

采用有限时间平均一致性协议的电力系统分布式状态估计

蔡永智, 陈皓勇[†], 郭曼兰

(华南理工大学 电力学院, 广东 广州 510640)

摘要: 随着基于相量量测单元的广域量测系统在技术上的成熟与推广应用, 利用WAMS量测可实现电力系统线性状态估计. 本文基于广域量测系统提出一种全分布式状态估计算法. 首先根据拉格朗日乘子法推导了多区域约束加权最小二乘估计模型, 然后引入有限时间平均一致性协议, 得到系统量测正常情况下的分布式状态估计算法. 考虑了系统量测存在异常数据情况, 根据最小二乘估计的几何意义扩展推导出修正算法, 使其在各区域剔除异常量测后, 无需改变信息矩阵, 只需执行若干次有限时间平均一致性协议能收敛至信息矩阵修正后的集中式估计值. 最后, 理论分析和实验结果证明了算法的有效性.

关键词: 互联电力系统; 多区域; 全分布式; 有限时间平均一致性协议; 加权最小二乘

中图分类号: TM73

文献标识码: A

Distributed power system state estimation using finite-time average consensus protocol

CAI Yong-zhi, CHEN Hao-yong[†], GUO Man-lan

(School of Electric Power, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: With the wide-area measurement system based on phasor measurement unit in the maturity of the technology and application, using WAMS measurements can realize the linear power system state estimation. In this paper, we propose a fully-distributed state estimation algorithm based on WAMS. First, the multi-area constrained weighted least squares estimation model is established by Lagrange Multiplier Method. Then, by introducing the finite-time average consensus protocol into the multi-area constrained weighted least squares estimation model, the distributed state estimation algorithm without abnormal measurements is presented. Moreover, by considering the presence of abnormal measurements, we deduce a modified algorithm according to the geometric meaning of the least squares estimate. After eliminating abnormal measurements in each sub-region, the modified algorithm can converge to the centralized estimate without changing the information matrix, by executing the finite-time average consensus protocol several times. Finally, theoretical analysis and experimental results prove the effectiveness of the algorithm.

Key words: interconnected power system; multi-area; fully-distributed; finite-time average consensus protocol; weighed least square

1 引言(Introduction)

电力系统是覆盖辽阔地域的大互联系统, 精确估计其运行状态, 为其他高级应用软件提供实时可靠的系统状态信息, 一直是电力工业界经久不衰的研究课题. 随着基于相量量测单元(phasor measurement unit, PMU)的广域量测系统(wide-area monitor system, WAMS)在技术上的成熟与推广应用, 利用WAMS量测可实现电力系统线性状态估计^[1-2].

由于电力系统状态量维数很高, 量测数据量过于庞大, 集中处理将非常烦杂. 为克服大规模系统集中式状态估计难的问题, 分布式状态估计近年来得到国

内外学者的关注. 大多数研究主要是基于星型通信拓扑的分层式状态估计算法, 即需要一个协调中心与各区域电网进行通信以协调整合各区域局部估计值^[3-8]. 随着电力系统自动化水平的提高, 上述星型通信拓扑也会随之被取代, 发展成一种更一般化的通信拓扑结构—网状或链状结构^[9]. 目前, 基于网状或链状通信拓扑的全分布式状态估计已有部分研究^[10-13], 文献^[10-11]提出一种基于一致性更新策略(consensus+innovations)的分布式状态估计方法. 该方法适应任意通信拓扑, 但本质上仍为渐进一致性收敛, 且未给出算法参数与通信拓扑之间的关系, 较难确定最优算法

收稿日期: 2015-05-29; 录用日期: 2016-03-21.

[†]通信作者. E-mail: eehychen@scut.edu.cn; Tel.: +86 13826100525.

本文责任编辑: 邹云.

国家自然科学基金项目(51177049), 国家优秀青年科学基金项目(51322702)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (51177049) and China National Funds for Excellent Young Scientists (51322702).

参数. 文献[13]基于线性方程组的Richardson迭代法, 推导出加权最小二乘估计的分布式解法. 该方法具有良好的拓扑适应性, 并给出确定算法参数的一般方法, 但在大规模电力系统状态估计应用中收敛速度并不理想. 文献[12]提出一种有限时间迭代的分布式状态估计方法, 能在若干次分布式迭代后使各区域估计结果与集中式估计一致, 但仅适用于树型拓扑.

本文基于220kV及以上电力系统的WAMS^[2], 在多区域约束加权最小二乘估计模型中引入有限时间平均一致性协议, 提出一种无需协调中心的全分布式状态估计算法. 并从最小二乘估计的几何意义出发, 扩展推导了系统量测存在异常数据情况下的修正算法. 修正算法在各区域剔除异常量测后, 无需改变信息矩阵, 只需执行若干次有限时间一致性协议能收敛至信息矩阵修正后的集中式估计值. 相比文献[12], 本文方法对通信拓扑无特定要求, 拓扑适应性强; 相比文献[10-11, 13], 收敛速度快, 仅需若干次分布式平均一致性迭代即可得到收敛结果, 且算法参数易于确定. 最后, 通过算例仿真验证了算法的有效性.

2 有限时间平均一致性协议(Finite-time average consensus protocol)

一致性协议(consensus protocol, CP)属于多智能体控制理论研究范畴, 目前在电力系统控制、调度中已有相关应用研究^[20-22]. 有限时间平均一致性协议(finite-time average consensus protocol, FTACP)作为CP的一个分支, 是通过各智能体间进行信息交换, 使各智能体的状态在有限时间内达到平均一致. 相比大多数渐进稳定的ACP, FTACP响应时间短, 实时性好, 具有更强的工程意义^[15, 23].

假设多智能体间能进行双向信息交换, 系统通信拓扑可用简单无向图 $G(v, \epsilon)$ 表示. 图1所示为一简单无向图, 其顶点表示多智能体, 边表示两智能体间能相互通信. 设 $G(v, \epsilon)$ 为图的全体顶点集合, ϵ 为全体边集合, 顶点 i 的邻居集合定义为

$$\Omega_i = \{j \in v \mid (i, j) \in \epsilon\}. \quad (1)$$

图 $G(v, \epsilon)$ 对应的拉普拉斯矩阵 $L = [l_{ij}]$ 定义为

$$l_{ij} = \begin{cases} -1, & j \in \Omega_i, \\ 0, & i \neq j, j \notin \Omega_i, \end{cases} \quad (2)$$

$$l_{ii} = -\sum_{j \neq i} l_{ij}. \quad (3)$$

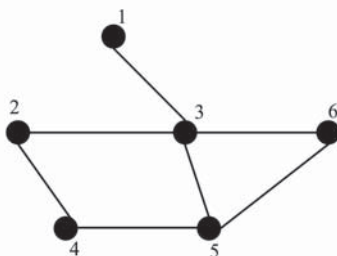


图1 简单无向图

Fig. 1 Simple undirected graph

相比现有的有限时间平均一致性协议^[17-19, 24-25], 基于图拉普拉斯矩阵特征值的FTACP^[14]计算简单, 易于实现. 其原理是合理设计一组计算矩阵 T_k , 使

$$\bar{a} = \left(\prod_{k=1}^D T_k \right) a_0, \quad (4)$$

其中: $a_0 = [a_{1,0}^T, \dots, a_{N,0}^T]^T$ 为顶点初始状态矢量; $\bar{a} = [\bar{a}_1^T, \dots, \bar{a}_N^T]^T$ 为顶点状态平均值矢量; $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = \dots = \bar{a}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{i,0}$; D 为计算矩阵个数, N 为顶点个数.

计算拉普拉斯矩阵 L 的 D ($D \leq N - 1$)个互异非0特征值 $\gamma_1, \dots, \gamma_D$, 上述计算矩阵定义为^[14]

$$\begin{cases} T_k = I - \frac{1}{\gamma_k} L, \\ k = 1, 2, \dots, D, \end{cases} \quad (5)$$

即, 对于任意区域 i , 可通过下式迭代计算系统状态平均值:

$$a_{i,k} = a_{i,k-1} - \frac{1}{\gamma_k} \sum_{j \in \Omega_i} (a_{i,k-1} - a_{j,k-1}), \quad (6)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, D$. 当 $k = D$, 有 $a_{i,D} = \bar{a}$.

3 模型描述(Model statement)

3.1 系统分区(System partition)

电力系统是覆盖辽阔地域的大互联系统, 通常按地理区域划分管理辖区, 实行分区自治. 为此, 本文采用地理辖区原则对互联电力系统进行划分. 一互联电力系统按地理辖区原则分为4个区域电网, 如图2所示. 将每个区域电网调度中心视为顶点(多智能体), 并假设区域电网间的通信拓扑与系统互联拓扑相同, 即将区间联络线支路视为边, 可用上节所述的简单无向图来描述多区域互联电网的通信拓扑. 进一步假设图2中区域电网间的通信拓扑与系统互联拓扑不同, 图2双向线段表示区间通信信道. 此时将区间通信信道视为边, 仍可用简单无向图描述系统通信拓扑.

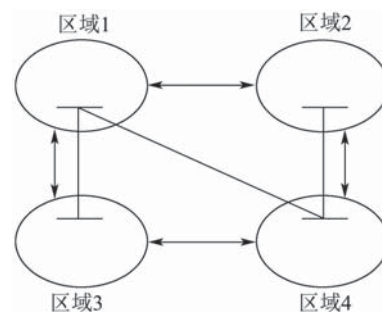


图2 四分区互联电力系统

Fig. 2 Four partition interconnected power system

上述系统分区中, 有以下几点需进一步说明:

1) 由于区域电网调度中心本身具备通信硬件接口, 通过搭建或改造通信信道可实现区域间相互通信,

故本文采用简单无向图表示电力系统通信拓扑。

2) 电力系统互联拓扑表征区域电网间的电气连接关系, 而通信拓扑表征区域电网间的相互通信关系。为实现全系统分布式估计, 本文要求系统通信拓扑应为连通的(即各区域的邻居集合非空), 且无需与系统互联拓扑相同。

3) 在后续章节中将引入FTACP实现电力系统分布式状态估计, 由于通信拓扑结构直接影响FTACP收敛速度, 可从经济性和收敛性两方面考虑合理构建通信拓扑, 即在保证分布式状态估计算法具备快速收敛的同时, 尽可能地减少通信信道等硬件设施的相关费用。

3.2 多区域状态估计模型 (The model of multi-area state estimation)

在直角坐标下, 系统状态变量定义为节点电压相量的实部 V_{real} 与虚部 V_{imag} , 即 $x = [V_{\text{real}}^T, V_{\text{imag}}^T]^T$ 。由PMU能计算得到节点电压相量和支路电流相量的实部与虚部量测值, 量测方程可表示为如下线性形式^[1]:

$$z = Ax + e, \quad (7)$$

e 为噪声向量。给定权重矩阵 W , 集中式加权最小二乘估计模型为

$$\min J_c = \frac{1}{2}(z - Ax)^T W (z - Ax). \quad (8)$$

由上述分区原则, 假设互联电力系统可分为 N 个区域, 各区域系统可观。 n 维系统状态矢量表示为 $x = [x_1^T, \dots, x_N^T]^T$, x_i 为区域 i 的状态矢量。

以图3所示二分区互联电力系统为例, 说明区域 i 的状态量矢量 $x_i = [x_{i,\text{int}}^T, x_{i,\text{bint}}^T, x_{i,\text{bext}}^T]^T$ 定义:

1) 区域 i 内部状态 $x_{i,\text{int}}$: 区域 i 内不与其他区域相连接的节点状态量;

2) 区域 i 内部边界状态 $x_{i,\text{bint}}$: 区域 i 内与其他区域相连接的节点状态量;

3) 区域 i 外部边界状态 $x_{i,\text{bext}}$: 其他区域内与区域 i 相连接的节点状态量。

类似地可定义区域 j 的状态量矢量。

集中式估计模型(8)等效变为带等式约束的加权最小二乘多区域估计模型:

$$\begin{cases} \min J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (z_i - A_i x_i)^T W_i (z_i - A_i x_i), \\ \text{s.t. } Bx = 0, \end{cases} \quad (9)$$

其中: z_i 为区域 i 的量测; W_i 为区域 i 的权重矩阵; B 为 $4b \times n$ 阶矩阵, 每行中有两个非零元素为1或-1, 分别对应两个相邻区域边界状态量; b 为联络线支路数。令 $B = [B_1, \dots, B_N]$, 有

$$Bx = \sum_{i=1}^N B_i x_i = 0. \quad (10)$$

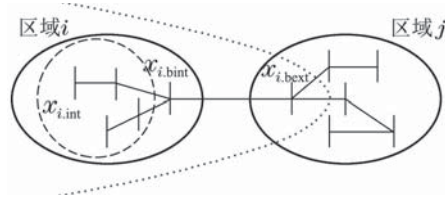


图3 二分区互联电力系统

Fig. 3 Two partition interconnected power system

4 分布式加权最小二乘估计算法(Distributed least square estimation algorithm)

4.1 不考虑异常量测情况(The case without abnormal measurements)

首先引入拉格朗日乘子, 得到式(9)的最优求解过程为

$$\begin{cases} \tilde{x}_i = G_i^{-1} A_i^T W_i z_i, \\ G_i = A_i^T W_i A_i, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} G_B = \sum_{i=1}^N B_i G_i^{-1} B_i^T, \\ \lambda = G_B^{-1} \left(\sum_{i=1}^N B_i \tilde{x}_i \right), \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} d_i = G_i^{-1} B_i^T \lambda, \\ \hat{x}_i = \tilde{x}_i - d_i, \end{cases} \quad (13)$$

\hat{x}_i 为区域 i 的最优估计值。

由式(11)–(13)可知, 对于任一区域 i , 可独立计算式(11)和式(13); 而式(12)则需要各区域联合求解。进一步改写式(12)为

$$\begin{cases} G_B = \sum_{i=1}^N B_i G_i^{-1} B_i^T, \\ \lambda = \left(\frac{1}{N} G_B \right)^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B_i \tilde{x}_i \right). \end{cases} \quad (14)$$

可以看到, 如果各区域能分布式计算 $\frac{1}{N} G_B$ 和 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B_i \tilde{x}_i$, λ 也可独立求解, 进而独立求出各自的状态估计值。设各区域 i 仅已知 B_i , 即矩阵 B 中仅关于区域 i 边界状态的部分列向量, 区域 i 的初始状态设为

$$a_{i,0} = B_i G_i^{-1} B_i^T, \quad (15)$$

$$a_{i,0} = B_i \tilde{x}_i. \quad (16)$$

根据式(15)–(16), 通过 D 步迭代计算式(6)可使各区域得到一致平均值 $\frac{1}{N} G_B$ 和 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B_i \tilde{x}_i$ 。分布式加权最小二乘估计算法如下(因为 $\frac{1}{N} G_B$ 为常数矩阵, 初始化只需一次):

算法1 1) 初始化: 各区域 i 置 $a_{i,0} = B_i G_i^{-1} B_i^T$, 迭代计算式(6)得到 $\frac{1}{N} G_B$;

2) 各区域*i*独立计算式(11), 得到 \tilde{x}_i 和 $B_i\tilde{x}_i$, 置 $a_{i,0} = B_i\tilde{x}_i$;

3) 迭代计算式(6), 各区域*i*得到 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B_i\tilde{x}_i$;

4) 各区域*i*独立计算 λ , 并将其代入式(13)计算 \hat{x}_i .

4.2 存在异常量测情况(The case considering the effects of abnormal measurements)

算法1形式简单, 通过有限时间一致性迭代能得到与集中式估计相同的估计值. 尽管如此, 当区域量测系统出现异常数据时(例如不良数据或数据丢失), 算法1虽然可以在各区域*i*剔除异常量测之后执行, 但异常量测的剔除会引起 G_i 的改变, 即需对 $4b$ 阶方阵 $\frac{1}{N}G_B$ 重新初始化一次. 这样不仅加大了当前估计时刻各相邻区域间的通信量, 下一估计时刻也同样要作相应调整.

为避免上述重新初始化问题, 首先给出一个算法定理:

定理1 设系统量测方程为(7), 异常量测剔除后系统保持可观性, 给定初值

$$\hat{x}_0 = (A^T W A)^{-1} A^T W S z. \quad (17)$$

由

$$\hat{x}_t = \hat{x}_0 + [I - (A^T W A)^{-1} A^T W S A] \hat{x}_{t-1} \quad (18)$$

迭代可收敛至

$$\hat{x}_m = (A_m^T R_m^{-1} A_m)^{-1} A_m^T R_m^{-1} z_m, \quad (19)$$

其中: S 为对角线矩阵, 对应异常量测的对角元素为0, 对应正常量测的对角元素为1; z_m , A_m 和 R_m 分别为不包含异常量测的量测向量、量测方程矩阵和量测协方差矩阵.

定理1的几何解释见附录.

假设剔除异常量测后, 各区域*i*是可观的. 根据定理1, 在算法1步骤2)中引入对角线矩阵 S_i , 修正式(5)为

$$\tilde{x}_i = G_i^{-1} A_i^T W_i S_i z_i, \quad (20)$$

并置 $a_{i,0} = [T_{api}, (B_i \Delta \tilde{x}_{i,t})^T]^T$. 当区域*i*有异常量测 $T_{api} = 1$; 否则, $T_{api} = 0$.

执行按式(20)修正的算法1后, 各区域*i*检查 T_{api} 是否为0, 如不为0, 则继续执行算法2.

算法2

1) 各区域*i*置 $\hat{x}_{i,0} = \hat{x}_i$, \hat{x}_i 为算法1的估计结果;

2) 置 $t = 0$, 给定收敛阈值 e_{end} ;

3) 各区域*i*独立计算 $\tilde{x}_{i,t} = G_i^{-1} A_i^T W_i S_i A_i \hat{x}_{i,t}$, 并得到 $B_i \tilde{x}_{i,t}$;

4) 置 $a_{i,0} = B_i \tilde{x}_{i,t}$, 迭代计算式(6), 各区域*i*得

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B_i \tilde{x}_{i,t};$$

5) 各区域*i*独立计算 λ_t , 并计算:

$$\begin{cases} d_{i,t} = G_i^{-1} B_i^T \lambda_t, \\ \hat{x}_{i,t+1} = \hat{x}_{i,0} + \hat{x}_{i,t} - (\tilde{x}_{i,t} - d_{i,t}); \end{cases}$$

6) 计算 $e_i = \max(|\hat{x}_{i,t+1} - \hat{x}_{i,t}|)$;

7) 置 $e_{i,0} = e_i$, 执行最大一致性协议:

$$\begin{cases} e_{i,l} = \max_{j \in \Omega_i} (e_{i,l-1}, e_{j,l-1}), \\ l = 1, 2, \dots, d_G; \end{cases}$$

d_G 为图 $G(v, \varepsilon)$ 的直径;

8) 若 $e_{i,d_G} < e_{\text{end}}$, 结束; 否则, $t = t + 1$, 返回3).

可以分析, 算法2收敛时(假设迭代 t_c 步), 各区域与其一个相邻区域交换数据个数为 $(4b \times D + d_G) \times t_c$, 而初始化一次需交换数据的个数为 $4b \times 4b \times D$, 在目前光纤通信环境下, 一次WAMS量测采样中可能出现的异常数据个数不多, 所需迭代步 t_c 一般较少, 对于多联络线互联电力系统, 有 $t_c < 2b$, 又因为 $d_G \leq D^{[16]}$, 有

$$(4b \times D + d_G) \times t_c \leq (4b + 1) \times D \times t_c, \quad (21)$$

$$(4b + 1) \times 2b \times D < 4b \times 4b \times D, \quad (22)$$

即

$$(4b \times D + d_G) \times t_c < 4b \times 4b \times D. \quad (23)$$

上述结论将在算例中得到验证.

5 算例仿真与分析(Simulation and analysis)

本文以IEEE 118节点标准测试系统作为研究对象, 将其划分为7个区域如图4所示. 所有节点均配置PMU, 能量测相应节点电压相量和与该节点相联的支路电流相量, 总量测数为980. 节点电压实部与虚部量测值为潮流真值叠加标准差 $\sigma = 0.008$ 的高斯白噪声, 支路电流实部与虚部量测值为潮流真值叠加标准差 $\sigma = 0.0005$ 的高斯白噪声. 权重矩阵 W 取为 $\frac{1}{\sigma^2} I$.

首先假设各区域均无异常量测, 考虑如图5所示的两种系统通信拓扑:

a) 与区域互联拓扑相同;

b) 树状拓扑.

算法1的收敛结果如图6所示. 其中: 图6(a)和6(b)对应通信拓扑图5(a), 图6(c)和6(d)对应通信拓扑图5(b), 纵坐标误差定义为

$$\text{误差} = \text{迭代值} - \text{集中式估计值}.$$

由图6可知, 经过有限时间一致性迭代, 各区域节点电压相量实虚部均收敛至集中式估计值. 同时可以看到, 算法1采用通信拓扑图5(a)时需进行6次迭代, 采用通信拓扑图5(b)则需5次. 说明合理选择系统通信拓扑, 能减少算法1迭代次数, 从而减少通信开销.

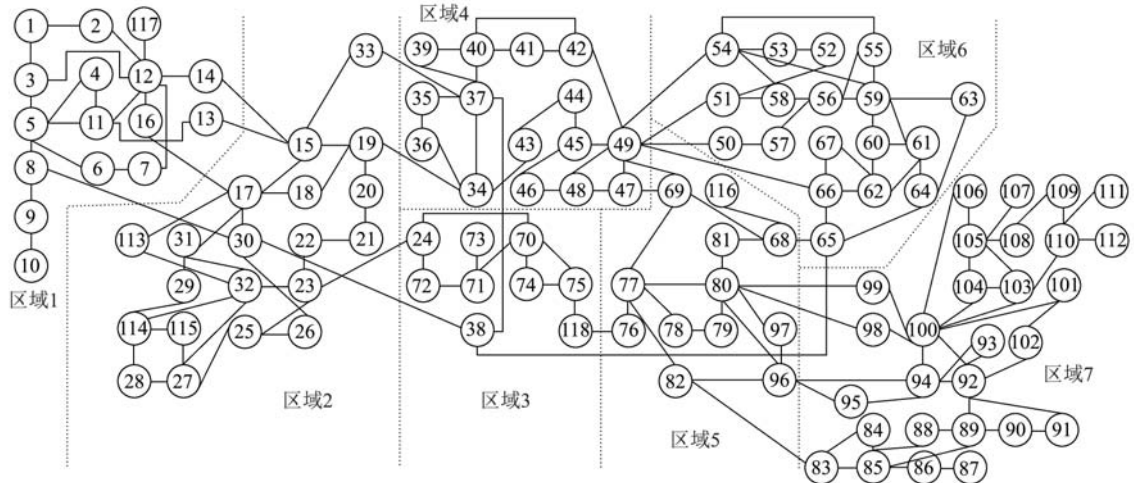


图 4 系统分区示意图

Fig. 4 The diagram of system partition



图 5 系统通信拓扑

Fig. 5 System communication topology

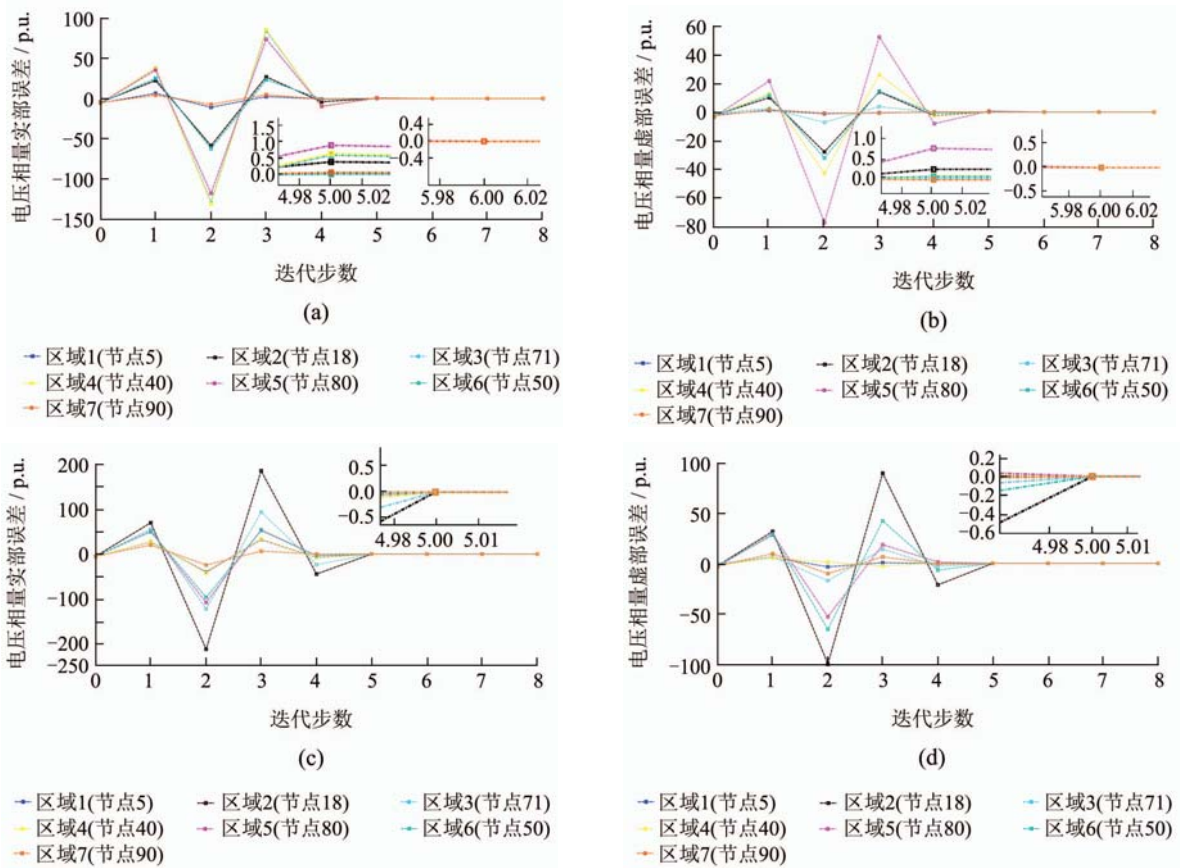


图 6 算法1收敛结果

Fig. 6 Convergence results of Algorithm 1

在相同系统分区和量测误差条件下,文献[10]算法收敛结果如图7所示.其中:图7(a)和7(b)对应图5(a),图7(c)和7(d)对应图5(b).需要说明的是,由于文献[10]算法的收敛速度与算法参数选取有关,且通信拓扑对算法参数选择有直接影响.为避免算法发散和获得较好的收敛结果,经过多次尝试,最终取下列算法参数:

- i) 对应图5(a),取 $a=3, b=0.26, r_1=0.5, r_2=0$;
- ii) 对应图5(b),取 $a=0.9, b=0.4, r_1=0.5, r_2=0$.

上述算法参数定义参见文献[10],本文不再赘述.由图7可以看到,相比算法1,文献[10]算法的收敛速度明显较慢,一般需要数百次迭代才能收敛至最优解.更多地,文献[10]并没有给出选择算法参数的一般方法,需要通过反复试验获取最优参数.

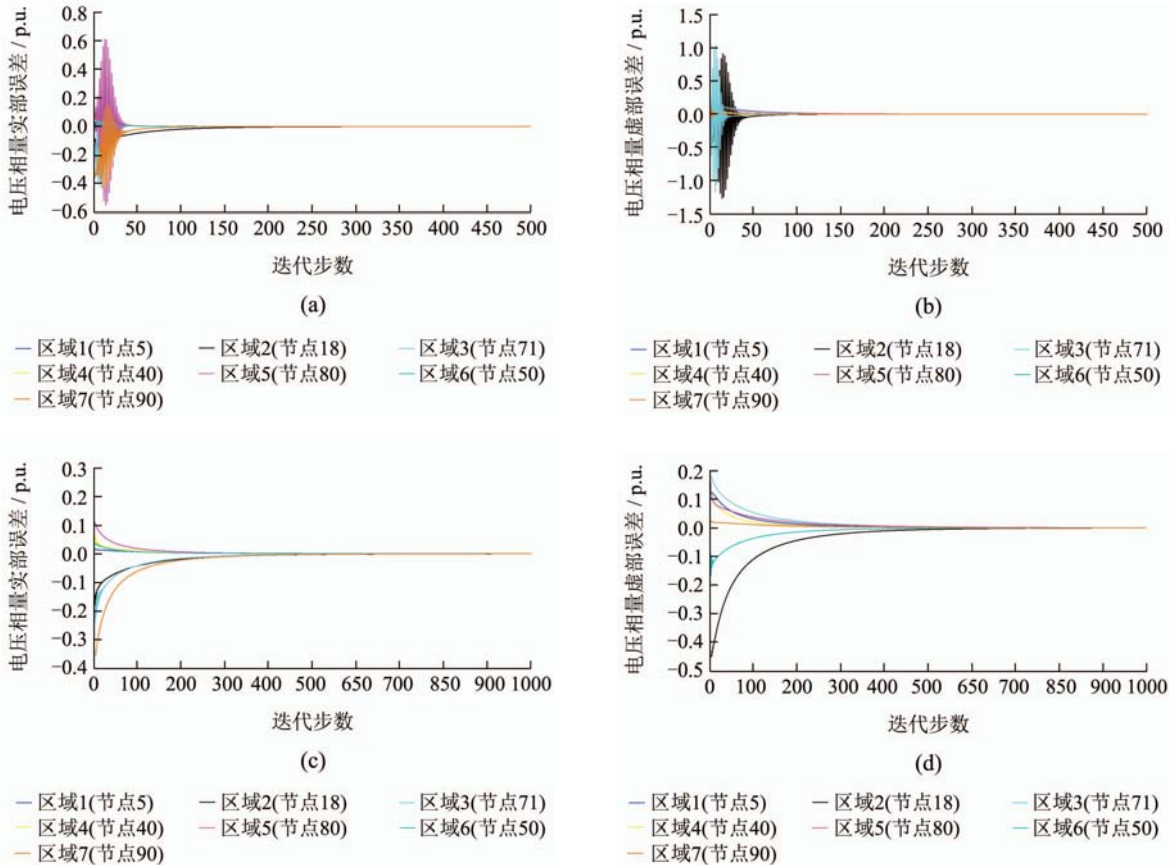


图7 文献[10]算法收敛结果

Fig. 7 Convergence results of the algorithm of Ref.[10]

采用图5(b),考虑异常量测情况,假设各区域均出现一个电压相量实部的异常量测,即全系统共有7个异常量测.图8为算法2收敛情况,由于篇幅有限,这里只给出节点10和节点38的收敛结果.

图8中,纵坐标绝对值误差定义为
绝对值误差 = |迭代值 - 异常量测剔除后的集中式估计值|
收敛阈值 e_{end} 设为0.0001.

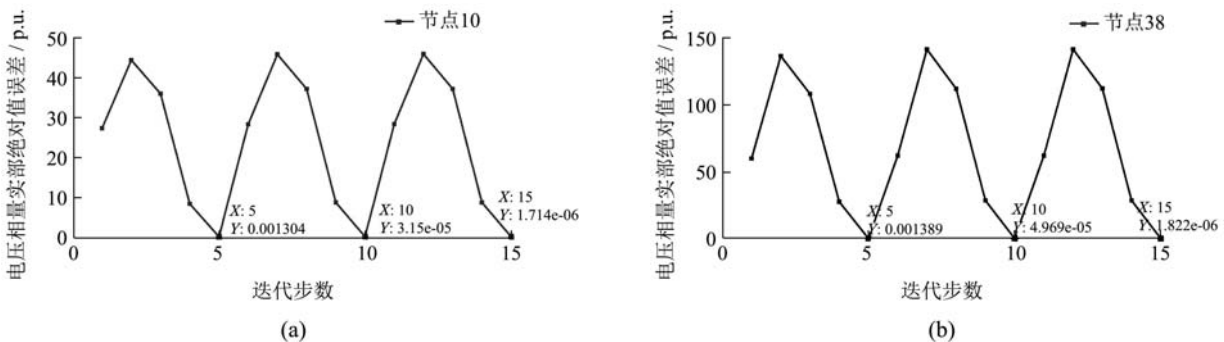


图8 算法2收敛结果

Fig. 8 Convergence results of Algorithm 2

由图8可知, 算法2收敛时 $t_c = 3$, 因为联络线支路数 $b = 23$, 有 $t_c < 2b$, 即式(23)成立, 说明了算法2的有效性. 表1为其他异常数据情况下的算法2收敛结果. 从表1可以看到, t_c 随着系统异常量测总数的增多而增大, 但增幅并不明显. 一般地, WAMS可靠性较高, 一次采样中的异常量测数相对较少, 算法2能通过较少的 t_c 步迭代至收敛.

表1 各种异常量测情况下的算法2收敛结果

Table 1 Convergence results of algorithm 2 in other abnormal measurements cases

电压异常 量测总数	电流异常 量测总数	异常量测 总数	t_c
21	0	21	5
0	35	35	9
21	28	49	11
25	70	95	11
70	105	175	12

6 结语(Conclusions)

本文提出一种全分布式电力系统加权最小二乘估计算法, 在约束加权最小二乘估计模型中引入有限时间平均一致性协议, 使算法无需协调中心, 对通信拓扑适应性强, 且算法参数易于确定. 根据最小二乘估计的几何意义, 推导了在各子区域的异常量测剔除后, 无需改变信息矩阵的修正算法. 算例仿真结果表明, 在无异常量测情况下, 该算法能快速收敛至集中式估计值; 在出现异常量测时, 修正算法只需执行若干次有限时间一致性协议能收敛至信息矩阵修正后的集中式估计值.

参考文献(References):

- [1] LI Qiang, ZHOU Jingyang, YU Erkeng, et al. Power system linear state estimation based on phasor measurement [J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2005, 29(18): 24 – 28.
(李强, 周京阳, 于尔铿, 等. 基于相量量测的电力系统线性状态估计 [J]. 电力系统自动化, 2005, 29(18): 24 – 28.)
- [2] DUAN Gang, YAN Yaqin, XIE Xiaodong, et al. Development status quo and tendency of wide area phasor measuring technology [J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2015, 39(1): 73 – 80.
(段刚, 严亚勤, 谢晓冬, 等. 广域相量量测技术发展现状与展望 [J]. 电力系统自动化, 2015, 39(1): 73 – 80.)
- [3] MA Pingchuan, SHEN Chen, CHEN Ying, et al. Distributed state estimation based on the pseudo-measurement coordination variables [J]. *Proceeding of the CSEE*, 2014, 34(19): 3170 – 3177.
(马平川, 沈沉, 陈颖, 等. 基于伪量测型协调变量的分布式状态估计算法 [J]. 中国电机工程学报, 2014, 39(19): 3170 – 3177.)
- [4] GÓMEZ-EXPÓSITO A, JAÉN A D L V, GÓMEZ-QUILES C, et al. A taxonomy of multi-area state estimation methods [J]. *Electric Power Systems Research*, 2011, 81: 1060 – 1069.
- [5] KORRES G H. A distributed multi-area state estimation [J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2011, 26(1): 73 – 84.
- [6] GÓMEZ-EXPÓSITO A, ABUR A, ANTONIO D L V J, et al. A multi-level state estimation paradigm for smart grid [J]. *Proceedings of IEEE*, 2011, 99(6): 952 – 976.
- [7] WANG Jian, CHEN Ying, HUANG Shaowei, et al. A distributed state estimation method for interconnected power grid based on decomposition of KKT condition [J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2010, 34(19): 31 – 36.
(王建, 陈颖, 黄少伟, 等. 基于KKT条件分解的互联电网分布式状态估计算法 [J]. 电力系统自动化, 2010, 34(19): 31 – 36.)
- [8] GOMEZ-EXPOSITO A, DE L V J A. Two-level state estimation with local measurement pre-processing [J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2009, 24(2): 676 – 684.
- [9] WEI Zhinong, ZHOU Yi, LI Yanglin, et al. Discussion on dynamic state estimation based on information fusion theory [J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2008, 32(4): 103 – 107.
(卫志农, 周奕, 李阳林, 等. 基于信息融合理论的动态状态估计探讨 [J]. 电力系统自动化, 2008, 32(4): 103 – 107.)
- [10] XIE L, CHOI D H, KAR S, et al. Fully distributed state estimation for wide-area monitoring systems [J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2012, 3(3): 1154 – 1169.
- [11] KAR S, HUG G, MOHAMMADI J, et al. Distributed state estimation and energy management in smart grid: A consensus+innovations approach [J]. *IEEE Journal of Selected Topic in Signal Processing*, 2014, 8(6): 1022 – 1033.
- [12] TAI X, LIN Z, FU M, et al. A new distributed state estimation technique for power networks [C] // *Proceedings of American Control Conference (ACC)*. Washington DC, USA: IEEE, 2013: 3338 – 3343.
- [13] MARELLI D E, FU M. Distributed weighted least-square estimation with fast convergence for large-scale systems [J]. *Automatica*, 2015, 51(1): 27 – 39.
- [14] KIBANGOU A. Graph laplacian based matrix design for finite-time distributed average consensus [C] // *Proceedings of American Control Conference (ACC)*. Montreal, Canada: IEEE, 2012: 261 – 265.
- [15] LONG Hui, FAN Xiaoping, LIU Shaoqiang. Review of distributed consensus problem in multi-agent system [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2013, 49(1): 31 – 42.
(龙慧, 樊晓平, 刘少强. 多智能体系统分布式一致性算法研究现状 [J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(1): 31 – 42.)
- [16] TRAN T M D. Distributed design of finite-time average consensus protocols [C] // *The 4th IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems (NecSys)*. Koblenz, Germany: IFAC, 2013: 227 – 233.
- [17] SUNDARAM S, HADJICOSTIS C N. Finite-time distributed consensus in graphs with time-invariant topology [C] // *Proceedings of American Control Conference (ACC)*. New York, USA: IEEE, 2007: 711 – 716.
- [18] MOU S, MORSE A S. Finite-time distributed averaging [C] // *Proceedings of American Control Conference (ACC)*. Portland, USA: IEEE, 2014: 5260 – 5263.
- [19] YUAN Y, STAN G B, SHI L, et al. Decentralised minimum-time consensus [J]. *Automatica*, 2013, 49(5): 1227 – 1235.
- [20] BINETTI G, DAVOUDI A, LEWIS F L, et al. Distributed consensus-based economic dispatch with transmission losses [J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2014, 29(4): 1711 – 1720.

- [21] SHAFIEE Q, DRAGICEVIC T, ANDRADE F, et al. Distributed consensus-based control of multiple DC microgrids clusters [C] // *Industrial Electronics Society, IECON 2014-40th Annual Conference of the IEEE*. Dallas TX, USA: IEEE, 2014: 2056 – 2062.
- [22] POLYMENEAS E, BENOSMAN M. Finite time multi-agent coordination of distributed generation for grid reactive support [C] // *Innovative Smart Grid Technologies*. Kuala Lumpur, Malaysia: IEEE, 2014: 19 – 24.
- [23] XU Yaojin, TIAN Yuping. A survey of linear and nonlinear consensus problems in multi-agent systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 837 – 849.
(许耀颀, 田玉平. 线性与非线性一致性算法问题综述 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 837 – 849.)
- [24] LIU Yuan, WANG Shicheng, MIN Haibo, et al. Decentralized finite-time leaderless consensus algorithm for networked Euler-Lagrange systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(1): 93 – 99.
(刘源, 王仕成, 闵海波, 等. 无领航者的多Euler-Lagrange系统有限时间一致性算法 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(1): 93 – 99.)
- [25] WANG Fang, CHEN Xin, HE Yong, et al. Finite-time consensus control of second-order multi-agent systems with jointly-connected topologies [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 981 – 986.
(王芳, 陈鑫, 何勇, 等. 联合连通条件下的二阶多智能体系统有限时间一致性控制 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 981 – 986.)

附录(Appendix)

首先讨论无加权最小二乘估计, 即令 $W = I$. 由式(17)可知, \hat{x}_0 为

$$(Sz - Ax)^T A = 0 \tag{A1}$$

的解. 假设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$. 令 $A = [a_1, \dots, a_n]$, a_i 为 A 的列矢量. 因为 A 满秩, 式(A1)的几何意义为当 $x = \hat{x}_0$ 时, 残差矢量 $Sz - Ax$ 与 a_1, \dots, a_n 所确定的 n 维子空间正交. 类似地, 式(19)中的 \hat{x}_m 为

$$(Sz - SAx)^T A = 0 \tag{A2}$$

的解. 将 \hat{x}_m 代入式(A2), 有

$$A\hat{x}_m = A\hat{x}_0 + (A(A^T A)^{-1} A^T)(A\hat{x}_m - SA\hat{x}_m), \tag{A3}$$

$$A\hat{x}_0 = (A(A^T A)^{-1} A^T)SA\hat{x}_m = (A(A^T A)^{-1} A^T)Sz. \tag{A4}$$

取 $m = 3, n = 1, \mathfrak{S}^1$ 表示 $A = [a_1]$ 所确定的1维子空间, 对角线矩阵 S 为

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & s_2 & \\ & & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

上述关系如图A1所示.

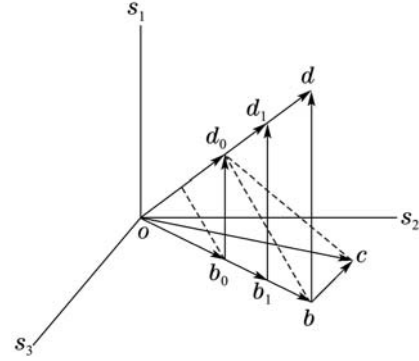


图 A1 定理1的几何关系图
Fig. A1 The geometric relation of Theorem 1

图中: \vec{od} 表示 $A\hat{x}_m$; \vec{ob} 表示 $SA\hat{x}_m$; \vec{oc} 表示 Sz ; \vec{od}_0 表示 $A\hat{x}_0$; \vec{bd} 表示 $A\hat{x}_m - SA\hat{x}_m$; \vec{d}_0d 为 \vec{bd} 在子空间 \mathfrak{S}^1 的正交投影; $A(A^T A)^{-1} A^T$ 为正交投影矩阵; 分别 \vec{bc} 与 \vec{ob} 和 \vec{od} 正交.

由式(17)给定 \hat{x}_0 后, 当 $t = 1$ 时, 式(18)的几何意义为求解 \hat{x}_1 , 满足

$$A\hat{x}_1 = A\hat{x}_0 + (A(A^T A)^{-1} A^T)(A\hat{x}_0 - SA\hat{x}_0) = \vec{od}_0 + \vec{d}_0d_1. \tag{A5}$$

d_0d 为 $\vec{b}_0d_0 = A\hat{x}_0 - SA\hat{x}_0$ 在子空间 \mathfrak{S}^1 的正交投影; 依此类推, \hat{x}_t 满足 $A\hat{x}_t = \vec{od}_0 + \vec{d}_0d_t$; \vec{d}_0d_t 为 $\vec{b}_{t-1}d_{t-1} = A\hat{x}_{t-1} - SA\hat{x}_{t-1}$ 在子空间 \mathfrak{S}^1 的正交投影. 随着不断迭代计算(18), $\vec{b}_t d_t$ 将逐渐接近 \vec{bd} , 有 $\vec{bd} = \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{b}_t d_t$, 即 $\hat{x}_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}_t$.

对于加权最小二乘估计, 一般权重矩阵 W 取为

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_m \end{bmatrix}.$$

令

$$A_w = \sqrt{W}A, \\ z_w = \sqrt{W}z,$$

可将原加权最小二乘估计可转化为无加权形式, 同样具有上述几何意义.

作者简介:

蔡永智 (1984-), 男, 博士研究生, 主要从事电力系统状态估计的研究, E-mail: xbcyzsunny@gmail.com;

陈皓勇 (1975-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事电力系统优化规划与优化运行、新能源并网相关技术、人工智能在电力系统中的应用及电力市场的研究, E-mail: eehychen@scut.edu.cn;

郭曼兰 (1991-), 女, 硕士研究生, 主要从事电力系统状态估计的研究, E-mail: 184507789@qq.com.