

# 分数阶细胞神经网络自适应同步控制设计及电路仿真

张小红<sup>†</sup>, 俞梁华

(江西理工大学 信息工程学院, 江西 赣州 341000)

**摘要:** 构建一个新的分数阶细胞神经网络系统, 设计驱动系统非线性参数已知而响应系统非线性参数值未知的驱动-响应系统, 运用自适应同步控制器及参数自适应调整律实现该驱动-响应系统同步. 数值仿真和动力学分析结果表明新的分数阶细胞神经网络系统具有混沌特性. 结合分数阶电路理论设计出新的分数阶细胞神经网络系统同步控制的电路原理图. 本方案实际可实现4096种多元组合电路, 为简洁起见, 选取分数阶 $q_i$  ( $i=1, 2, 3$ )相同值(即 $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$ )的组合电路进行电路仿真. 仿真结果表明, 多元电路仿真和数值仿真实验结果具有很高的吻合度. 从而证实了该自适应同步控制方法在物理上的可实现性, 在工程领域中具有现实的应用价值.

**关键词:** 同步控制; 自适应; 分数阶; 细胞神经网络; 混沌

中图分类号: TP391 文献标识码: A

## Fractional-order cellular neural networks adaptive synchronization control circuit design and simulation

ZHANG Xiao-hong<sup>†</sup>, YU Liang-hua

(School of Information, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou Jiangxi 341000, China)

**Abstract:** On a new fractional order cellular neural networks system, building a driver-response system which the nonlinear in the driver system is known, while in response is not. Use the adaptive synchronization controller and adaptive adjustment law to make the driver-response system to be synchronized. Numerical simulation and dynamic analysis results show that the new system of fractional order cellular neural networks has chaotic characteristics and the correctness of the adaptive synchronization control method. Combining the theory of fractional order circuit designed the synchronous control circuit schematic diagram of the new fractional order cellular neural networks system. In fact, this scheme can realize 4096 kinds of multi-combination circuits. For the sake of brevity, selected the same fractional-order values (namely  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$ ) for circuit simulation. The simulation results showed that multiple circuit simulation and numerical simulation results had high inosulation. Thus it is proved that the adaptive synchronization control method can be realized in physics and has practical application value in engineering field.

**Key words:** synchronization control; adaptive; fractional; cellular neural networks; chaos

### 1 引言 (Introduction)

混沌的发现是20世纪继相对论和量子力学之后物理学中最伟大的发现之一<sup>[1]</sup>, 混沌运动是一种确定性的非线性系统所独有的运动形式, 表现为从全局范围看为有限运动而从局部角度看则为不规则的运动. 混沌的特点是它对扰动的极端敏感性, 即两个混沌系统从微小差别的初始条件出发, 经过一定的时间会快速发散, 最终导致运动轨迹完全不同. 正是由于混沌信号的高度随机性、不可预测性、高度复杂性, 以及确定性方程的易于实现性, 使其在工程技术上的拥有较大研究价值及其诱人的应用前景<sup>[2-3]</sup>. 细胞神经网络

(cellular neural networks, CNN)<sup>[4-5]</sup>是一种与人类神经网络相似的并行计算仿真模型, 局部连接性质简单易于超大规模电路(VLSI)实现, 可产生非线性动力学混沌现象甚至超混沌复杂行为. 细胞神经网络在预测学、图像处理、模式识别、保密通信、逻辑阵列计算机的构建等方面已经取得了广泛的发展<sup>[6-9]</sup>. 而混沌同步控制作为混沌应用的关键环节已经成为当今的研究热点之一<sup>[10-11]</sup>, 其对细胞神经网络系统同样重要, 因此对细胞神经网络系统的同步控制研究具有现实意义和实用价值.

自从1990年 L. M. Pecora 和 T. L. Carrol 提出混沌

收稿日期: 2015-06-28; 录用日期: 2015-12-17.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: xiaohongzh@263.net; Tel.: +86 797-8312249.

本文责任编辑: 张化光.

国家自然科学基金项目(61363076), 江西省自然科学基金项目(20142BAB207020), 江西省研究生创新专项基金(YC2014-S368)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61363076), Natural Science Foundation of Jiangxi Province (20142BAB207020) and Innovation Fund for Graduate Students of Jiangxi Province (YC2014-S368).

同步的思想以来,混沌同步的研究得到了蓬勃发展.目前出现的同步方法有:驱动-响应法、主动-被动法、控制观测器法、主动控制法、单向耦合法、自适应同步法等<sup>[12-13]</sup>.大部分的同步方案都是基于对系统结构和参数都准确了解的基础上实现的,然而事实上很难通过外部测量准确得到系统参数,而且即使有些系统已经知道其结构和参数,由于外部扰动及噪声的干扰,也很难使得两混沌系统的参数完全相同.

分数阶微积分和整数阶微积分几乎具有同样长的发展历史,整数阶微积分是分数阶微积分的特例,整数阶系统是对实际混沌系统的理想化处理<sup>[14]</sup>.对于实际工程应用中,分数阶系统的特点和结构更接近现实<sup>[15-16]</sup>,随着分数阶微积分的不断发展,分数阶混沌系统的同步控制比整数阶混沌系统的同步控制在保密通信、系统控制等领域具有更突出应用价值和发展前景.至今为止众多的研究比较集中在整数阶混沌系统的同步控制上,利用分数阶实现细胞神经网络自适应同步控制和参数辨识却鲜有报道.

至今为止,虽然众多学者对于细胞神经网络的动态特性,动力学行为及各种工程应用等都有较多的论文著作发表,例如细胞神经网络基于阈值激励函数的平衡点分析<sup>[17]</sup>,基于细胞神经网络的飞行目标识别<sup>[18]</sup>,忆阻细胞神经网络在车牌定位中的应用<sup>[19]</sup>等,然而这些研究基本上是基于整数阶的细胞神经网络.自从分数阶理论提出以来,分数阶混沌系统有了较大的发展,例如分数阶Chen混沌系统的完全同步与反向同步<sup>[20]</sup>、分数阶Liu混沌系统及其电路实验的研究与控制<sup>[21]</sup>、分数阶Lorenz超混沌系统及其电路仿真<sup>[22]</sup>等,但基于分数阶的细胞神经网络混沌系统研究却很少,利用分数阶实现细胞神经网络自适应同步控制和参数辨识更是鲜有报道.本文通过构建一个新的分数阶细胞神经网络,并在此基础上构建一个驱动系统非线性参数已知而响应系统非线性参数值未知的驱动-响应系统.运用自适应同步控制器及参数自适应调整律实现该驱动-响应系统同步.在对分数阶细胞神经网络混沌系统同步控制进行数值仿真的基础上,利用Multisim软件实现了系统同步控制的电路仿真.电路仿真结果与数值仿真计算具有很高的吻合度,从而证实了本文自适应同步控制在分数阶细胞神经网络系统中实现同步控制的正确性和现实可行性.

## 2 分数阶细胞神经网络的同步控制(Synchronization control of fractional cellular neural networks)

### 2.1 分数阶微分定义及算法(Definition and algorithm of fractional differential)

在分数阶微积分的理论发展和研究过程中,出现了很多种微分和积分的定义,如Cauchy积分公式

Grunwald-Letnikov分数阶积分定义、Riemann-Liouville分数阶微分定义以及Caputo定义.本文采用Caputo定义的分数阶微积分,其数学表达式如下<sup>[23]</sup>:

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} d\tau, \quad (1)$$

式中:  $\Gamma(\cdot)$  为Gamma函数,  $n-1 \leq q \leq n$ ,  $q$  为分数,  $n$  为整数,该式子的Laplace变换表达式为

$$L\left\{\frac{d^q f(t)}{dt^q}\right\} = s^q L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[\frac{d^{q-1-k} f(t)}{dt^{q-1-k}}\right]. \quad (2)$$

若函数  $f(t)$  的初始值为零,则式(2)可简化为

$$L\left\{\frac{d^q f(t)}{dt^q}\right\} = s^q L\{f(t)\}. \quad (3)$$

对于一个动力学系统其对应的分数阶微分方程可以表示成

$$\begin{aligned} a_n D^{v_n} F(x, y) + a_{n-1} D^{v_{n-1}} F(x, y) + \dots + a_0 D^{v_0} = \\ b_m D^{\alpha_m} G(x, y) + b_{m-1} D^{\alpha_{m-1}} G(x, y) + \dots + \\ b_0 D^{\alpha_0} G(x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

其中:  $v_n, v_{n-1}, \dots, v_0$  及  $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0$  分别表示相应的分数阶阶值.式中的  $F(x, y)$  为系统输入,  $G(x, y)$  为系统输出,假设它们均满足初始值为0的条件.对其做Laplace变换,可以得到分数阶微分方程的传递函数为

$$H(s) = \frac{b_m s^{\alpha_m} + b_{m-1} s^{\alpha_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\alpha_0}}{a_n s^{v_n} + a_{n-1} s^{v_{n-1}} + \dots + a_0 s^{v_0}}. \quad (5)$$

从式(5)中不难看出:可以在频域中用传递函数  $H(s) = 1/s^q$  来表示分数阶微分算子  $q$ ,因此工程中常常采用时域-复频域转换法来求解分数阶微分方程.

### 2.2 分数阶同步控制系统(Control system model of fractional synchronous)

本文研究驱动系统依赖参数的混沌系统为

$$D_t^q X = h(x(t), t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

其中:  $X \in \mathbb{R}^n$  是驱动系统的一个  $n$  维状态向量,  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 将  $h$  拆分为线性和非线性两部分,则驱动系统I可写成:

$$D_t^q X = g(x) + G(x)A^T, \quad (7)$$

式中  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为包含线性项的连续向量函数,  $G(x)A^T$  为非线性部分,  $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  为参数向量函数,  $A$  是驱动系统的非线性函数的参数矩阵.

相应的响应系统II可表示为<sup>[24]</sup>

$$D_t^q Y = g(y) + G(y)\tilde{A}^T + U, \quad (8)$$

式中的  $Y \in \mathbb{R}$  是响应系统的状态变量,  $U \in \mathbb{R}^n$  为控制器,  $\tilde{A}$  是驱动系统的非线性函数的参数矩阵.

**定义1** 设两个混沌系统(7)和(8),如果对于任意的初始状态  $x(0)$  和  $y(0)$  满足  $e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \|Y - X\|$

= 0, 则称混沌系统I和II是同步的.

令系统 (7) 和系统 (8) 之间的同步误差为  $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t)$ , 则将混沌系统的同步问题转化为对两个系统误差状态的研究, 得到误差变量  $e(t)$  的状态方程如下:

$$D_t^q e(t) = D_t^q Y - D_t^q X. \quad (9)$$

### 2.3 细胞神经网络非线性描述(Cellular neural network nonlinear description)

在细胞神经网络中, 对于第  $i$  行、第  $j$  列的神经元  $C(i, j)$ , 假设它只与周围  $r$  范围内的神经元相连, 而同其他的神经元不连接,  $N_r(i, j)$  表示  $C(i, j)$  神经元和邻近其他神经元的集合. CNN 每个神经元细胞的状态可以用方程(10)来描述<sup>[26]</sup>:

$$C \frac{dx_{ij}(t)}{dt} = -\frac{1}{R_x} x_{ij}(t) + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} A(i, j; k, l) y_{kl}(t) + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} B(i, j; k, l) u_{kl}(t) + I, \quad (10)$$

式中:  $x_{ij}(t)$  是第  $(i, j)$  个细胞的状态变量,  $I$  表示网络的外部输入,  $u_{kl}(t)$  表示第  $(i, j)$  个细胞相应的输入电压,  $y_{kl}(t)$  是第  $(i, j)$  个细胞相应的输出,  $C$  和  $R_x$  分别是线性电容和线性电阻,  $A(i, j; k, l)$  和  $B(i, j; k, l)$  分别是反馈算子和控制算子.

在一个  $m \times n$  的二维神经元排列空间内, CNN 网络的连接关系可以表示为<sup>[14]</sup>

$$N_r(i, j) = \{C(k, l) | \max(|k - i|, |l - j|) \leq r, 1 \leq k \leq m; 1 \leq l \leq n\}, r \text{ 为正整数}. \quad (11)$$

式(10)中对应的输出函数  $y_{kl}(t)$  是一个分段性函数, 其表达式为

$$y_{kl}(t) = f(x_{ij}) = \frac{1}{2}(|x_{ij} + 1| - |x_{ij} - 1|). \quad (12)$$

### 2.4 三阶分数阶 CNN 控制模型构建 (Third order fraction CNN control model)

如果令式(10)中的线性电容  $C$  和线性电阻  $R_x$  分别为 1, 本文研究的传统三阶无量纲细胞 CNN 模型的状态方程描述如下:

$$\frac{dx_j}{dt} = -x_j + \sum_{k=1}^3 a_{jk} f(x_k) + \sum_{k=1}^3 s_{jk} x_k + I_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (13)$$

式中:  $x_j$  是第  $j$  个细胞的状态变量,  $f(x_k)$  是第  $k$  个细胞相应的输出. 如果令  $a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0, s_{13} = 0, I_j = 0$ , 则细胞神经网络系统(10)可展

开为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + a_{11}f(x_1) + a_{12}f(x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + s_{21}x_1 + s_{22}x_2 + s_{23}x_3 + a_{22}f(x_2), \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_3 + s_{31}x_1 + s_{32}x_2 + s_{33}x_3. \end{cases} \quad (14)$$

令系统(14)为整数阶驱动系统, 其对应的整数阶响应系统为

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 + s_{11}y_1 + s_{12}y_2 + \tilde{a}_{11}f(y_1) + \tilde{a}_{12}f(y_2) + u_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_2 + s_{21}y_1 + s_{22}y_2 + s_{23}y_3 + \tilde{a}_{22}f(y_2) + u_2, \\ \frac{dy_3}{dt} = -y_3 + s_{31}y_1 + s_{32}y_2 + s_{33}y_3 + u_3. \end{cases} \quad (15)$$

易得整数阶同步系统的误差为

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = -e_1 + s_{11}e_1 + s_{12}e_2 + \tilde{a}_{11}f(y_1) - a_{11}f(x_1) + \tilde{a}_{12}f(y_2) - a_{12}f(x_2) + u_1, \\ \frac{de_2}{dt} = -e_2 + s_{21}e_1 + s_{22}e_2 + s_{23}e_3 + \tilde{a}_{22}f(y_2) - a_{22}f(x_2) + u_2, \\ \frac{de_3}{dt} = -e_3 + s_{31}e_1 + s_{32}e_2 + s_{33}e_3 + u_3. \end{cases} \quad (16)$$

与整数阶系统(14)对应的分数阶细胞神经网络混沌系统为

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x_1}{dt^{q_1}} = -x_1 + s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + a_{11}f(x_1) + a_{12}f(x_2), \\ \frac{d^{q_2} x_2}{dt^{q_2}} = -x_2 + s_{21}x_1 + s_{22}x_2 + s_{23}x_3 + a_{22}f(x_2), \\ \frac{d^{q_3} x_3}{dt^{q_3}} = -x_3 + s_{31}x_1 + s_{32}x_2 + s_{33}x_3, \end{cases} \quad (17)$$

其中  $q_1, q_2, q_3 (0 < q_1, q_2, q_3 \leq 1)$  为系统的阶数值, 为了便于计算误差系统, 文中令分数阶的值  $q_1 = q_2 = q_3 = q$ .

将系统 (17) 设为分数阶驱动系统, 并依照式 (7)  $D_t^q X = g(x) + G(x)A^T$  改写成

$$D_t^q X = \begin{bmatrix} -x_1 + s_{11}x_1 + s_{12}x_2 \\ -x_2 + s_{21}x_1 + s_{22}x_2 + s_{23}x_3 \\ -x_3 + s_{31}x_1 + s_{32}x_2 + s_{33}x_3 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & 0 \\ 0 & f(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + s_{11}x_1 + s_{12}x_2 \\ -x_2 + s_{21}x_1 + s_{22}x_2 + s_{23}x_3 \\ -x_3 + s_{31}x_1 + s_{32}x_2 + s_{33}x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & 0 \\ 0 & f(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

式中:

$$g(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + s_{11}x_1 + s_{12}x_2 \\ -x_2 + s_{21}x_1 + s_{22}x_2 + s_{23}x_3 \\ -x_3 + s_{31}x_1 + s_{32}x_2 + s_{33}x_3 \end{bmatrix},$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & 0 \\ 0 & f(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

对应的分数阶响应系统为

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}y_1}{dt^{q_1}} = -y_1 + s_{11}y_1 + s_{12}y_2 + \tilde{a}_{11}f(y_1) + \tilde{a}_{12}f(y_2) + u_1, \\ \frac{d^{q_2}y_2}{dt^{q_2}} = -y_2 + s_{21}y_1 + s_{22}y_2 + s_{23}y_3 + \tilde{a}_{22}f(y_2) + u_2, \\ \frac{d^{q_3}y_3}{dt^{q_3}} = -y_3 + s_{31}y_1 + s_{32}y_2 + s_{33}y_3 + u_3. \end{cases} \quad (18)$$

同理可以将系统(18)改写成公式(8)中 $D_t^q Y = g(y) + G(y)\tilde{A}^T + U$ 形式:

$$D_t^q Y = \begin{bmatrix} -y_1 + s_{11}y_1 + s_{12}y_2 \\ -y_2 + s_{21}y_1 + s_{22}y_2 + s_{23}y_3 \\ -y_3 + s_{31}y_1 + s_{32}y_2 + s_{33}y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(y_1) & f(y_2) & 0 \\ 0 & f(y_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 + s_{11}y_1 + s_{12}y_2 \\ -y_2 + s_{21}y_1 + s_{22}y_2 + s_{23}y_3 \\ -y_3 + s_{31}y_1 + s_{32}y_2 + s_{33}y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(y_1) & f(y_2) & 0 \\ 0 & f(y_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

式中:

$$g(y) = \begin{bmatrix} -y_1 + s_{11}y_1 + s_{12}y_2 \\ -y_2 + s_{21}y_1 + s_{22}y_2 + s_{23}y_3 \\ -y_3 + s_{31}y_1 + s_{32}y_2 + s_{33}y_3 \end{bmatrix},$$

$$G(y) = \begin{bmatrix} f(y_1) & f(y_2) & 0 \\ 0 & f(y_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

## 2.5 分数阶 CNN 自适应同步控制 (Fractional order CNN adaptive synchronization control)

根据式(9)的误差分析可得

$$D_t^q e = D_t^q Y - D_t^q X = g(y) - g(x) + G(y)\tilde{A}^T - G(x)A^T + U. \quad (19)$$

将式(19)转换成三维微分方程

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1}e_1}{dt^{q_1}} = -e_1 + s_{11}e_1 + s_{12}e_2 + \tilde{a}_{11}f(y_1) - a_{11}f(x_1) + \tilde{a}_{12}f(y_2) - a_{12}f(x_2) + u_1, \\ \frac{d^{q_2}e_2}{dt^{q_2}} = -e_2 + s_{21}e_1 + s_{22}e_2 + s_{23}e_3 + \tilde{a}_{22}f(y_2) - a_{22}f(x_2) + u_2, \\ \frac{d^{q_3}e_3}{dt^{q_3}} = -e_3 + s_{31}e_1 + s_{32}e_2 + s_{33}e_3 + u_3. \end{cases} \quad (20)$$

若选取控制器 $U$ 为

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}f(x_1) - \tilde{a}_{11}f(y_1) + a_{12}f(x_2) - \tilde{a}_{12}f(y_2) - s_{12}e_2 - \tilde{e}_{11}f(x_1) - \tilde{e}_{12}f(x_2), \\ u_2 = -s_{21}e_1 - s_{23}e_3 + a_{22}f(x_2) - \tilde{a}_{22}f(y_2) - \tilde{e}_{12}f(x_2), \\ u_3 = -s_{31}e_1 - s_{32}e_2, \end{cases} \quad (21)$$

其中:  $e_i = y_i - x_i$ ,  $\tilde{e}_{ij} = \tilde{a}_{ij} - a_{ij}$ . 构建一个Lyapunov-Krasovskii泛函函数为

$$V(t) = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}\tilde{e}^T \tilde{e} = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + \frac{1}{2}(\tilde{e}_{11}^2 + \tilde{e}_{12}^2 + \tilde{e}_{22}^2). \quad (22)$$

同时选取系统自适应调整率为

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{a}}_{11} \\ \dot{\tilde{a}}_{12} \\ \dot{\tilde{a}}_{22} \end{bmatrix} = G(x)^T [e_1 \ e_2 \ e_3]^T = \begin{bmatrix} e_1 f(x_1) \\ e_1 f(x_2) + e_2 f(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

由式(1)中Caputo定义的分数阶微积分

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} d\tau, \quad n-1 \leq q \leq n, q \text{ 为分数}, n \text{ 为整数}, \text{易知当 } 0 \leq q \leq 1$$

时  $n = 1$ , 因此有

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^q} d\tau. \quad (24)$$

令  $f(t) = V(t)$ , 则

$$\frac{d^q V(t)}{dt^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t \frac{V'(\tau)}{(t-\tau)^q} d\tau, \quad (25)$$

式中

$$\begin{aligned} V'(t) = & e_1 \frac{de_1}{dt} + e_2 \frac{de_2}{dt} + e_3 \frac{de_3}{dt} + \tilde{e}_{11} \frac{d\tilde{e}_{11}}{dt} + \\ & \tilde{e}_{12} \frac{d\tilde{e}_{12}}{dt} + \tilde{e}_{22} \frac{d\tilde{e}_{22}}{dt} = \\ & (s_{11}-1)e_1^2 + s_{12}e_1e_2 + [\tilde{a}_{11}f(y_1) - a_{11}f(x_1)]e_1 + \\ & [\tilde{a}_{12}f(y_2) - a_{12}f(x_2)]e_1 + u_1e_1 + (s_{22}-1)e_2^2 + \\ & s_{21}e_1e_2 + s_{23}e_2e_3 + [\tilde{a}_{22}f(y_2) - a_{22}f(x_2)]e_2 + \\ & u_2e_2 + (s_{33}-1)e_3^2 + s_{31}e_1e_3 + s_{32}e_2e_3 + u_3e_3 + \\ & (\tilde{a}_{11}-a_{11})e_1f(x_1) + (\tilde{a}_{12}-a_{12})(e_1+e_2)f(x_2). \end{aligned}$$

将控制器  $U$  式(21)及自适应调整率式(23)代入上式中, 化简可得

$$V'(t) = (s_{11}-1)e_1^2 + (s_{22}-1)e_2^2 + (s_{33}-1)e_3^2. \quad (26)$$

对于式子  $\frac{d^q V(t)}{dt^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t \frac{V'(\tau)}{(t-\tau)^q} d\tau$ , 当  $0 \leq q \leq 1, 0 \leq \tau \leq t$  时,  $\Gamma(1-q) > 0, (t-\tau)^q > 0$  恒成立.

由式(26)可得: 当  $s_{11} \leq 1, s_{22} \leq 1, s_{33} \leq 1$  时, 式(26)中  $V'(t) \leq 0$ , 即有

$$\frac{d^q V(t)}{dt^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t \frac{V'(\tau)}{(t-\tau)^q} d\tau \leq 0$$

成立, 并且显然有  $V(t) \geq 0$ , 故  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . 因此响

应系统  $Y$  与驱动系统  $X$  趋于同步, 即  $t \rightarrow \infty$  时,  $Y - X \rightarrow 0, \tilde{A}^T - A^T \rightarrow 0$ .

### 3 自适应同步的数值计算及电路仿真 (Numerical calculations and circuit simulation of adaptive synchronization)

#### 3.1 分数阶 CNN 混沌系统构建 (Fractional CNN chaotic systems construction)

令系统(17)的系数矩阵参数选择为

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ S &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -15 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \right. \quad (27)$$

系数矩阵中的  $s_{11} \leq 1, s_{22} \leq 1, s_{33} \leq 1$  满足驱动-响应趋于同步的要求. 此时分数阶细胞神经网络系统(17)为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^{q_1} x_1}{dt^{q_1}} &= -3x_1 + 9x_2 + 7f(x_1) - f(x_2), \\ \frac{d^{q_2} x_2}{dt^{q_2}} &= 2x_1 + 2x_2 - 2f(x_2), \\ \frac{d^{q_3} x_3}{dt^{q_3}} &= -3x_1 - 15x_2. \end{aligned} \right. \quad (28)$$

考虑到分数阶系统的初始取值为时间段<sup>[27]</sup>, 对于驱动系统取时间段  $t \in [0, 10]$  的值作为初始值, 取初始值为  $x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, x_3 = 0.2$ , 阶数值为  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$ , 步长  $h = 0.01$  时, 对系统(28)所描述的细胞神经网络进行数值仿真, 得到二维吸引子相图如图1所示.

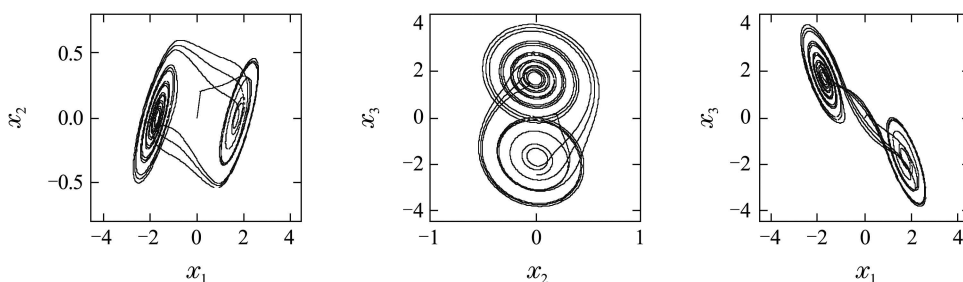


图 1 系统(28)产生的混沌吸引子相图

Fig. 1 Chaotic attractor phase diagram of system (28)

从图1中可以看出, 通过具体设计参数与初始值, 系统(28)所描述的分数阶细胞神经网络中产生了双涡旋混沌奇异吸引子, 因此定性的证实了该分数阶细胞神经网络系统产生了混沌现象.

数值仿真求得系统(28)的 Lyapunov 指数为 (5.0529, -1.2626, -1.7904), 其最大的 Lyapunov 指

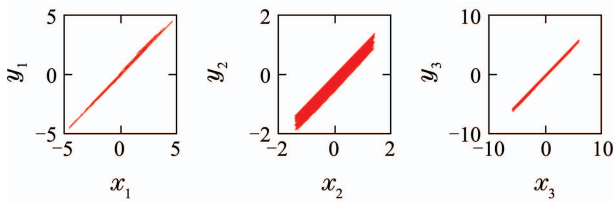
数大于零, 并且系统的 Lyapunov 维数

$$D_L = j + \frac{1}{|L_{j+1}|} \sum_{i=1}^j L_i = 2 + \frac{L_1 + L_2}{|L_3|} = 4.1170,$$

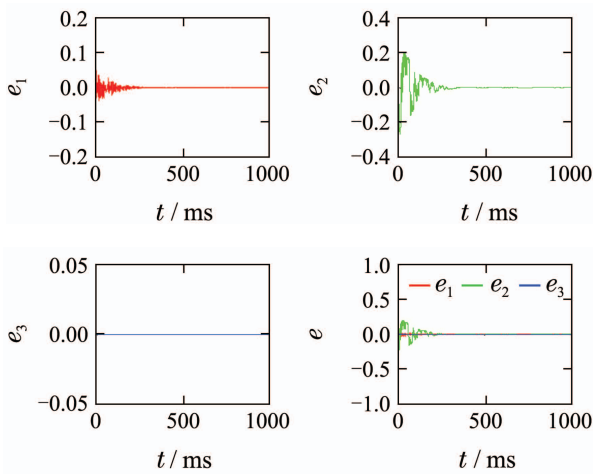
因此从理论上定量证明了该分数阶细胞神经网络系统产生了混沌现象.

### 3.2 自适应同步数值仿真 (Numerical simulation of adaptive synchronization)

选择第3.1节中设置的驱动系统参数与初始条件  $t \in [0, 10]$ , 响应系统的初始值为  $[x, y, z] = [-0.3, -0.1, 0.2]$ , 未知非线性参数的初始值为  $[\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{22}] = [5, -1, 2]$ , 两个系统  $x_i - y_i (i = 1, 2, 3)$  及系统模型误差  $e_i (i = 1, 2, 3)$  仿真结果的曲线图如图2所示. 仿真结果表明在响应系统未知非线性参数值的情况下较好实现了两个分数阶细胞神经网络混沌系统趋于同步, 同时也验证了本文提出的自适应同步控制设计方法对于实现分数阶CNN同步的有效性.



(a) 驱动和响应变量  $x_i - y_i$  变化轨迹曲线图



(b) 系统模型误差  $e_i$  的渐近同步图

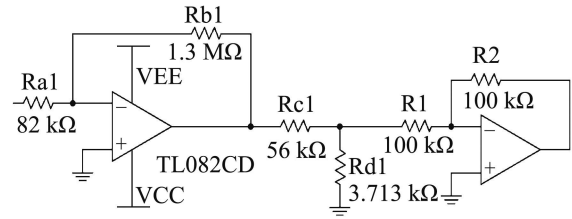
图2 分数阶CNN自适应同步系统模型变量及误差曲线  
Fig. 2 Model variables and error curves of fractional order CNN adaptive synchronization system

### 3.3 分数阶CNN电路设计 (Fractional CNN circuit design)

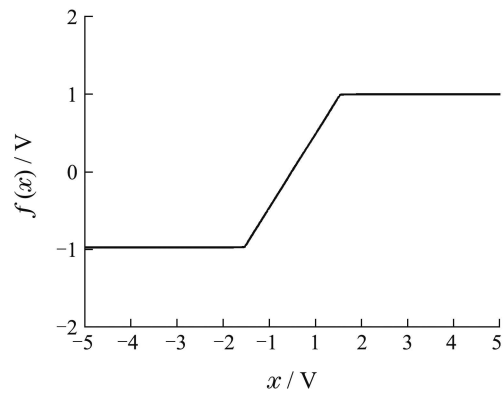
对于非线性函数

$$f(x) = \frac{1}{2}(|x + 1| - |x - 1|)$$

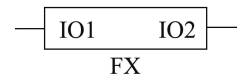
用放大器TL082CD在  $\pm 18\text{ V}$  条件下来实现, 放大电路的输出端为  $f(x)$  即  $u_{\text{out}} = f(x)$ , 其具体的实现电路及仿真结果分别如图3(a)–(b)所示, 其等效电路如图3(c).



(a) 电路原理图



(b) 电路仿真波形



(c) 等效电路

图3  $f(x)$  模块FX电路原理图及其仿真波形

Fig. 3 Circuit diagram and its simulation waveforms of FX

分数阶电路的电路单元现有4种<sup>[29]</sup>, 分别为链型、树型、混合型及新型, 每种单元的电路结构如图4所示. 以链型电路为例, 图4(a)的单元电路中  $n$  为  $A$  和  $B$  之间的等效电路复频域表达式  $H(s)$  展开式中分母  $s$  的最高阶, 由电路理论知识<sup>[28]</sup> 可得  $A$  和  $B$  之间的等效电路复频域表达式为

$$H(s) = \frac{R_1}{sR_1C_1 + 1} + \frac{R_2}{sR_2C_2 + 2} + \dots + \frac{R_n}{sR_nC_n + 1} \quad (29)$$

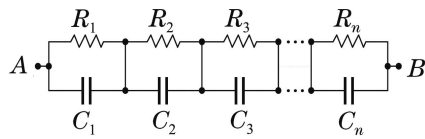
为简洁起见, 文中分数阶  $q_i (i = 1, 2, 3)$  的取值  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$ . 依据Charef和Hartley等研究者所提出的分数阶微积分数值解法<sup>[24]</sup> 可知: 当  $q_1, q_2, q_3$  取值不同时, 标准整数阶算子逐渐逼近分数阶算子的方式也不同. 当  $q = 0.95$  时,

$$\frac{1}{s^{0.95}} = \frac{1.2831(s + 14.4073)(s + 0.1129)}{(s + 18.3290)(s + 0.1473)(s + 0.0011)} \quad (30)$$

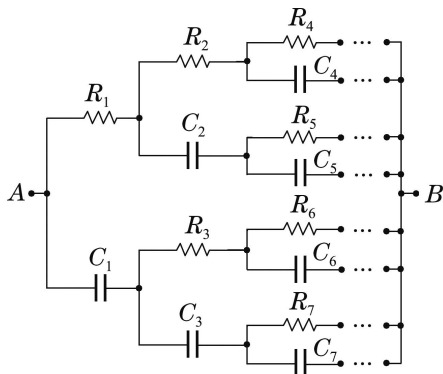
所以可知复频域表达式 $H(s)$ 对应的单元电路中 $n$ 的取值为3,通过对式(29)做基本的数学变形并与式(30)进行比较,可计算出链型各元件的参数值为

$$\begin{cases} R_1 = 15.1 \text{ k}\Omega, R_2 = 1.51 \text{ k}\Omega, \\ R_3 = 692.9 \text{ M}\Omega, C_1 = 3.616 \text{ }\mu\text{F}, \\ C_2 = 4.602 \text{ }\mu\text{F}, C_3 = 1.267 \text{ }\mu\text{F}. \end{cases}$$

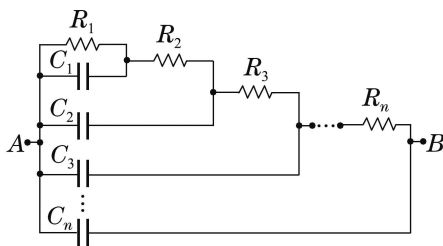
同理根据文献[27]可知,树型、混合型、新型电路各个单元电路在 $q = 0.95$ 时所对应的复频域表达式,具体复频域表达式 $H(s)$ 如表1所示,相应各个元器件的参数值如表2所示.



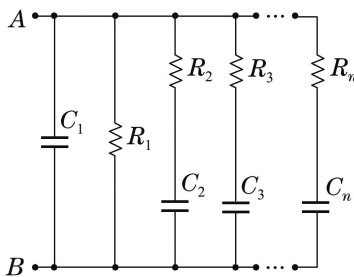
(a) 链型单元电路



(b) 树型单元电路



(c) 混合型单元电路



(d) 新型单元电路

图 4 分数阶各单元电路图

Fig. 4 Unit circuit for fractional order

表 1 分数阶各单元电路复频域表达式

Table 1 Complex frequency domain expressions for fractional order circuit

类型	$H(s)$ 表达式
链型	$H(s) = [\frac{R_1}{sR_1C_1+1} + \frac{R_2}{sR_2C_2+2} + \frac{R_3}{sR_3C_3+3}]$
树型	$H(s) = [R_1 + (R_2 // \frac{1}{sC_2})] // [\frac{1}{sC_1 + (R_3 // \frac{1}{sC_3})}]$
混合	$H(s) = \{[(R_1 // \frac{1}{sC_1}) + R_2] // \frac{1}{sC_2} + R_3\} // \frac{1}{sC_3}$
新型	$H(s) = R_1 // \frac{1}{sC_1} // [R_2 + \frac{1}{sC_2}] // [R_3 + \frac{1}{sC_3}]$

注 1 表1中“//”表示并联关系.

表 2 分数阶值为0.95时各单元电路元件参数值

Table 2 Components parameter values in each unit circuit when  $q = 0.95$

类型	$n$	$R_1/\text{M}\Omega$	$C_1/\mu\text{F}$	$R_2/\text{M}\Omega$	$C_2/\mu\text{F}$	$R_3/\text{M}\Omega$	$C_3/\mu\text{F}$
链型	3	0.015	3.616	1.51	4.602	692.9	1.267
树型	3	0.326	1.048	694.1	0.214	2.167	3.039
混合	3	662.5	0.291	31.62	0.218	0.323	0.780
新型	3	694.6	0.780	32.82	0.270	0.326	0.213

### 3.4 分数阶CNN同步电路仿真(Circuit simulation for the fractional order CNN)

由于对每一阶数值( $q_1, q_2, q_3$ )均有链型、树型、混合型和新型4种电路单元选择,因此通过数学组合排列原理可知,对于该分数阶细胞神经网络混沌同步系统,驱动和响应系统分别可以选择 $q_1, q_2, q_3$  3种分数阶值,则电路的组合数为  $M = (C_4^1)^{3 \times 2} = 4096$ .

#### 3.4.1 分数阶 CNN 驱动电路仿真 (Driver system circuit simulation)

本文驱动系统选择:链型、树型、混合型.依照系统(17)数学模型设计的分数阶细胞神经网络驱动(driver)系统的电路原理图如图5所示,对于电路原理图中的各个元器件的取值为

$$\begin{aligned} R_x f_1 &= R_x f_2 = R_x f_3 = 100 \text{ k}\Omega, \\ R_{m1} &= R_{m2} = R_{m3} = R_{m4} = R_{m5} = R_{m6} = \\ R_{m7} &= R_{m8} = R_{m9} = R_{m10} = R_{m11} = 10 \text{ k}\Omega, \\ R_{x11} &= 35 \text{ k}\Omega, R_{x12} = 17 \text{ k}\Omega, \\ R_{x13} &= 10 \text{ k}\Omega, R_{x14} = 100 \text{ k}\Omega, \\ R_{x21} &= 50 \text{ k}\Omega, R_{x22} = 50 \text{ k}\Omega, R_{x23} = 50 \text{ k}\Omega, \\ R_{x31} &= 40 \text{ k}\Omega, R_{x32} = 10 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$

驱动系统电路仿真结果相图如图6所示(状态可观测).

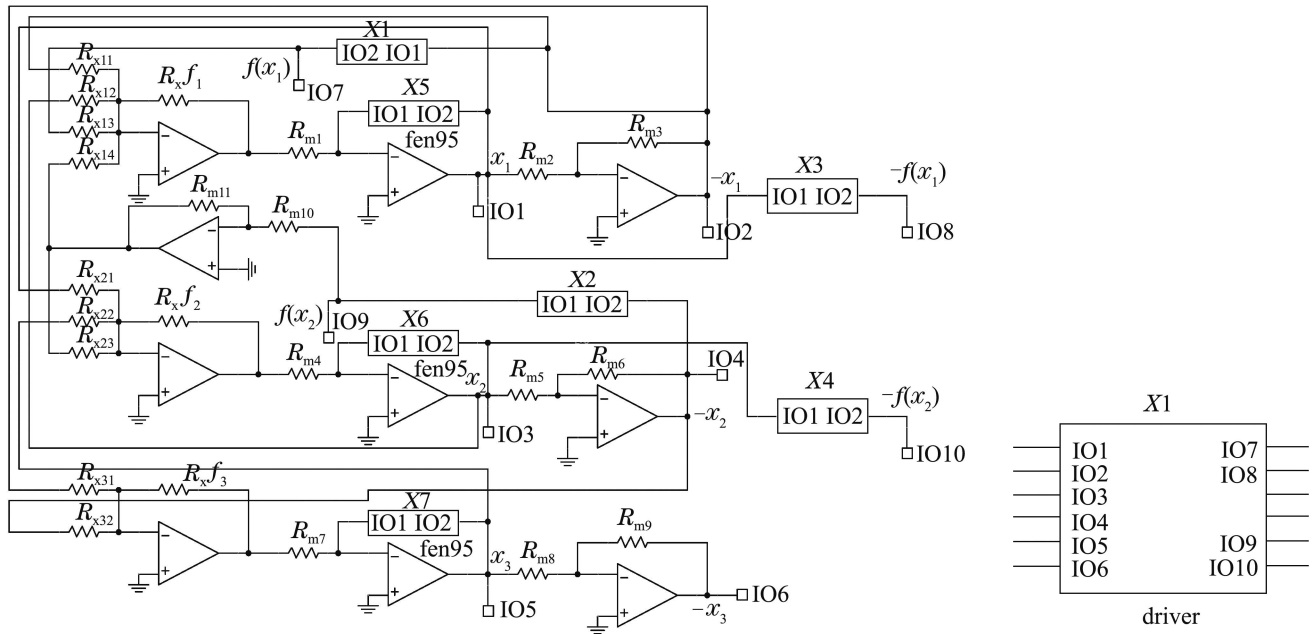


图5 分数阶CNN驱动系统(driver)电路原理图及其等效电路

Fig. 5 The circuit diagram and equivalent circuit for fractional order CNN driver system

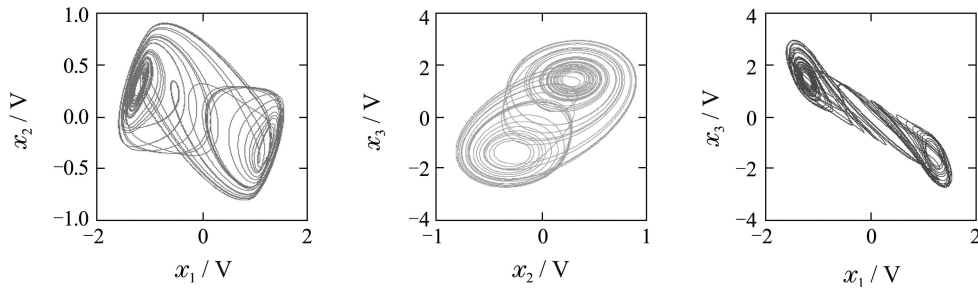


图6 分数阶CNN驱动系统电路仿真结果相图

Fig. 6 Circuit simulation phases for fractional order CNN driver system

### 3.4.2 分数阶CNN响应电路仿真 (Response system circuit simulation)

本文响应系统选择: 混合型、新型、链型. 将式(21)控制器U代入响应系统(18)中, 并结合系统自适应调整率(23)的数学模型和参数矩阵(27), 则响应系统(18)变为

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} y_1}{dt^{q_1}} = -3y_1 + 9x_2 + 14f(x_1) - \tilde{a}_{11}f(x_1) - 2f(x_2) - \tilde{a}_{12}f(x_2), \\ \frac{d^{q_2} y_2}{dt^{q_2}} = 2x_1 + 2x_3 - \tilde{a}_{12}f(x_2) - 3f(x_2), \\ \frac{d^{q_3} y_3}{dt^{q_3}} = -3x_1 - 15x_2. \end{cases} \quad (31)$$

设计出分数阶细胞神经网络的响应系统电路原理图如图7所示. 电路原理图中的各个元器件参数值为

$$\begin{aligned} R_y f_1 = R_y f_2 = R_y f_3 = \\ R_{n10} = R_{n11} = R_{n12} = R_{n13} = R_{n14} = \\ R_{n15} = R_{n16} = R_{n17} = R_{n18} = R_{n19} = 100 \text{ k}\Omega, \\ R_{n1} = R_{n2} = R_{n3} = R_{n4} = R_{n5} = \\ R_{n6} = R_{n7} = R_{n8} = R_{n9} = 10 \text{ k}\Omega, \\ R_{y11} = 33.3 \text{ k}\Omega, R_{y12} = 11.1 \text{ k}\Omega, R_{y13} = 7 \text{ k}\Omega, \\ R_{y14} = 100 \text{ k}\Omega, R_{y15} = 50 \text{ k}\Omega, R_{y16} = 100 \text{ k}\Omega, \\ R_{y21} = 50 \text{ k}\Omega, R_{y22} = 40 \text{ k}\Omega, \\ R_{y23} = 100 \text{ k}\Omega, R_{y24} = 33.3 \text{ k}\Omega, \\ R_{y31} = 40 \text{ k}\Omega, R_{y32} = 10 \text{ k}\Omega, \\ C_{y1} = C_{y2} = 33 \text{ nF}. \end{aligned}$$

电路原理图中的乘法器使用Multisim10中的默认元件MULTIPLIER.



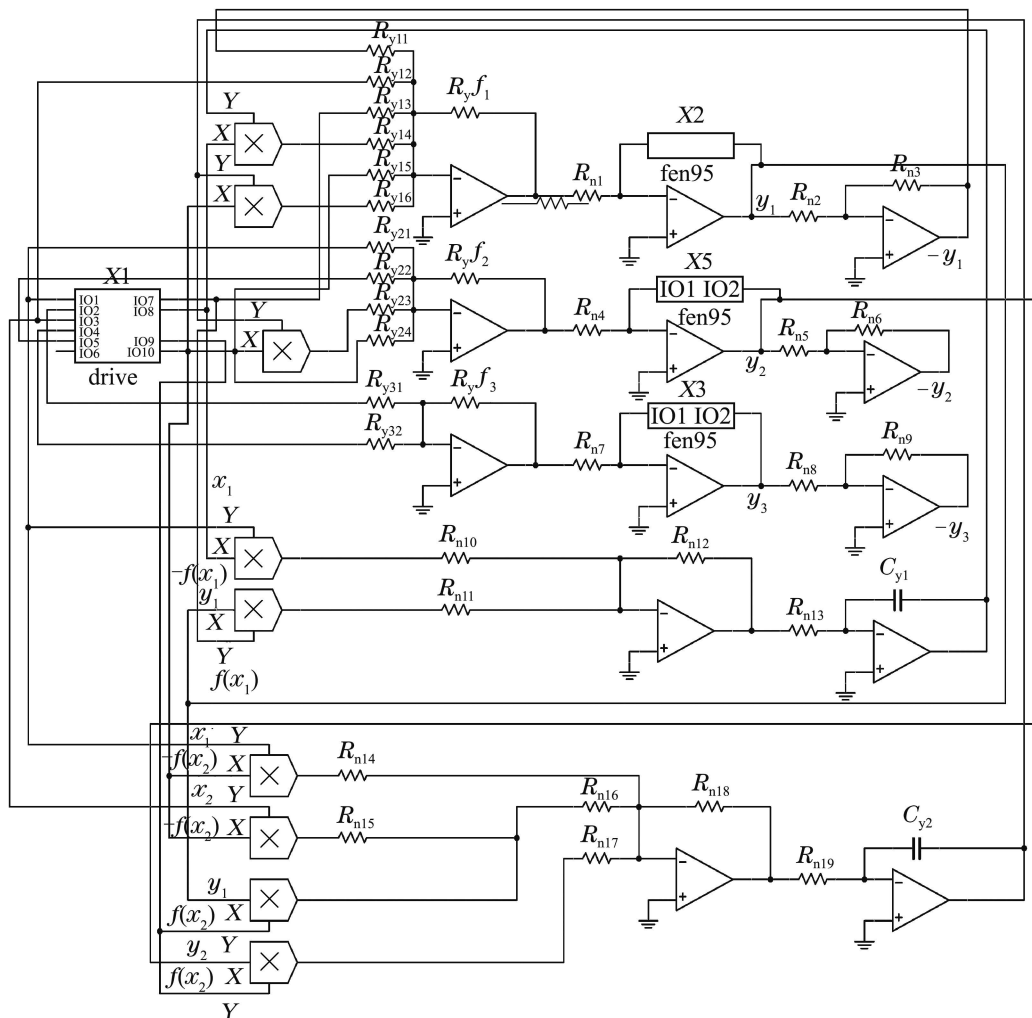


图 7 分数阶CNN响应系统电路原理图

Fig. 7 The circuit diagram for fractional order CNN response system

### 3.4.3 分数阶 CNN 自适应同步实现 (Adaptive synchronization complete)

驱动系统与响应系统的电路仿真结果  $x_i-y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )如图8所示(状态可观测). 将电路仿真的结果与图2(a)数值仿真的结果比较可知, 电路仿真实验结果与数值计算结果具有较好的吻合度, 同步误差主要是因为初始条件的选取及模拟电路元件值漂移引起的. 实验说明了该分数阶细胞神经网络混沌系统的自适应同步是可以物理实现的, 也表明了该方法的现实可应用性.

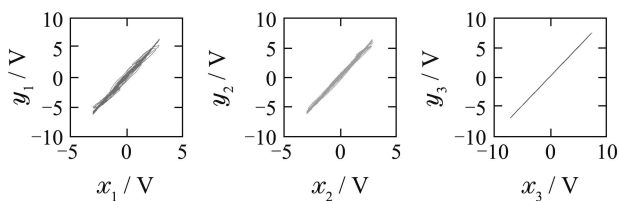


图 8 分数阶CNN驱动-响应系统  $x_i-y_i$  电路仿真结果  
Fig. 8 Circuit simulation results for fractional order CNN drive-response  $x_i-y_i$  system

## 4 结论(Conclusions)

提出了基于非线性参数自适应的分数阶细胞神经网络混沌同步控制模型, 依照该方案设计一个三维分数阶细胞神经网络混沌同步系统并对其数值仿真, 结合模拟电路仿真表明该系统设计具有较好的自适应同步稳定性. 事实上还可以推广应用到不同分数阶值和不同的分数阶电路结构上, 在实际工程应用中具有丰富的实用价值.

### 参考文献(References):

- [1] EDWARD N, LORENZ. Deterministic nonperiodic flow [J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, 20(7): 130 – 141.
- [2] TAN Liang, WU Bo, LIU Zhen, et al. An audio information hiding algorithm with high-capacity which based on chaotic and wavelet transform [J]. *Electronic Journal*, 2010, 38(8): 1812 – 1818. (谭良, 吴波, 刘震, 等. 一种基于混沌和小波变换的大容量音频信息隐藏算法 [J]. *电子学报*, 2010, 38(8): 1812 – 1818.)
- [3] ZHANG Buhan, CHEN Yi, DAI Xiaokang, et al. Controller's parameters optimization method of distributed energy storage system in microgrid [J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2014, 42(12): 1 – 5.

- (张步涵, 陈奕, 代晓康, 等. 微网中分布式储能系统的控制参数优化方法 [J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2014, 42(12): 1 – 5.)
- [4] CHUA L O, YANG L. Cellular neural networks: application [J]. *IEEE Transactions Circuits and System I*, 1988, 35(10): 1273 – 1290.
- [5] CHUA L O, YANG L. Cellular neural networks: theory [J]. *IEEE Transactions on Circuits and System I*, 1988, 35(10): 1257 – 1272.
- [6] ZHAO Tingzhao. A research on coal bunker image processing method based on cyto-nervous network [J]. *Coal Mine Machinery*, 2014, 35(5): 185 – 186.  
(赵廷钊. 基于细胞神经网络的煤仓图像处理方法的研究 [J]. 煤矿机械, 2014, 35(5): 185 – 186.)
- [7] LIU Quan, LI Peiyue, ZHANG Mingchao, et al. Image encryption algorithm based on chaos system having Markov portion [J]. *Journal of Electronic and Information*, 2014, 36(6): 1271 – 1277.  
(刘泉, 李佩玥, 章明朝, 等. 基于可Markov分割混沌系统的图像加密算法 [J]. 电子与信息学报, 2014, 36(6): 1271 – 1277.)
- [8] XU Xiaojun, WANG Youren. Novel image denoising method based on discrete fractional orthogonal wavelet transform [J]. *Electronic Journal*, 2014, 42(2): 280 – 287.  
(徐小军, 王友仁. 基于离散分数阶正交小波变换图像降噪新方法 [J]. 电子学报, 2014, 42(2): 280 – 287.)
- [9] ZHANG Yingying, ZHOU Liqun. Exponential stability of a class of cellular neural networks with multi-pantograph delays [J]. *Electronic Journal*, 2012, 40(6): 1159 – 1163.  
(张迎迎, 周立群. 一类具多比例延时的细胞神经网络的指数稳定性 [J]. 电子学报, 2012, 40(6): 1159 – 1163.)
- [10] 王光瑞, 于熙龄, 陈式刚. 混沌的控制、同步与利用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.
- [11] FENG Chaowen, CAI Li, KANG Qiang, et al. A novel three-dimensional autonomous chaotic system [J]. *Journal of Physics*, 2011, 60(3): 101 – 107.  
(冯朝文, 蔡理, 康强, 等. 一种新的三维自治混沌系统 [J]. 物理学报, 2011, 60(3): 101 – 107.)
- [12] FRADKOV A L, ANDRIWVSKY B EVANS R J. Adaptive observer-based synchronization of chaotic systems with first-order coder in the presence of information constraints [J]. *IEEE Transactions on Circuit System Fundamental Theory and Applications*, 2008, 55(6): 1685 – 1694.
- [13] CAO Hefei, ZHANG Ruoxun. Adaptive synchronization of fractional-order chaotic system via sliding mode control [J]. *Journal of Physics*, 2011, 60(5): 121 – 125.  
(曹鹤飞, 张若洵. 基于滑模控制的分数阶混沌系统的自适应同步 [J]. 物理学报, 2011, 60(5): 121 – 125.)
- [14] SLAVOVA A, RASHKOVA V. A novel CNN based image denoising model [C] // *The 20th European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD)*. Linköping, Sweden: IEEE, 2011: 226 – 229.
- [15] CAPONETTO R. *Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications* [M]. Singapore: World Scientific, 2010.
- [16] SUN Kehui, YANG Jingli, QIU Shuisheng. Circuit simulation and implement for fractional-order chaotic systems [J]. *Journal of Computer Simulation*, 2011, 28(2): 117 – 119.  
(孙克辉, 杨静利, 丘水生. 分数阶混沌系统的电路仿真与实现 [J]. 计算机仿真, 2011, 28(2): 117 – 119.)
- [17] HAN Q, LIAO X, WENG T, et al. Analysis on equilibrium points of cellular neural networks with thresholding activation function [J]. *Neural Computing & Applications*, 2013, 23(1): 23 – 29.
- [18] XIAO Xuefang, LEI Liping, LEI Guowei. On recognition of flying objects based on CNN [J]. *Journal of Mianyang Normal University*, 2011, 30(11): 111 – 115.  
(肖雪芳, 雷丽平, 雷国伟. 基于细胞神经网络(CNN)的飞行目标识别研究 [J]. 绵阳师范大学学报, 2011, 30(11): 111 – 115.)
- [19] ZHANG Fengqing, DUAN Shukai, WANG Lidan, et al. Applications of memrestive cellular neural network in car license plate location [J]. *Computer Science*, 2013, 40(6A): 58 – 63.  
(张凤清, 段书凯, 王丽丹, 等. 忆阻细胞神经网络在车牌定位中的应用 [J]. 计算机科学, 2013, 40(6A): 58 – 63.)
- [20] ZHANG Guangjun, DONG Jun, YAO Hong, et al. The complete synchronization and anti-phase synchronization of the fractional-order Chen chaotic system [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2013, 30(2): 201 – 205.  
(张广军, 董俊, 姚宏, 等. 分数阶Chen混沌系统的完全同步与反向同步 [J]. 应用力学学报, 2013, 30(2): 201 – 205.)
- [21] CHEN Xiangrong, LIU Chongxin, WANG Faqiang, et al. Study on the fractional-order Liu chaotic system with circuit experiment and its control [J]. *Journal of Physics*, 2008, 57(37): 1416 – 1423.  
(陈向荣, 刘崇新, 王发强, 等. 分数阶Liu混沌系统及其电路实验的研究与控制 [J]. 物理学报, 2008, 57(37): 1416 – 1423.)
- [22] CUI Li, OU Qingli, XU Lanxia. Fractional of hyperchaotic Lorenz system and circuit simulation [J]. *Electronic Measurement Technology*, 2010, 33(5): 13 – 16.  
(崔力, 欧青立, 徐兰霞. 分数阶Lorenz超混沌系统及其电路仿真 [J]. 电子测量技术, 2010, 33(5): 13 – 16.)
- [23] LIM Y H, OU K K, AHN H S. Stability and stabilization of fractional-order linear systems subject to input saturation [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(4): 1062 – 1067.
- [24] CAO Hefei, ZHANG Ruoxun. Parameter modulation digital communication and its circuit implementation using fractional-order chaotic system via a single driving variable [J]. *Journal of Physics*, 2012, 61(2): 123 – 130.  
(曹鹤飞, 张若洵. 基于单驱动变量分数阶混沌同步的参数调制数字通信及硬件实现 [J]. 物理学报, 2012, 61(2): 123 – 130.)
- [25] LIAO Xiaoxi. Mathematical theory of cellular neural network [J]. *Chinese Science (A)*, 1994, 24(10): 1037 – 1046.  
(廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论(II) [J]. 中国科学(A辑), 1994, 24(10): 1037 – 1046.)
- [26] TRIGEASSOU J C, MAAMRI N. Initial conditions and initialization of linear fractional differential equations [J]. *Signal Processing*, 2011, 91(1): 427 – 436.
- [27] ZHANG Xiaohong, SUN Qiang. Construction of heterogeneous fractional-order chaotic system and its multiple circuits simulation [J]. *Journal of System Simulation*, 2014, 26(7): 1460 – 1466.  
(张小红, 孙强. 异分数阶混沌系统构造及多元电路仿真 [J]. 系统仿真学报, 2014, 26(7): 1460 – 1466.)
- [28] XU Zhe, LIU Chongxin, YANG Tao. Controlling fractional-order new chaotic system based on Lyapunov equation [J]. *Journal of Physics*, 2010, 59(3): 1524 – 1531.  
(许喆, 刘崇新, 杨韬. 基于Lyapunov方程的分数阶新混沌系统的控制 [J]. 物理学报, 2010, 59(3): 1524 – 1531.)
- [29] CHAREF A, SUN H H, TSAO Y Y, et al. Fractal system as represented by singularity function [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(9): 1465 – 1470.

作者简介:

张小红 (1966–), 女, 教授, 博士, 硕士生导师, 研究方向为无线传感器网络、非线性动力学理论、混沌保密通信, E-mail: xiaohongzh@263.net;

俞梁华 (1989–), 男, 硕士研究生, 主要从事细胞神经网络方面的研究工作, E-mail: 15216177710@163.com.