

多智能体系统通信拓扑最优设计

袁玩贵^{1†}, 屈百达²

(1. 江南大学 理学院, 江苏 无锡 214122; 2. 江南大学 物联网学院, 江苏 无锡 214122)

摘要: 运用控制理论, 矩阵论及最小二乘等理论, 研究了多智能体系统的分组一致性与系统通信拓扑图的拉普拉斯矩阵属于特征值0的特征向量之间的关系, 给出了在线性协议控制下, 系统达到一致性和分组一致性, 其通信拓扑的设计方法. 提出了一阶多智能体系统的总能量概念, 并得到了系统在能量最省时通信拓扑的最优设计. 仿真实例佐证本文主要结论的正确性.

关键词: 多智能体系统; 一致性; 分组一致性; 通信拓扑; 系统能量; 最优设计

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

The optimal design for interaction topology of multi-agent systems

YUAN Wan-gui^{1,2†}, QU Bai-da²

(1. School of Science, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China;

2. School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: Based on graph theory, matrix theory and least square theory, the relationship between the group consistency and the eigenvectors of Laplacian matrix associated with eigenvalue 0 for multi-agent systems. To obtain the consensus or group consistency, a design method for unidirectional information exchange topologies is provided based on the linear control protocol. The total energy is defined about the one-order multi-agent systems. And a optimal design is proposed so that the system energy is minimum. Simulation results are given to illustrate the effectiveness of theoretical results.

Key words: multi-agent systems; consensus; group consistency; interaction topology; system energy; optimal design

1 引言(Introduction)

多智能体系统的研究方兴未艾, 其一阶积分器系统模型的理论研究最为深入^[1-9].

文献[1]利用连通常用拓扑图的Laplacian矩阵0特征值所对应的特征向量得到一阶积分系统的平衡点. 文献[2-6]研究了一阶积分器系统的一致性敛性问题, 得到系统达到平均一致的充要条件, 即通讯拓扑图是连通平衡拓扑结构, 并得到了系统中的所有智能体最终收敛于初始状态的平均值. 文献[7]利用随机矩阵理论研究了当系统的通讯拓扑图存在有向生成树时, 系统一致收敛. 文献[8]利用矩阵论研究了通讯拓扑为非平衡结构且保持强连通或有生成树时, 多智能体系统一致收敛于初始状态的凸组合. 文献[9]研究了固定通讯拓扑和时变通讯拓扑下离散时间多智能体系统平衡点问题^[10].

对于一阶积分器系统, 人们将研究的重点放在线性控制下系统的通讯拓扑网络应满足怎样的条件系统输出能够一致上. 根据不同的拓扑结构得到一致性的条件基本一致: 连通, 强连通或有生成树.

当交互拓扑中有敌对交互或不连通时, 系统不一定具备稳定性, 系统状态的一致性更难得到, 但可能表现为群集现象, 文献[11-14]中均有对部分情形的详细研究.

本文针对系统通讯拓扑结构不连通或存在敌对交互, 研究了一阶积分系统的状态. 引入了多智能体系统的能量函数, 据此研究了在一阶积分器控制下, 多智能体系统一致性或群集性所需要设计的最优通讯拓扑结构.

2 主要结论(Main results)

考虑 n 个智能体组成的多智能体系统

$$\dot{x}_i = u_i, \quad (1)$$

其中: 智能体 i 的状态 $x_i \in \mathbb{R}^1$, 控制协议 $u_i \in \mathbb{R}^1, i = 1, 2, \dots, n$.

系统的邻接矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, a_{ij} 表示智能体 i 和 j 之间的连接权数. 系统的度矩阵

$$\mathbf{D} = (d_{ij})_{n \times n},$$

其中

$$d_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

系统的Laplacian矩阵 $L = D - A$.

本文考虑无向通信拓扑,故矩阵 A 及 L 为对称矩阵. 采用的系统控制协议为

$$u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)), \quad (2)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$.

由式(1)-(2),系统可改写成矩阵形式

$$\dot{X}(t) = -LX(t), \quad (3)$$

这里 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$.

定义1 对于多智能体系统中的任意两个个体 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0,$$

则称多智能体系统具有状态一致性.

定义2^[12] 设 k 个集合 $\{X_i | i = 1, 2, \dots, k\}$, 对于任意的 $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 满足

- 1) $X_i \neq \emptyset, X_i \subset X$,
- 2) $X_i \cap X_j = \emptyset, (i \neq j)$,
- 3) $\bigcup_{i=1}^k X_i = X$,

则称 $\{X_i | i = 1, 2, \dots, k\}$ 为集合 X 的一个分割.

定义3^[12] 设 $\{X_i | i = 1, 2, \dots, k\}$ 为系统(1)的状态集 X 的一个分割, 对于任给的 $x_i \in X_i, x_j \in X_j$ ($\hat{i}, \hat{j} \in \{1, 2, \dots, k\}$) 满足

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \hat{i} = \hat{j}$,
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| > 0, \hat{i} \neq \hat{j}$,

则称系统(1)分组一致.

对于多智能体系统(3), 众多文献均在系统通信拓扑保持连通或联合连通的条件下, 研究系统的一致性 or 分组一致性问题, 要求系统通信拓扑的Laplacian矩阵的秩 $\text{rank}(L) = n - 1$. 即系统通信拓扑的连通性是系统最终保持一致性或分组一致的前提条件.

然而, 实际应用中, 系统的通信拓扑受外界因素的影响会很大, 其通信拓扑始终保持连通或联合连通是很困难的. 本文拟在系统的通信拓扑即使不连通的情况下, 研究系统的一致性和分组一致性. 并在此基础上, 为了保持系统的一致性或分组一致性, 设计最理想的通信拓扑结构.

定理1 对于多智能体系统(3), 若无向通信拓扑结构图的Laplacian矩阵的秩 $\text{rank}(L) = n - r$ ($r \geq 1$), 并设

$$0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r < \lambda_{r+1} \leq \dots \leq \lambda_n$$

为矩阵 L 的特征值, 对应的正交特征向量分别为

$$p_1, p_2, \dots, p_n.$$

则多智能体系统(1)的所有个体的最终状态为

$$X(\infty) = \sum_{i=1}^r (p_i^T X(0)) p_i. \quad (4)$$

证 由矩阵论知识知道, 对称矩阵必能对角化. 设系统(3)通信拓扑Laplacian矩阵 L 的对角矩阵为 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

记过渡矩阵为 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, 显然 P 为正交矩阵, 且有

$$L = P \Lambda P^T. \quad (5)$$

系统(3)的状态解为

$$X(t) = \exp(-Lt)X(0). \quad (6)$$

结合式(5), 即有

$$X(t) = P \exp(-\Lambda t) P^T X(0). \quad (7)$$

对式(6)两边取极限 ($t \rightarrow \infty$):

$$X(\infty) = P Q P^T X(0), \quad (8)$$

其中矩阵 $Q_{n \times n} = \underbrace{\text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}}_r, \underbrace{\text{diag}\{0, 0, \dots, 0\}}_{n-r}$.

由式(8), 根据矩阵乘法, 可计算得式(4).

注意到 L 的行和为零, 故可取 $p_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_n$ 为 L 属于 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量.

注1 由定理1知道, 多智能体系统的的一致性分组是由其Laplacian矩阵的特征值零的所有特征向量及所有个体初始状态共同决定. 当 $r = 1$ 时, $\text{rank}(L) = n - 1$, 此时系统通信拓扑连通, 根据式(4), 可计算出系统所有个体一致收敛到 $\bar{x}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0)$. 这正是很多文献中的结论. 即通信拓扑连通时, 多智能体系统(3)一致收敛到系统初始值的均值处.

本文设系统通信拓扑结构图的Laplacian矩阵 L 的秩为 $n - 2$ (即 $r = 2$). 由矩阵论知识知道, 0 是矩阵 L 的二重特征根, 设为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

因此式(4)可写成

$$X(\infty) = \bar{x}_0 \mathbf{1} + (p_2^T X(0)) p_2. \quad (9)$$

注2 式(9)说明, 当 $\text{rank}(L) = n - 2$ 时, 系统中个体的最终状态是由特征向量 p_2 决定. 由 $p_1^T p_2 = 0$ 可知, p_2 中的元素不可能全部相同, 因此系统(3)不能保持一致性(除非 $p_2^T X(0) = 0$). 但若 p_2 中相同元素的组数有 k 组(如 $p_2 = (-1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, -1)^T$), 则元素 $p_{12}, p_{42}, p_{72}, p_{82}$ 均为 -1 为一组, 元素 p_{22}, p_{52} 是 0 为另一组, p_{32}, p_{62} 相等为一组, 则相同元素的组数为 3 , 即 $k = 3$), 可以从式(9)看出, 系统中的个体最终状态呈现分 k 组一致, 并可以根据式(9)计算出每组个体聚集位置.

基于定理1, 可以逆向应用. 为了多智能体系统(3)达到一致收敛或分组收敛这一目的, 可以通过设计多

由定理2计算的非零特征值 $(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_8) = (0.5797, 0.4885, 0.3877, 0.2714, 0.1197, 0.1508, 0.2930)$.

再由步骤5计算的通信拓扑的Laplacian矩阵 L :

$$L = \begin{pmatrix} 0.2864 & 0.0484 & 0.0161 & -0.0195 & -0.0606 & -0.1143 & -0.1033 & -0.0530 \\ 0.0484 & 0.4412 & -0.1209 & -0.1014 & -0.0789 & -0.0496 & -0.0556 & -0.0831 \\ 0.0161 & -0.1209 & 0.3852 & -0.0838 & -0.0613 & -0.0319 & -0.0380 & -0.0655 \\ -0.0195 & -0.1014 & -0.0838 & 0.3234 & -0.0418 & -0.0125 & -0.0185 & -0.0460 \\ -0.0606 & -0.0789 & -0.0613 & -0.0418 & 0.2521 & 0.0100 & 0.0040 & -0.0235 \\ -0.1143 & -0.0496 & -0.0319 & -0.0125 & 0.0100 & 0.1591 & 0.0333 & 0.0059 \\ -0.1033 & -0.0556 & -0.0380 & -0.0185 & 0.0040 & 0.0333 & 0.1782 & -0.0002 \\ -0.0530 & -0.0831 & -0.0655 & -0.0460 & -0.0235 & 0.0059 & -0.0002 & 0.2653 \end{pmatrix}.$$

根据步骤6得到系统通信拓扑的邻接矩阵 A :

$$A = \begin{pmatrix} 0.0 & -0.0484 & -0.0161 & 0.0195 & 0.0606 & 0.1143 & 0.1033 & 0.0530 \\ -0.0484 & 0.0 & 0.1209 & 0.1014 & 0.0789 & 0.0496 & 0.0556 & 0.0831 \\ -0.0161 & 0.1209 & 0.0 & 0.0838 & 0.0613 & 0.0319 & 0.0380 & 0.0655 \\ 0.0195 & 0.1014 & 0.0838 & 0.0 & 0.0418 & 0.0125 & 0.0185 & 0.0460 \\ 0.0606 & 0.0789 & 0.0613 & 0.0418 & 0.0 & -0.0100 & -0.0040 & 0.0235 \\ 0.1143 & 0.0496 & 0.0319 & 0.0125 & -0.0100 & 0.0 & -0.0333 & -0.0059 \\ 0.1033 & 0.0556 & 0.0380 & 0.0185 & -0.0040 & -0.0333 & 0.0 & 0.0002 \\ 0.0530 & 0.0831 & 0.0655 & 0.0460 & 0.0235 & -0.0059 & 0.0002 & 0.0 \end{pmatrix}.$$

在此通信拓扑下, 系统总能量最少的情况, 所有个体一致收敛至初始位置的均值处, 如图1.

考虑系统通信拓扑Laplacian矩阵 L 的秩为 $n - 2$, p_1 如上, 取

$$p_2 = (-0.2582 \ 0 \ -0.2582 \ 0.5164 \ 0$$

$$\ -0.2582 \ 0.5164 \ 0.5164)^T$$

因 p_2 中有3组相同元素, 根据定理1, 系统中个体分3组一致. 其中: 个体1, 3, 6状态一致, 个体2, 5一致, 个体4, 7, 8一致.

取 $(p_3, p_4, \dots, p_8) \in N(p_1, p_2)$ 为

$$\begin{pmatrix} 0.0367 & 0.4836 & 0.1857 & 0.0367 & 0.4836 & 0.4836 \\ -0.5911 & -0.0301 & -0.4041 & -0.5911 & -0.0301 & -0.0301 \\ 0.7296 & -0.1617 & -0.2342 & -0.2704 & -0.1617 & -0.1617 \\ 0.0826 & 0.6934 & -0.0471 & 0.0826 & -0.3066 & -0.3066 \\ -0.1527 & -0.2100 & 0.8282 & -0.1527 & -0.2100 & -0.2100 \\ -0.2704 & -0.1617 & -0.2342 & 0.7296 & -0.1617 & -0.1617 \\ 0.0826 & -0.3066 & -0.0471 & 0.0826 & 0.6934 & -0.3066 \\ 0.0826 & -0.3066 & -0.0471 & 0.0826 & -0.3066 & 0.6934 \end{pmatrix}.$$

据定理2计算系统Laplacian矩阵的正特征值为 $(0.5131, 0.2154, 0.2320, 0.1659, 0.3420, 0.4481)$.

根据步骤5, 计算出

$$L = \begin{pmatrix} 0.2441 & -0.0468 & -0.0766 & -0.0449 & -0.0703 & -0.0894 & 0.0163 & 0.0676 \\ -0.0468 & 0.2761 & -0.1679 & -0.0260 & -0.0100 & 0.0373 & -0.0298 & -0.0330 \\ -0.0766 & -0.1679 & 0.3243 & 0.0448 & -0.0612 & -0.0949 & 0.0244 & 0.0072 \\ -0.0449 & -0.0260 & 0.0448 & 0.1830 & 0.0019 & 0.0161 & -0.0712 & -0.1038 \\ -0.0703 & -0.0100 & -0.0612 & 0.0019 & 0.2193 & -0.0081 & -0.0247 & -0.0470 \\ -0.0894 & 0.0373 & -0.0949 & 0.0161 & -0.0081 & 0.1649 & -0.0043 & -0.0215 \\ 0.0163 & -0.0298 & 0.0244 & -0.0712 & -0.0247 & -0.0043 & 0.2320 & -0.1426 \\ 0.0676 & -0.0330 & 0.0072 & -0.1038 & -0.0470 & -0.0215 & -0.1426 & 0.2730 \end{pmatrix}.$$

根据步骤6得到系统通信拓扑的邻接矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0468 & 0.0766 & 0.0449 & 0.0703 & 0.0894 & -0.0163 & -0.0676 \\ 0.0468 & 0.0 & 0.1679 & 0.0260 & 0.0100 & -0.0373 & 0.0298 & 0.0330 \\ 0.0766 & 0.1679 & 0.0 & -0.0448 & 0.0612 & 0.0949 & -0.0244 & -0.0072 \\ 0.0449 & 0.0260 & -0.0448 & 0.0 & -0.0019 & -0.0161 & 0.0712 & 0.1038 \\ 0.0703 & 0.0100 & 0.0612 & -0.0019 & 0.0 & 0.0081 & 0.0247 & 0.0470 \\ 0.0894 & -0.0373 & 0.0949 & -0.0161 & 0.0081 & 0.0 & 0.0043 & 0.0215 \\ -0.0163 & 0.0298 & -0.0244 & 0.0712 & 0.0247 & 0.0043 & 0.0 & 0.1426 \\ -0.0676 & 0.0330 & -0.0072 & 0.1038 & 0.0470 & 0.0215 & 0.1426 & 0.0 \end{pmatrix}$$

在此通信拓扑下,系统总能量最少,系统个体分组一致,如图2所示.

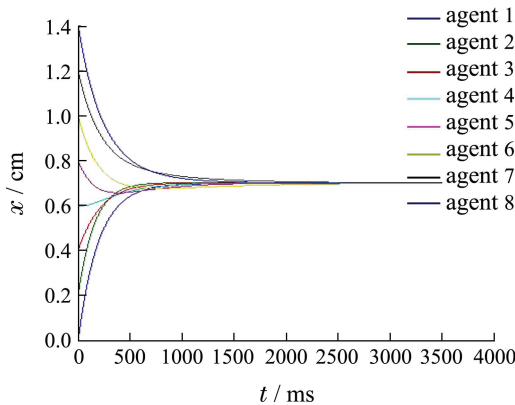


图1 通信拓扑最优系统的一致性

Fig. 1 Consensus of the system for the optimal interaction topology

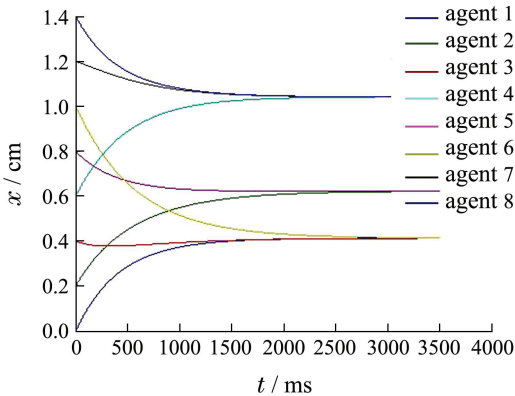


图2 通信拓扑最优系统的分组一致性

Fig. 2 Group consistency of the system for the optimal interaction topology

4 结束语(Concluding remarks)

文章仅研究了一阶线性控制下的多智能体系统一致收敛或分组一致收敛的通信拓扑设计,及相应的最优设计问题.对于有向图,非线性控制下的一阶系统以及线性控制下的高阶系统的通信拓扑设计问题正是作者后继研究的课题.

参考文献(References):

[1] OLFATI-SABER R, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems [J] // *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 215 – 233.

- [2] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [3] XIAO L, BOYD S. Fast linear iterations for distributed averaging [J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 53(1): 65 – 78.
- [4] SUN Y G, WAN G L, XIE G M. Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays [J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(2): 175 – 183.
- [5] LI T, ZHANG J F. Consensus conditions of multi-agent systems with time-varying topologies and stochastic interaction noises [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(9): 2043 – 2057.
- [6] LI T, FU M Y, XIE L H, et al. Distributed consensus with limited interaction datarate [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(2): 279 – 292.
- [7] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [8] TAN Fuxiao, GUAN Xinping, LIU Derong. Consensus protocol in networked multi-agent systems with non-balanced topology [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(10): 1087 – 1092. (谭拂晓, 关新平, 刘德荣. 非平衡拓扑结构的多智能体网络系统一致性协议 [J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(10): 1087 – 1092.)
- [9] LI Junbing, YAN Weisheng, FANG Xinpeng. Equilibrium of consensus problems for discrete-time multi-agent systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(4): 513 – 519. (李俊兵, 严卫生, 房新鹏. 离散多智能体系统信息一致性的平衡点 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(4): 513 – 519.)
- [10] CHEN Yangzhou, GE Yanrong, SONG Xuejun. Partial-stability-based approach to consensus problem in discrete-time multi-agent systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(4): 438 – 443. (陈阳舟, 盖彦荣, 宋学君. 基于部分稳定性方法的离散时间多智能体系统的一致性 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(4): 438 – 443.)
- [11] CLAUDIO A. Consensus problems on networks with antagonistic interactions [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(4): 935 – 946.
- [12] XIA W G, CAO M. Clustering in diffusively coupled networks [J]. *Automatica*, 2011, 47(11): 2395 – 2405.
- [13] MARIA E V, PRADEEP M. On the consensus and bipartite consensus in high-order multi-agent dynamical systems with antagonistic interactions [J]. *Systems & Control Letters*, 2014, 66(4): 94 – 103.
- [14] WANG Qiang, WANG Yuzhen, YANG Renming. Design and analysis of group-consensus protocol for a class of multi-agent systems [J]. *Control and Decision*, 2013, 28(3): 369 – 373. (王强, 王玉振, 杨仁明. 一类多智能体系统分组一致控制协议的设计与分析 [J]. *控制与决策*, 2013, 28(3): 369 – 373.)

作者简介:

袁玩贵 (1974–), 男, 博士研究生, 研究方向为多智能体系统一致性分析, E-mail: ywg_602@163.com;

屈百达 (1956–), 男, 博士生导师, 研究方向为先进控制理论与技术, E-mail: qbd518@aliyun.com.