^*(h) = 0, e^*(h) = 0, \int_0^h e^*(\tau) d\tau = 0, \dots, \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} e^*(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1 = 0,$$

可得系数 a_{jl} 的值, 若参数如此取值, 则在有限区间 $t \in [h, T]$ 上, $e^*(t) = 0$.

在式(21)中,由分部积分法可得

$$-C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \Gamma \dot{e}_k^*(\tau) d\tau = -CB \Gamma e_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} A B \Gamma e_k^*(\tau) d\tau,$$

改写式(21)如下:

$$e_{k+1}^*(t) =$$

记

$$B'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ B \Gamma L_1 c(t) + \dots + B \Gamma L_{n+1} \int_0^t \dots \int_0^{\tau_{n-1}} c(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1 \end{pmatrix}.$$

进一步地

$$e_{k+1}^*(t) = (I - CB \Gamma) e_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} A B \Gamma e_k^*(\tau) d\tau - C[0, 0, \dots, 1] \int_0^t e^{A'(t-\tau)} B'(\tau) d\tau = c(t) - C \int_0^t \phi_{n+1, n+1}(B \Gamma L_1 c(\tau) + \dots + B \Gamma L_{n+1} \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} c(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1) d\tau,$$

其中

$$c(t) = (I - CB \Gamma) e_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} A B \Gamma e_k^*(\tau) d\tau.$$

在上式两端取 $\|\cdot\|_p$,

$$\|e_{k+1}^*(t)\|_p \leq (1 + \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} T^i \|C \phi_{n+1, n+1} B \Gamma L_{i+1}\|_1) \cdot (\|I - CB \Gamma\|_1 + \|C e^{A(\cdot)} A B \Gamma\|_1) \|e_k^*(t)\|_p.$$

由条件C1),可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k^*(t) = 0.$$

证毕.

这表明系统在更一般形式的学习律(20)的作用下,当迭代次数 k 趋于无穷大时,在Lebesgue-p范数意义下,系统输出亦可在预先给定的有限时间上实现对期望轨迹的完全跟踪.

5 数值结果(Numerical results)

这一节完成数值算例,以说明本文所提学习算法的有效性.考虑系统(1),其中:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1].$$

$$(I - CB \Gamma) e_k^*(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} A B \Gamma e_k^*(\tau) d\tau - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \Gamma L_1 e_{k+1}^*(\tau) d\tau - \dots - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \Gamma L_{n+1} \cdot \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} e_{k+1}^*(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1 d\tau. \quad (22)$$

给定期望轨迹为

$$y_d(t) = 0.4t^2(2.5 - 0.5t), \quad 0 \leq t \leq 5,$$

且设置初始状态 $x_k(0) = [0.5, 0.5]^T$.

首先考虑文中所提出的反馈辅助PD型学习律.置 $\Gamma = 1, L = 5$; 对于带有初始修正策略的反馈辅助PID型学习律,置 $\Gamma = 1, L_1 = 6, L_2 = 1$, 截止时间为 $h = 0.2$. 数值结果如图2-5所示. 其中: y_k 为系统第 k 次运行时的输出量, y_d 为系统的期望输出量. 跟踪性能指标定义为系统第 k 次运行时跟踪误差的 L_∞ 范数: $J_k = \|e_k(t)\|_\infty$.

由图2和图3可以看出,反馈辅助PD型学习律可使得系统的输出轨迹渐近收敛于期望轨迹,但不能实现完全跟踪.在图4和图5中可以看出,当迭代次数 $k = 20$ 时,带有初始修正策略的反馈辅助PID型学习律可使得跟踪误差在指定时刻收敛于零,即采用本文所提的初始修正学习算法可使得系统的输出轨迹在预先指定的时刻收敛于期望轨迹.

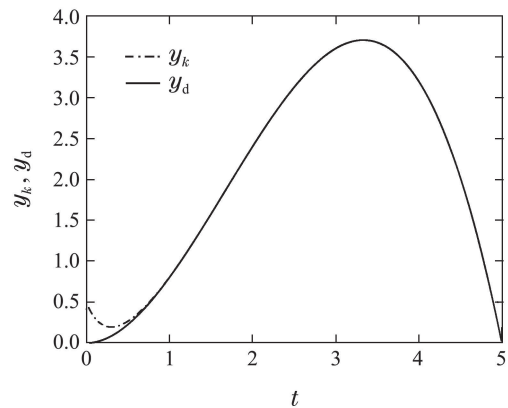


图2 $k = 20$ 时, FAPD型学习控制下的跟踪性能
Fig. 2 Tracking performance by FAPD learning law in the cycle $k = 20$

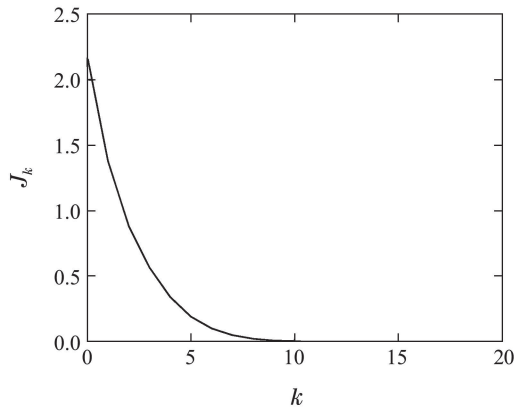


图 3 FAPD型学习控制下的 J_k 值
Fig. 3 J_k by FAPD learning law

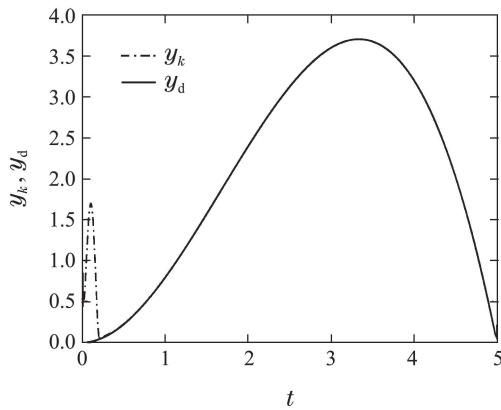


图 4 $k = 20$ 时, 带初始修正作用的FAPID型学习控制下的跟踪性能

Fig. 4 Tracking performance by FAPID learning law with initial rectifying action in the cycle $k = 20$

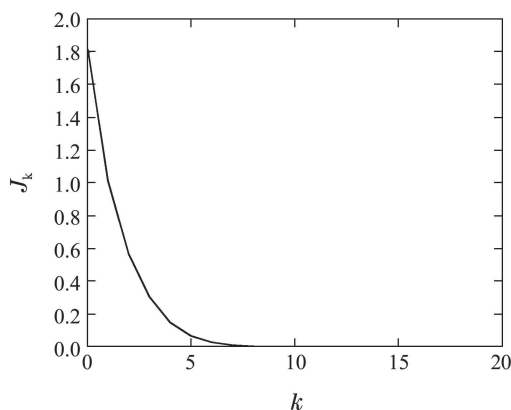


图 5 带初始修正作用的FAPID型学习控制下的 J_k 值

Fig. 5 J_k by FAPID learning law with initial rectifying action

6 结论(Conclusions)

本文讨论线性定常系统存在固定初始偏移时的迭代学习控制问题. 提出反馈辅助PD型学习控制算法, 在Lebesgue-p范数意义下, 可实现跟踪误差渐近收敛于零. 为了实现系统输出在有限区间上对期望

轨迹的完全跟踪, 提出了基于初始修正策略的迭代学习控制器, 文中给出了相应的极限轨迹和收敛条件. 数值结果验证了所提算法的有效性.

参考文献(References):

- [1] ARIMOTO S. Learning control theory for robotic motion [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1990, 4(6): 543 – 564.
- [2] PORTER B, MOHAMED S S. Iterative learning control of partially irregular multivariable plants with initial impulsive action [J]. *International Journal of Systems Science*, 1991, 22(3): 447 – 454.
- [3] LEE H S, BIEN Z. Study on robustness of iterative learning control with non-zero initial error [J]. *International Journal of Control*, 1996, 64(3): 345 – 359.
- [4] SUN Mingxuan, HUANG Baojian. *Iterative Learning Control* [M], Beijing: National Defense Industry Press, 1999. (孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.)
- [5] SUN M X, WANG D W. Iterative learning control with initial rectifying action [J]. *Automatica*, 2002, 38(7), 1177 – 1182.
- [6] PI Daoying, SUN Youxian. The convergence of iterative learning control with open-closed-loop P-type scheme for nonlinear time-varying systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(3): 351 – 354. (皮道映, 孙优贤. 非线性时变系统开闭环P型迭代学习控制的收敛性 [J]. 自动化学报, 1999, 25(3): 351 – 354.)
- [7] RUAN Xiaoe, LIAN Jianbang, WU Huizhuo. Convergence of iterative learning control with feedback information in the sense of Lebesgue-p norm [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(4): 513 – 516. (阮小娥, 连建帮, 吴慧卓. 具有反馈信息的迭代学习控制律在Lebesgue-p范数意义下的收敛性 [J]. 自动化学报, 2011, 37(4): 513 – 516.)
- [8] ZHAO Zhou, GAO Ying, LIU Zhili. Novel open-closed-loop iterative learning control in networked control systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(10): 1335 – 1341. (赵众, 高颖, 刘志立. 网络控制系统中一种新形式的开闭环迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(10): 1335 – 1341.)
- [9] SUN Mingxuan, BI Hongbo, ZHOU Guoliang, et al. Feedback-aided PD-type Iterative learning control: Initial Condition Problem and Rectifying Strategies [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(1): 157 – 164. (孙明轩, 毕宏博, 周国良, 等. 反馈辅助PD型迭代学习控制: 初值问题及修正策略 [J]. 自动化学报, 2015, 41(1): 157 – 164.)
- [10] PANG Bo, SHAO Cheng. High-order parameter-optimization iterative learning control algorithm [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(4): 561 – 567. (逢勃, 邵诚. 高阶参数优化迭代学习控制算法 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(4): 561 – 567.)
- [11] LI X F, XU J X. Lifted system framework for learning control with different trial lengths [J]. *International Journal of Automation and Computing*, 2015, 12(3): 273 – 280.

附录(Appendix)

这里给出引理2的证明过程.

证 式(5)左右两端求导, 可得

$$\dot{r}(t) = (A + B_1 C)r(t) + B_1 c(t) + B_2 \int_0^t c(\tau_1) d\tau_1 +$$

$$B_2 C \int_0^t \mathbf{r}(\tau_1) d\tau_1 + \cdots +$$

$$B_n \int_0^t \cdots \int_0^{\tau_{n-2}} \mathbf{c}(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1} \cdots d\tau_1 +$$

$$B_n C \int_0^t \cdots \int_0^{\tau_{n-2}} \mathbf{r}(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1} \cdots d\tau_1.$$

可记

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ B_n C & B_{n-1} C & B_{n-2} C & \cdots & A + B_1 C \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ B_1 \mathbf{c}(t) + \cdots + B_n \int_0^t \cdots \int_0^{\tau_{n-2}} \mathbf{c}(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1} \cdots d\tau_1 \end{pmatrix}.$$

由 x' 的定义, 可得

$$\dot{x}' = A' x' + B'(t),$$

这意味着

$$x' = \int_0^t e^{A'(t-\tau)} B'(\tau) d\tau,$$

且根据 x' 的定义式

$$\mathbf{r}(t) = [0, 0, \cdots, 1] x'$$

可得

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t) + C[0, 0, \cdots, 1] x'.$$

证毕.

作者简介:

毕宏博 (1984-), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为迭代学习控制,
E-mail: bihbo001@163.com;

孙明轩 (1961-), 男, 教授, 目前研究方向为迭代学习控制,
E-mail: mxsun@zjut.edu.cn;

陈佳泉 (1973-), 男, 讲师, 目前研究方向为迭代学习控制, E-mail: twinschen99@163.com.