

由回差阵奇异值求稳定裕度的退化算法

李信栋^{1†}, 苟兴宇^{1,2}

(1. 北京控制工程研究所, 北京 100190; 2. 空间智能控制技术重点实验室, 北京 100190)

摘要: 本文研究使用回差阵奇异值求多输入多输出(MIMO)线性定常系统稳定裕度的方法. 首先对此方法进行退化分析, 得到求解单输入单输出(SISO)线性定常系统稳定裕度的算法步骤. 在此基础上, 讨论退化所得算法与传统稳定裕度的关系; 进一步地, 详细分析此退化算法相比传统稳定裕度的优势, 进而指出当系统的增益和相位同时变化时, 系统Nyquist曲线 $g(j\omega)$ 到临界点 $(-1, j0)$ 的最短距离 $\min |1 + g(j\omega)|$ 可作为一种更加合理的稳定裕度指标. 最后, 通过对实例进行数值仿真, 说明本文所提退化算法可以克服传统稳定裕度局限性, 同时与传统稳定裕度结合得到比较完整的SISO线性系统稳定裕度衡量体系.

关键词: 回差阵奇异值法; 稳定裕度; 奈奎斯特曲线; 鲁棒性

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Degraded algorithm for determining stability margin by using singular value of the return difference matrix

LI Xin-dong^{1†}, GOU Xing-yu^{1,2}

(1. Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China;

2. Science and Technology on Space Intelligent Control Laboratory, Beijing 100190, China)

Abstract: We investigate the algorithm for determining the stability margins for multi-input multi-output (MIMO) linear time-invariant systems by using singular values of the return difference matrix. First, we consider the degraded algorithm to develop the procedures for determining stability margins for single-input single-output (SISO) linear time-invariant systems. On this basis, we investigate the relationship between the results obtained from the degraded algorithm and the traditional stability margins. Next, we analyze in detail the advantages of the degraded algorithm over the traditional methods in determining the stability margins and point out that, when the gain and phase are varying simultaneously, the shortest distance $\min |1 + g(j\omega)|$ between the Nyquist plot $g(j\omega)$ and the critical point $(-1, j0)$ can be considered as a more appropriate stability margin index. Finally, the numerical simulation results of practical examples demonstrate that the proposed algorithm is able to overcome the limitations of the traditional methods. Meanwhile, a more perfect stability margin measurement system can be obtained by incorporating the proposed degraded stability margins with the classical stability margin.

Key words: singular value of the return difference matrix; stability margin; Nyquist plot; robustness

1 引言(Introduction)

在经典控制理论中, 对单输入单输出(single-input single-output, SISO)线性定常系统的稳定裕度问题, 已经进行了深入的研究并得到公认的定义, 目前一般采用增益裕度和相位裕度指标来衡量, 两者分别表示系统达到临界稳定所容许回路增益或者相角变化的最大值^[1]. 随着对SISO线性系统稳定裕度研究的深入, 对某些特定控制方案可得出明确稳定裕度结果, 文献[2-4]针对SISO线性系统LQ最优状态反馈调节器的增益裕度和相位裕度进行研究, 结果表明线性二

次型调节器(linear quadratic regulator, LQR)控制系统可以具有至少 $\pm 60^\circ$ 的相位裕度以及无穷大的增益裕度, 具有重要工程意义. 文献[5]分析了采用模型参考自适应方法的控制系统增益裕度问题, 结果表明连续时间SISO直接模型参考自适应的控制系统具有 $(0, +\infty)$ 的增益裕度. 此外, 对于具有参数不确定性的区间系统稳定裕度也得到了许多成果^[6-7].

但是, 也应该看到传统的增益裕度和相位裕度概念和以上成果都是分别针对系统幅值和相角而言, 并没解决增益和相角同时摄动情况下系统的相对稳定

收稿日期: 2015-06-24; 录用日期: 2015-11-26.

[†]通信作者. E-mail: lxdongliu@163.com; Tel.: +86 15201169416.

本文责任编辑: 段志生.

国家自然科学基金项目(41274041)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (41274041).

性问题. 而且, 对于某些系统的鲁棒稳定性, 传统的增益裕度和相位裕度合在一起仍然可能是不够的, 如周克敏等^[8]书中所述, 对于某些系统当增益和相角同时变化时, 增益裕度和相位裕度不能准确指出系统的鲁棒性. 这恰是传统稳定裕度概念的不足之处. 众多学者已经注意到这个问题, 并为此做了许多工作. 其中, Latchman和Crisalle等人提出了临界方向理论(critical direction theory)^[9-10], 在某一频率点处给出临界方向和临界扰动半径的概念, 并通过定义临界灵敏度扰动半径, 得到Nyquist鲁棒灵敏度裕度这一指标, 用来反映系统鲁棒稳定裕度. 文献[11]尝试寻求一种能将经典控制中增益和相位裕度与现代控制设计技术联系起来方案, 可实现增益裕度和相位裕度指标向诸如 H_∞ 和 μ 分析法^[12]等现代控制器设计技术指标的转化. 文献[13]讨论了SISO系统两种特殊不确定情形下 $\mu(\omega)$ 分别与增益裕度和相位裕度之间的关系; 并在此基础上进一步建立 $\mu(\omega)$ 与可同时确保的增益裕度和相位裕度关系. 然而, 此方法的不足之处在于系统的 $\mu(\omega)$ 值求取较困难且不易获得准确值, 使得稳定裕度结果具有保守性. 文献[4, 14-15]针对MIMO线性定常系统的稳定裕度提出了回差阵奇异值法的概念. 利用奇异值理论, 通过在输入端引入不确定性量测阵, 建立回差阵最小奇异值与传统增益裕度和相位裕度的关系, 从而确定系统保持稳定所容许每个通道增益或相角的同时变化范围. 可以看出回差阵奇异值法有以下几点优势: 1) 算法的重点在于求解整个频带范围内系统回差阵的最小奇异值, 计算量较小; 2) 整个算法求解过程中只用到系统回差阵信息, 有效避免了系统各回路间耦合作用, 降低了分析难度.

针对传统稳定裕度在处理增益和相角同时摄动时, 现有方法不能给出系统鲁棒稳定性的准确判断这一问题, 本文将进行深入分析和研究. 基于MIMO线性定常系统稳定裕度的回差阵奇异值法, 对此方法进行退化研究, 得到一种求解SISO线性系统稳定裕度的新算法. 进一步地, 结合Nyquist理论讨论退化所得算法与传统稳定裕度的关系, 并在此基础上, 分析这种算法对于增益和相角同时摄动情形下判断系统鲁棒稳定性的优势, 解释能够克服传统稳定裕度局限性的原因, 从而得到比较完善的SISO线性定常系统稳定裕度衡量体系.

2 回差阵奇异值法的退化(Degradation analysis of singular value of the return difference matrix)

文献[14-15]已对回差阵奇异值法这一MIMO线性系统稳定裕度理论进行了详细研究, 本节将对此方法进行退化分析, 研究其退化为SISO线性系统的情形^[16]. 具体地, 考查一般单位反馈线性系统 $g(s)$, 在输入端引入不确定性量测项 $p(s)$, 如图1所示. 定义不确

定性量测项 $p(s) = ke^{-\tau s}$, 令 $s = j\omega$, 则可得 $p(j\omega)$ 如下:

$$p(j\omega) = ke^{j\vartheta}, \quad (1)$$

其中: 参数 k 表示系统的增益, ϑ 表示系统容许滞后的相角.

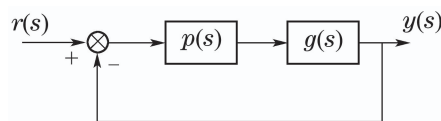


图1 一般单位反馈系统模型

Fig. 1 Unit feedback system

接下来探讨系统达到临界稳定状态时参数 k 和 ϑ 所能变化的最大范围. 首先, 本文假定标称状态下系统是稳定的, 即满足条件

$$|1 + g(j\omega)| > 0. \quad (2)$$

引入不确定性 $p(s)$, 若使系统仍保持稳定, 则有 $|1 + p(j\omega)g(j\omega)| > 0$. 利用分离特性:

$$1 + pg(j\omega) = \left[\left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{1}{1 + g(j\omega)} + 1 \right] [1 + g(j\omega)]p.$$

假设 $|p(j\omega)| > 0$, 结合式(2), 上式两边同时取幅值即可得

$$\left| \left(\frac{1}{p(j\omega)} - 1 \right) \frac{1}{1 + g(j\omega)} + 1 \right| > 0. \quad (3)$$

分析知不等式(3)对应于3种情形:

$$\left| \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{1}{1 + g(j\omega)} \right| > 1, \quad (4a)$$

$$\left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{1}{1 + g(j\omega)} = 1, \quad (4b)$$

$$\left| \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{1}{1 + g(j\omega)} \right| < 1. \quad (4c)$$

结合文献[16], 分析可知对于一般性的系统 $g(j\omega)$, 只有不等式(4c)才是使不等式(3)成立的充分条件. 因此, 对不等式(4c)进一步整理得

$$\left| \frac{1}{p(j\omega)} - 1 \right| < |1 + g(j\omega)|. \quad (5)$$

考虑回路中增益和相角的变化, 将方程(1)代入上式, 可得确保系统稳定的充分条件

$$\left| \frac{1}{p(j\omega)} - 1 \right| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 + \frac{2}{k}(1 - \cos \vartheta)} \leq \min_{\omega} |1 + g(j\omega)|. \quad (6)$$

将系统Nyquist曲线到临界点 $(-1, j0)$ 的最短距离 $\min |1 + g(j\omega)|$ 作为参数, 若 $\min |1 + g(j\omega)| = m$, 根据上式, 令 $\vartheta = 0^\circ$, 可得增益裕度GM和参数 m 的关系式; 令 $k = 1$, 可得相位裕度PM和 m 的关系式. 具体地, 回差阵奇异值法退化得到SISO系统的增益裕度

GM和相位裕度PM分别为

$$GM = -20 \lg(1 - m) \quad PM = 2 \arcsin \frac{m}{2}. \quad (7)$$

上面表达式给出了保证系统稳定容许各回路增益能够增大的最大值, 以及保证系统稳定容许各回路相角能够滞后的最大值.

3 退化SISO系统稳定裕度与传统稳定裕度的关系 (Relationship between the degradation results and classical stability margins)

由式(7)可知, 退化的回差阵奇异值法同样采用增益裕度和相位裕度来衡量SISO系统的稳定裕度. 但是, 与传统控制理论中稳定裕度需要两个频率点(即截止频率和穿越频率)来分别确定系统相位裕度和增益裕度两个裕度指标不同, 回差阵奇异值法是在一个频率点处得到了系统增益裕度和相位裕度两者的计算结果, 并且求得的增益裕度和相位裕度都与系统Nyquist曲线到临界点(-1, j0)的最短距离 $\min |1+g(j\omega)|$ 这一个参数有关. 除此之外, 退化的稳定裕度算法与传统稳定裕度算法的另一不同之处在于: 退化得到的稳定裕度算法的增益和相角之间满足关系式(6), 而传统稳定裕度算法中增益和相角并没有建立类似相互之间的直接联系.

接下来针对稳定系统, 分析退化得到的SISO系统稳定裕度与传统稳定裕度的关系, 在复平面上绘制退化方法所得稳定裕度与传统稳定裕度的示意图, 如图2所示. 图中: O 是原点, A 是系统穿越频率点, B 是截止频率点(单位圆与Nyquist图的交点), D 是临界点(-1, j0), E 是以临界点 D 为圆心、以临界点到Nyquist曲线上的最短距离为半径的圆与负实轴的交点, F 是Nyquist曲线上到临界点距离最近的点, C 是线段 DE 垂直平分线上的点, 且使得 $CD = CE = 1$. 连接 BD , 那么得到三角形 $\triangle OBD$ 和 $\triangle CDE$, 同样有 $OD = OB = 1$.

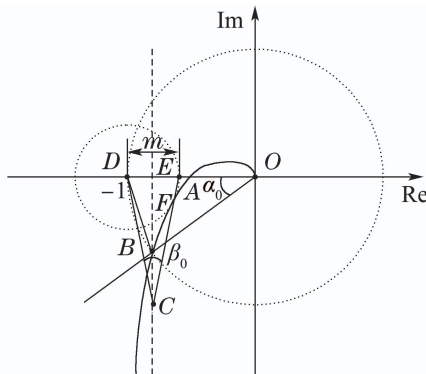


图2 退化所得SISO系统稳定裕度与传统稳定裕度在复平面的示意图

Fig. 2 Sketch map of the degradation stability margins and the classical stability margins

由图可知, 传统控制理论下的增益裕度和相位裕

度为

$$GM = \frac{1}{|OA|}, \quad PM = \angle BOD = \alpha_0. \quad (8)$$

而对于由回差阵奇异值法退化得到SISO系统稳定裕度的情形, 有 $\min |1 + g(j\omega)| = m$, 根据如式(7)所示稳定裕度表达式, 可知增益裕度和相位裕度在图中表示为

$$GM = \frac{1}{1 - m} = \frac{1}{|OE|},$$

$$PM = 2 \arcsin \frac{m}{2} = \angle DCE = \beta_0. \quad (9)$$

因此, 讨论退化SISO系统稳定裕度与传统稳定裕度的关系问题就转化为分别比较 $|OA|$ 和 $|OE|$ 以及 α_0 和 β_0 的大小问题. 分析知系统Nyquist曲线到临界点(-1, j0)距离最近的点 F 可出现在曲线上的任意位置. 首先, 点 F 可以位于3个特殊点处: 原点 O 处、穿越频率点 A 处、截止频率点 B 处. 其次, 这3个特殊点又将整个系统Nyquist曲线分为3段. 因此, 点 F 在系统Nyquist曲线上有6种位置分布情况, 可依据点 F 所处的不同位置, 来讨论传统控制理论稳定裕度与退化得到的SISO系统稳定裕度的关系.

1) 当点 F 恰好位于原点 O 处时, 说明参数 $\min |1+g(j\omega)| = m = 1$, 得知以临界点为圆心的单位圆与虚轴在原点处相切, 此时退化得到的SISO系统增益裕度和相位裕度分别为 ∞ 和 60° . 传统控制理论中的增益裕度亦为 ∞ , 而相位裕度则必定大于 60° , 这是因为此时的截止频率点 B 位于以原点为圆心单位圆上 60° 滞后相角所对应点的右边.

传递函数分子的阶次 m 和分母的阶次 n 满足 $n = m + 1$ 时的系统一般属于此类情况.

2) 当点 F 恰好位于穿越频率点 A 处时(在负实轴上), A, E, F 这3个点重合, 见图3.

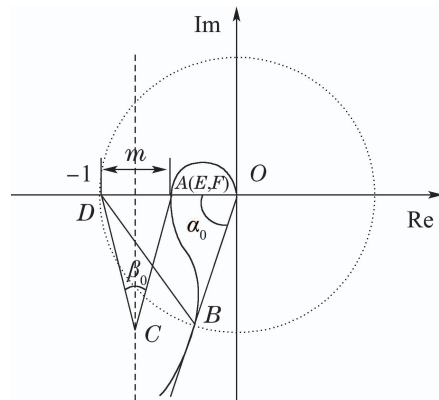


图3 点 F 在负实轴时退化得到SISO系统稳定裕度与传统稳定裕度示意图

Fig. 3 Sketch map of the classical stability margins and the degradation stability margins with the point F on the negative real axis

可知 $|OA| = |OE|$, 根据式(8)-(9), 得知两者的增

益裕度相等。

对于相位裕度, 由图知最短距离 $|AD|$ 必满足 $|AD| < |BD|$, 而 $|AD|$ 和 $|BD|$ 分别属于三角形 $\triangle ACD$ 和 $\triangle OBD$, 且两三角形其余两边都相等且都等于1。那么根据几何理论, 可知若两三角的另一条边 $|AD| < |BD|$, 则这两条边对应的角必有 $\angle ACD < \angle BOD$ 。而 $\angle ACD$ 是退化方法对应的相位裕度, $\angle BOD$ 是传统方法对应的相位裕度, 说明 $\beta_0 < \alpha_0$, 即退化方法计算的相位裕度小于传统方法计算的相位裕度。

传递函数属于I型系统、存在振荡环节且其分子的阶次 m 和分母的阶次 n 满足 $n = m + 2$, 这种系统一般符合点 F 位于穿越频率点 A 处的情形。

3) 当点 F 恰好位于截止频率点 B 处时(原点为圆心单位圆上), B 和 F 两点重合, 可知 $|DB| = |DF|$, 因此, 图2中 $\triangle OBD \cong \triangle CDE$, 进而有 $\angle DCE = \angle BOD$, 即 $\beta_0 = \alpha_0$, 说明退化方法的相位裕度等于传统方法的相位裕度。

对于增益裕度, 由图2可知, 必然有 $|DB| = |DF| = |DE| < |DA|$, 根据增益裕度表达式(8)–(9), 显然 $\frac{1}{|OE|} < \frac{1}{|OA|}$, 即退化方法计算的增益裕度小于传统方法计算的增益裕度。

传递函数属于II型系统且其分子的阶次 m 和分母的阶次 n 满足 $n = m + 2$, 这种系统一般符合点 F 位于截止频率点 B 处的情形。

4) 当点 F 位于Nyquist曲线上 \widehat{OA} 弧段时, 从图2中得知 $|DF| = |DE| < |DA|$, 同样根据式(8)–(9), 可得 $\frac{1}{|OE|} < \frac{1}{|OA|}$, 即退化方法计算的增益裕度小于传统方法计算的增益裕度。

对于相位裕度, 可知线段 $|DE| < |BD|$, 类似于第2)种情形, 三角形 $\triangle CDE$ 和 $\triangle OBD$ 都是两条边长等于1的等腰三角形, 而底边较短的三角形, 其对应的顶角较小, 即 $\angle DCE < \angle BOD$ 。因此, 退化方法计算的相位裕度小于传统方法计算的相位裕度。

5) 当点 F 位于Nyquist曲线上 \widehat{OA} 弧段和 ω 从0开始取值直到截止频率点 B 这一段曲线上时, 与第(4)种情形一样, 最短距离 $|DF|$ 满足 $|DF| = |DE| < |DA|$, 说明退化方法计算的增益裕度总是小于传统方法计算的增益裕度。

此外, 总有关系式 $|DF| = |DE| < |BD|$, 正如第2)和第4)种情形分析的那样, 表示退化方法的相位裕度 $\angle DCE$ 总小于表示传统方法相位裕度的 $\angle BOD$ 。

针对上述点 F 在Nyquist曲线上所处的6种不同位置的讨论进行总结, 可知由MIMO线性定常系统稳定裕度的回差阵奇异值法而退化得到的SISO系统的增益裕度和相位裕度总是小于或等于传统增益裕度和

相位裕度。

4 退化所得SISO系统稳定裕度相较传统稳定裕度的优势(Singular value of the inverse return difference matrix)

文献[8]指出了传统稳定裕度在分析系统鲁棒稳定性问题时的局限性, 主要体现在虽然系统可能同时具有较大增益裕度和相位裕度, 但发生增益和相角同时摄动情况时, 系统鲁棒稳定性仍可能较差。这是因为传统控制理论是对增益裕度和相位裕度指标分别进行定义, 两者之间没有明确联系, 导致无法衡量增益和相角同时变化时系统的相对稳定程度。由MIMO线性定常系统回差阵奇异值法退化得到的SISO系统稳定裕度算法则可以很好地克服这一缺点, 它通过参数 $\min |1 + g(j\omega)|$ 建立起系统增益和相角之间的关系。这一点使得退化所得稳定裕度算法相比传统算法更具有优势。

结合上一节关于退化所得SISO系统稳定裕度与传统控制理论稳定裕度关系的讨论, 经研究分析得到两点结论:

1) 回差阵奇异值法退化的结果仍然采用如式(7)所示增益裕度和相位裕度指标表达, 而且结果不超过传统增益裕度和相位裕度指标; 此外, 式(7)所示结果同样只是分析幅值和相角单独摄动时的单输入单输出系统稳定裕度, 不能解决增益和相角同时变化情况下的系统鲁棒稳定性判别问题。

2) 进一步分析退化算法, 可直接应用算法中的最短距离参数 $\min |1 + g(j\omega)|$, 即值 m 来衡量系统稳定裕度。

如果把 m 当做一个广义稳定裕度的定义来看, 则它既包含增益裕度信息又包含相位裕度信息, 是由两部分融合在一起的结果, 等式

$$\sqrt{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 + \frac{2}{k}(1 - \cos \vartheta)} = \min_{\omega} |1 + g(j\omega)| = m \quad (10)$$

明确表达了系统幅值和相角之间的联系。那么, 只要给定系统 $g(s)$, 就可得到系统Nyquist曲线到临界点 $(-1, j0)$ 的最短距离 $\min |1 + g(j\omega)|$, 然后根据式(10), 任意指定一个确保系统稳定所容许的幅值变化值, 就可得到同时容许的相应相角变化的最大值; 反之亦然。

进一步地, 对于SISO系统, 可根据 m 与增益 k 和相角 ϑ 的关系式进行绘图, 如图4所示。

若系统 $g_1(s)$ 的Nyquist曲线到临界点 $(-1, j0)$ 的最短距离为 m_1 , 指定一个确保系统稳定所容许的幅值变化值 k_1 , 则根据式(10)可得到同时容许的相角最大变化值为

$$\vartheta_1 = \arccos \frac{k_1^2 + 1 - k_1^2 m_1^2}{2k_1} \quad (11)$$

同样地,指定一个确保系统稳定所容许的相角变化值 ϑ_2 ,则根据式(10)可得到同时容许的幅值变化为

$$k_2 = \frac{\cos \vartheta_2 + \sqrt{\cos^2 \vartheta_2 + m_1^2 - 1}}{1 - m_1^2}. \quad (12)$$

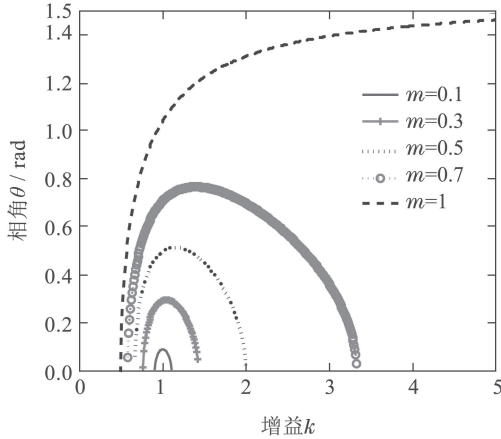


图4 由回差阵奇异值法退化得到的SISO系统增益裕度和相位裕度关系图

Fig. 4 Relationship between gain margin and phase margin of the degradation results based on the singular value of the return difference matrix

从而给出如下定理:

定理 1 对于已知SISO线性定常系统 $g(s)$, 可通过等式

$$\sqrt{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 + \frac{2}{k}(1 - \cos \vartheta)} = \min_{\omega} |1 + g(j\omega)| = m$$

得到相角不变时,系统保证稳定所容许回路增益增大的最大值为 $-20 \lg(1 - m)$; 增益不变时,系统保证稳定所容许回路相角滞后的最大值为 $2 \arcsin \frac{m}{2}$. 除此之外,上式更加明确指出了确保系统稳定所容许的幅值和相角同时变化的范围,即可容许幅值增大 k_1 倍的同时相角有式(11)所示的滞后 ϑ_1 , 或者容许相角滞后 ϑ_2 的同时幅值有如式(12)所示的增大 k_2 倍.

因此,将本文研究的针对SISO线性定常系统的回差阵奇异值法退化结果与传统稳定裕度相结合,可得到克服传统稳定裕度局限性的比较完善的SISO系统稳定裕度衡量体系.

5 算例分析(Example analysis)

下面以类似于周克敏^[8]书中所举系统为例进行分析,可知系统开环传递函数为

$$L(s) = g(s)k(s) = \frac{1.9 - s}{1.9s - 1} \frac{s + 3.3}{3.3s + 1} \frac{s + 0.55}{0.55s + 1} \frac{1.7s^2 + 1.5s + 1}{s^2 + 1.5s + 1.7}.$$

通过传统控制理论求得增益裕度和相位裕度分别为6.143 dB的上增益裕度和-6.143 dB的下增益裕度, 32.59° 的相位裕度. 采用由MIMO系统退化而来的

SISO系统稳定裕度算法,可首先求得

$$\min |1 + g(j\omega)k(j\omega)| = 0.3353,$$

然后根据式(7)得到增益裕度和相位裕度:

$$GM = -20 \lg(1 - m) = 3.55 \text{ dB},$$

$$PM = 2 \arcsin\left(\frac{m}{2}\right) = 19^\circ.$$

考查上面实例,若令幅值增大1.2倍(1.584 dB),那么根据式(10),可得保证系统稳定所容许相角滞后 18.34° ,这就说明系统幅值增大1.2倍同时相角滞后 18.34° 时,系统仍是稳定的. 对此幅值和相角同时扰动情形进行仿真验证,作开环传递函数幅值增大1.2倍同时相角滞后 18.34° 时的系统Nyquist曲线,见图5.

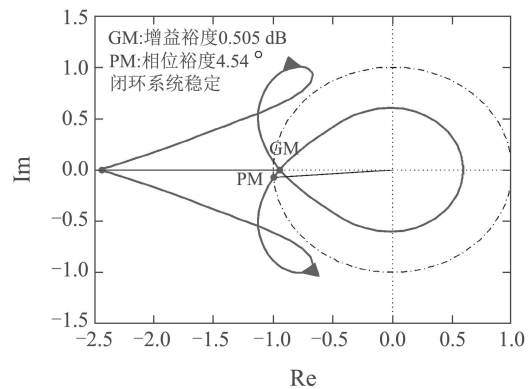


图5 幅值增大1.2倍同时相角滞后 18.34° 时Nyquist曲线
Fig. 5 The Nyquist plot with the amplitude increasing to 1.2 times and the phase lag 18.34° simultaneously

由图可知,系统仍然是稳定的,但是其Nyquist曲线已经非常接近临界点 $(-1, j0)$, 容易变得不稳定. 若继续增大幅值至1.3倍(2.279 dB),同时相角滞后保持 18.34° 不变,绘制此时Nyquist曲线如图6所示,可看出系统刚刚变得不稳定.

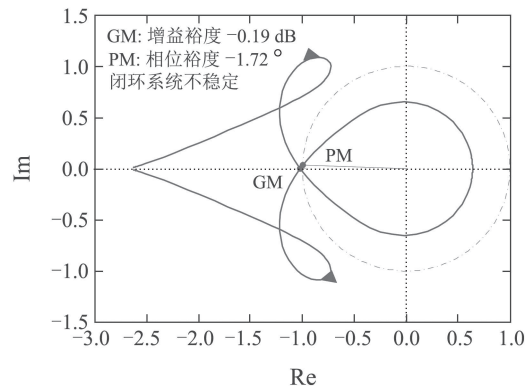


图6 幅值增大1.3倍同时相角滞后 18.34° 时Nyquist曲线
Fig. 6 The Nyquist plot with the amplitude increasing to 1.3 times and the phase lag 18.34° simultaneously

在实例中幅值增大1.3倍(2.279 dB),相角滞后 18.34° ,都远小于传统算法求得的6.143 dB增益裕度和 32.59° 的相位裕度,验证了传统稳定裕度不能准确

反映增益和相角同时摄动下的系统鲁棒稳定性这一结论, 与之对应的, 由式(10)得到的增益增大1.2倍(1.584 dB)和相角滞后 18.34° 的结果, 恰好说明退化所得稳定裕度算法可以有效解决这一问题.

6 结论(Conclusions)

通过上述深入分析研究, 退化所得的SISO系统稳定裕度算法解决了增益和相角同时摄动时系统相对稳定性的判断问题. 可认为直接用参数 m 作为稳定裕度的广义定义比传统的稳定裕度定义要更加合理, 不仅给出如式(7)所示增益和相角单独变化所容许变化范围; 而且克服了传统控制理论稳定裕度对于增益和相角同时摄动时系统鲁棒稳定性判断不足的缺陷. 此外, 通过绘制图4, 使得幅值和相角的变化范围以及相互之间联系更加直观.

本文的研究说明回差阵奇异值法不仅适用于MIMO系统的稳定裕度求解, 而且对SISO系统也是适用的, 定义的参数 m 是一个比较一般性的既对SISO系统有效也对MIMO系统有效的广义稳定裕度指标.

参考文献(References):

- [1] KATSUHIKO O. *Modern Control Engineering* [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011.
- [2] ANDERSON B D O, MOORE J B. *Linear Optimal Control* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.
- [3] SAFONOV M G, ATHANS M. Gain and phase margin for multiloop LQG regulators [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(2): 173 – 179.
- [4] LEHTOMAKI N A, SANDELL N R, ATHANS M. Robustness results in linear-quadratic Gaussian based multivariable control designs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, 26(1): 75 – 93.
- [5] SANG Q, TAO G. Gain margins of model reference adaptive control systems [C] // *Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Chongqing, China: IEEE, 2008: 2946 – 2951.
- [6] HOTE Y V, GUPTA J R P, CHOUDHURY D R. Kharitonov's theorem and routh criterion for stability margin of interval systems [J]. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2010, 8(3): 647 – 654.
- [7] BHIWANI R J, PATRE B M. Stability analysis of fuzzy parametric uncertain systems [J]. *ISA Transactions*, 2011, 50(4): 538 – 547.
- [8] ZHOU K M, DOYLE J C, GLOVER K. *Robust and Optimal Control* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [9] LATCHMAN H A, CRISALLE O D. Exact robustness analysis for highly structured frequency domain uncertainties [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Seattle, Washington: IEEE, 1995: 3982 – 3987.
- [10] AL-SHAMALI S A, JI B W, CRISALLE O D, et al. The nyquist robust sensitivity margin for uncertain closed-loop systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2005, 15(14): 619 – 634.
- [11] DEODHARE G, PATEL V V. A “Modern” look at gain and phase margins-an H_∞/μ approach [C] // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. Boston, MA, USA: AIAA, 1998: 325 – 335.
- [12] DOYLE J C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties [J]. *IEE Proceedings Part D*, 1982, 129(6): 242 – 250.
- [13] TSAO T T, LEE F C, AUGENSTEIN D. Relationship between robustness μ -analysis and classical stability margins [C] // *IEEE Aerospace Conference*. Snowmass, USA: IEEE, 1998, 4: 481 – 486.
- [14] SAFONOV M G, LAUB A J, HARTMANU G L. Feedback properties of multivariable systems: the role and use of the return difference matrix [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, 26(1): 47 – 65.
- [15] MUKHOPADHYAY V, NEWSOM J R. Application of matrix singular value properties for evaluating gain and phase margins of multiloop systems [C] // *AIAA Guidance Navigation and Control Conference*. California: AIAA, 1982: 420 – 428.
- [16] 李信栋, 苟兴宇. 多输入多输出线性定常系统稳定裕度的分析与改进 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(1): 105 – 111.
(LI Xindong, GOU Xingyu. Analysis and improvement of stability margin for multi-input multi-output linear time-invariant systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(1): 105 – 111.)

作者简介:

李信栋 (1986–), 男, 博士研究生, 研究方向为航天器姿态控制, E-mail: lxdongliu@163.com;

苟兴宇 (1970–), 男, 研究员, 博士生导师, 研究方向为航天器姿态、轨道动力学与控制, E-mail: gouxy@bice.org.cn.