

一类随机系统完全统计特征控制

杨恒占^{1,2}, 钱富才^{1,3†}, 黄姣茹², 高 嵩²

(1. 西安理工大学 自动化与信息工程学院, 陕西 西安 710048; 2. 西安工业大学 自主无人系统研究中心, 陕西 西安 710021;

3. 航天器在轨故障诊断与维修重点实验室, 陕西 西安 710043)

摘要: 非线性随机系统完全统计特征控制优于低阶矩控制, 但往往因为算法的复杂性难以实际应用. 本文针对受高斯白噪声激励的标量非线性随机系统, 针对状态响应提出了一种完全统计特征控制方法. 首先将刻画完全统计特征的概率密度函数表示成指数函数, 利用 FPK(Fokker-Planck-Kolmogorov) 方程求出概率密度函数的各阶导数, 进而建立指数函数 Taylor 展开的系数与待求反馈控制增益间的关系. 然后, 依据控制目标给出了求解反馈增益的优化问题. 针对目标概率密度函数的不同情况, 分别给出了跟踪控制策略: 对于指数函数 Taylor 展开为有限项形式的情况, 能够直接得到控制增益并完全跟踪目标概率密度函数; 其他情况下, 也能够达到较好的控制效果. 仿真验证了本文方法的有效性.

关键词: 非线性; 随机系统; 完全统计特征; FPK 方程

中图分类号: TP13 文献标识码: A

The complete statistical characterization control for a class of stochastic systems

YANG Heng-zhan^{1,2}, QIAN Fu-cai^{1,3†}, HUANG Jiao-ru², GAO Song²

(1. School of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an Shaanxi 710048, China;

2. Research Center of Autonomous Unmanned Systems, Xi'an Technological University, Xi'an Shaanxi 710021, China;

3. Key Laboratory for Fault Diagnosis and Maintenance of Spacecraft in Orbit, Xi'an Shaanxi 710043, China)

Abstract: For nonlinear stochastic systems, although the complete statistical characterization control method is superior to the traditional low moment control methods, it is difficult to apply the control law into the real system due to its complexity. A complete statistical characteristics control algorithm is presented for nonlinear stochastic systems excited by Gaussian white noise in this paper. Firstly, an exponential function is used to represent the probability density function which characterizes the statistical characteristics completely. Subsequently, the relationship between the Taylor series expansion coefficients of the exponential function and the feedback control gain is derived by the derivation of FPK (Fokker-Planck-Kolmogorov) equation constantly. Then, on the basis of the control objective, an optimization problem is given to obtain the feedback gain. And different tracking control strategies are given for different target probability density function: for the condition that the exponential expansion is finite terms, the control gains can be obtained directly, and completely track-target probability density function; under other conditions, a nearly track-target probability density could be got. The examples show the effectiveness of the proposed method.

Key words: nonlinear; stochastic systems; complete statistical characteristics; FPK equation

1 引言(Introduction)

世界充满随机性, 从量子系统到一般的工业系统, 无不如此. 现有的随机控制方法大都从闭环系统的稳定性出发, 以统计平均值、方差作为性能指标, 这些方法确实解决了线性二次高斯(linear quadratic

Gaussian, LQG) 控制问题^[1-4]. 然而, 由于 LQG 的设计仅以性能指标的均值为目标, 控制器性能受到了极大的限制, 非线性系统中尤其严重. 这种情况下, 完全统计特征控制方法受到越来越多的重视^[5-7].

完全统计特征控制方法把过程状态演化的概率密

收稿日期: 2015-07-04; 录用日期: 2016-03-14.

†通信作者. E-mail: fcqian@xaut.edu.cn; Tel.: +86 29-82312006.

本文责任编辑: 刘允刚.

国家自然科学基金项目(61273127, U1534208), 航天器在轨故障诊断与维修实验室开放课题(SDML-OF2015004), 陕西省科技攻关项目(2016GY-108), 陕西省国际科技合作重点项目(2015KW-024)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61273127, U1534208), Key Laboratory for Fault Diagnosis and Maintenance of Spacecraft in Orbit(SDML-OF2015004), Science and Technology Project of Shaanxi Province (2016GY-108) and Shaanxi International Science and Technology Cooperation Project of China (2015KW-024).

度函数作为设计目标,代替传统控制方法中的平均值、方差等低阶矩指标.对于随机系统来说,其完全统计特征都包含在概率密度函数(probability density function, PDF)中,因此,概率密度函数控制方法是对随机过程统计特性的完整刻画,有了概率密度函数,那么,诸如均值、方差、峭度等指标都可以通过概率密度函数精确算出.因此,概率密度函数控制远远优于以低阶矩近似的统计量的控制方法,也因此表现出了优秀的控制性能和研究价值.文[8]利用概率密度函数对互信息值进行估计,取得了良好的效果.文[9]把概率密度函数应用于故障预测领域.文[10-11]则针对从控制输入到输出概率分布函数的一般非高斯随机系统,提出了两步智能优化控制方法;针对从输入概率密度函数到输出概率密度函数的非高斯泛函算子模型,提出了统计信息集合优化方法.

近年来,非线性系统状态变量的概率密度函数形状跟踪受到了重视,文[12]针对受高斯白噪声激励的非线性随机系统,导出了控制增益与各阶矩的递推方程,构造了矩逼近优化问题,给出了使状态响应的概率密度函数形状跟踪期望形状的控制方法.文[13]以实际应用为目的,从PDF中抽出了一阶矩、高阶矩及熵的信息,提出了统计信息集合跟踪方法,既达到了跟踪目的,又简化了目标泛函,易于工程实施.

非线性随机系统完全统计特征控制方法中,FPK(Fokker-Planck-Kolmogorov)方程作为研究工具得到了广泛地研究和应用.FPK方程决定了系统状态响应概率密度转移路径.如果能够通过FPK方程得到系统响应的概率密度函数,就可以求解出系统响应的各阶统计特征量,对系统可靠性进行定性分析^[14].因此,如何求解FPK方程也就成为相关研究的一个中心课题.然而不幸的是,一般情况下很难得到系统FPK方程的精确平稳解.因此,FPK方程近似解的获取也就得到了广泛地研究.

本文针对非线性随机系统提出了一种对系统状态响应的完全统计特征进行控制的方法.首先将刻画完全统计特征的概率密度函数表示成指数函数,规避了FPK方程求解问题,而是通过FPK方程导出了指数函数Taylor展开的系数与待求反馈控制增益间的关系.通过该对应关系,就可以根据状态方程确定出系统的概率密度函数.在对目标概率密度函数的跟踪上,针对目标概率密度函数的不同情况,分别给出了采用本方法的跟踪控制策略.尤其是对于一般形式的概率密度函数,构造出一个简单易处理的一般优化问题,该优化问题的解一旦确定,就能够确定出控制函数多项式的形式.

2 问题描述(Problem statement)

考虑处于随机环境中的如下单自由度非线性系统:

$$\frac{dy}{dt} = f(y) + \omega(t), y(t_0) = y_0,$$

其中: $y(t) \in \mathbb{R}$ 是系统的状态响应, $\omega(t) \in \mathbb{R}$ 是均值为零的高斯白噪声,其谱密度为 S_0 , $f(\cdot) \in \mathbb{R}$ 为非线性函数, y_0 为确定性初始状态.

假定 $f(y)$ 具有如下多项式形式:

$$f(y) = a_0 + a_1 y + \cdots + a_v y^v, \quad (1)$$

其中: v 为多项式的次数, a_0, a_1, \cdots, a_v 为多项式系数.

本文要解决的控制问题为:确定一个状态反馈函数 $\mu(t) = u(y)$, 使得在其控制下,按如下动态系统(2)演化的状态响应 $y(t)$ 到达稳态时对应的概率密度函数 $p(y)$ 具有期望的形状 $p_d(y)$,

$$\frac{dy}{dt} = f(y) + u(y) + \omega(t), y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

$p_d(y)$ 是事先给定的,它是某个真实随机变量的实现.

研究表明,非线性系统用非线性反馈控制比线性反馈更为优越^[5],原因是非线性中包含更为丰富的相互作用.因此,本文的控制器 $u(y)$ 选取如下形式:

$$u(y) = b_0 + b_1 y + \cdots + b_w y^w, \quad (3)$$

其中: w 为控制器的多项式次数, b_0, b_1, \cdots, b_w 为多项式系数,即控制增益.

控制增益 b_0, b_1, \cdots, b_w 完全确定了控制 $u(y)$, 因此,本文解决的控制问题转化为控制增益的求取.

3 控制增益与各阶矩的关系(The relationship between the control gains and the moments)

对于非线性随机系统(2),状态 y 的所有统计特征都包含在概率密度函数PDF中,而PDF依据FPK方程进行演化.对于系统(2),其对应的FPK方程为

$$\frac{\partial p(y)}{\partial t} = - \frac{\partial [p(y)(f(y) + u(y))]}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [2\pi S_0 p(y)]}{\partial y^2}. \quad (4)$$

上述方程反映了PDF在时空中的演化过程,但由于系统的非线性部分 $f(y)$ 的存在,使得该方程即使一般意义下的数值解也变得极为困难.为克服这一困难,本文采用如下方法:将刻画完全统计特征的PDF表示成指数函数,然后通过FPK方程导出指数函数Taylor展开项系数与非线性多项式部分系数间的关系.具体过程如下:

令 $\phi(y) = f(y) + u(y)$, 根据式(1)和式(3),有

$$\phi(y) = \sum_{i=0}^v a_i y^i + \sum_{i=0}^w b_i y^i = \sum_{i=0}^m c_i y^i, \quad (5)$$

其中:

$$c_0 = a_0 + b_0, c_1 = a_1 + b_1, \dots, c_m = a_m + b_m. \quad (6)$$

式(6)中 m 取值为 v, w 两者数值中较大者. 如果 $v > w$, 那么 $b_{w+1}, b_{w+2}, \dots, b_m$ 为 0; 如果 $w > v$, 那么 $a_{v+1}, a_{v+2}, \dots, a_m$ 为 0.

令 $H = \pi S_0$, 结合 $\phi(y)$ 定义, 则方程(4)可以写为

$$\frac{\partial p(y)}{\partial t} = -\frac{\partial [p(y)\phi(y)]}{\partial y} + H \frac{\partial^2 [p(y)]}{\partial y^2}. \quad (7)$$

考虑到PDF的非负性, 令 $\eta(y) = \ln p(y)$, 则

$$p(y) = \exp[\eta(y)]. \quad (8)$$

将 $\eta(y)$ 在 $y = 0$ 处 Taylor 展开, 有

$$\eta(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i [\eta(y)]}{\partial y^i} \Big|_{y=0} \cdot y^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \tau_i y^i,$$

其中

$$\tau_i = \frac{\partial^i [\eta(y)]}{\partial y^i} \Big|_{y=0}. \quad (9)$$

下面建立 τ_i 和 $\phi(y)$ 多项式系数 c_0, c_1, \dots, c_m 之间的关系.

由式(8)有

$$\frac{\partial [p(y)]}{\partial t} = p(y) \frac{\partial [\eta(y)]}{\partial t}, \quad \frac{\partial [p(y)]}{\partial y} = p(y) \frac{\partial [\eta(y)]}{\partial y}.$$

把上式代入方程(7), 得到

$$\begin{aligned} p(y) \frac{\partial [\eta(y)]}{\partial t} = & -p(y) \frac{\partial [\phi(y)]}{\partial y} - \phi(y) p(y) \frac{\partial [\eta(y)]}{\partial y} + \\ & H [p(y) \left(\frac{\partial [\eta(y)]}{\partial y} \right)^2 + p(y) \frac{\partial^2 [\eta(y)]}{\partial y^2}]. \end{aligned}$$

两边消去 $p(y)$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\eta(y)]}{\partial t} = & -\frac{\partial [\phi(y)]}{\partial y} - \phi(y) \frac{\partial [\eta(y)]}{\partial y} + \\ & H \left[\left(\frac{\partial [\eta(y)]}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 [\eta(y)]}{\partial y^2} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

对式(10)两边关于 y 求 q 阶导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^q \eta(y)}{\partial y^q} \right) = & -\frac{\partial^{q+1} [\phi(y)]}{\partial y^{q+1}} - \frac{\partial^q}{\partial y^q} (\phi(y) \frac{\partial [\eta(y)]}{\partial y}) + \\ & H \frac{\partial^q}{\partial y^q} \left[\left(\frac{\partial [\eta(y)]}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 [\eta(y)]}{\partial y^2} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

上式右端的第 2 项与第 3 项应用 Leibniz 求导公式展开为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^q \eta(y)}{\partial y^q} \right) =$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^{q+1} [\phi(y)]}{\partial y^{q+1}} + H \frac{\partial^{q+2} [\eta(y)]}{\partial y^{q+2}} + \\ & \sum_{i=0}^q [-C_q^i \frac{\partial^{q-i} [\phi(y)]}{\partial y^{q-i}} \frac{\partial^{i+1} [\eta(y)]}{\partial y^{i+1}} + \\ & HC_q^i \frac{\partial^{q-i+1} [\eta(y)]}{\partial y^{q-i+1}} \frac{\partial^{i+1} [\eta(y)]}{\partial y^{i+1}}]. \end{aligned} \quad (12)$$

上式中, q 依次取 $1, 2, \dots, n+1$, 结合式(9)关于 τ_i 的定义, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_1}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial^2 [\phi(y)]}{\partial y^2} + H \frac{\partial^3 [\eta(y)]}{\partial y^3} + \right. \\ & \left. \sum_{i=0}^1 [-C_1^i \frac{\partial^{1-i} [\phi(y)]}{\partial y^{1-i}} \frac{\partial^{i+1} [\eta(y)]}{\partial y^{i+1}} + \right. \\ & \left. HC_1^i \frac{\partial^{2-i} [\eta(y)]}{\partial y^{2-i}} \frac{\partial^{i+1} [\eta(y)]}{\partial y^{i+1}} \right] \Big|_{y=0} = \\ & -2c_2 + H\tau_3 - c_1\tau_1 - c_0\tau_2 + 2H\tau_1\tau_2, \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial^3 [\phi(y)]}{\partial y^3} + H \frac{\partial^4 [\eta(y)]}{\partial y^4} + \right. \\ & \left. \sum_{i=0}^2 [-C_2^i \frac{\partial^{2-i} [\phi(y)]}{\partial y^{2-i}} \frac{\partial^{i+1} [\eta(y)]}{\partial y^{i+1}} + \right. \\ & \left. HC_2^i \frac{\partial^{3-i} [\eta(y)]}{\partial y^{3-i}} \frac{\partial^{i+1} [\eta(y)]}{\partial y^{i+1}} \right] \Big|_{y=0} = \\ & -6c_3 + H\tau_4 - 2c_2\tau_1 - 2c_1\tau_2 - c_0\tau_3 + \\ & H(2\tau_1\tau_3 + 2\tau_2^2), \\ & \vdots \\ \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial^{n+2} [\phi(y)]}{\partial y^{n+2}} + H \frac{\partial^{n+3} [\eta(y)]}{\partial y^{n+3}} + \right. \\ & \left. \sum_{i=0}^{n+1} [-C_{n+1}^i \frac{\partial^{n-i+1} [\phi(y)]}{\partial y^{n-i+1}} \frac{\partial^{i+1} [\eta(y)]}{\partial y^{i+1}} + \right. \\ & \left. HC_{n+1}^i \frac{\partial^{n-i+2} [\eta(y)]}{\partial y^{n-i+2}} \frac{\partial^{i+1} [\eta(y)]}{\partial y^{i+1}} \right] \Big|_{y=0} = \\ & -(n+2)!c_{n+2} + H\tau_{n+3} + \\ & \left. \sum_{i=0}^{n+1} [-P_{n+1}^i c_{n-i+1} \tau_{i+1} + C_{n+1}^i H\tau_{n-i+2} \tau_{i+1}]. \right. \end{aligned}$$

由于关注的是稳态意义下PDF形状控制问题, 当系统处于稳态时, 系统的瞬态过程已经结束, 即

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial t} = 0, \text{ 因此得到方程组}$$

$$\begin{cases} -2c_2 + H\tau_3 - c_1\tau_1 - c_0\tau_2 + 2H\tau_1\tau_2 = 0, \\ -6c_3 + H\tau_4 - 2c_2\tau_1 - 2c_1\tau_2 - c_0\tau_3 + \\ H(2\tau_1\tau_3 + 2\tau_2^2) = 0, \\ \vdots \\ -(n+2)!c_{n+2} + H\tau_{n+3} + \\ \sum_{i=0}^{n+1} [-P_{n+1}^i c_{n-i+1} \tau_{i+1} + C_{n+1}^i H\tau_{n-i+2} \tau_{i+1}] = 0. \end{cases} \quad (13)$$

可见, 系统处于稳态时, 非线性多项式系数和状态响应PDF的指数 $\eta(y)$ 的 Taylor 展开系数 τ_i 之间存在上

述数学关系.

视 c_0, c_1, \dots, c_n 为方程组 (13) 的变量, 解该方程组, 有

$$c_i = \frac{H}{i!} \tau_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (14)$$

由于 $\phi(y)$ 最高次数为 m , 因此 c_{m+1}, c_{m+2}, \dots 都为 0, $\eta(y)$ 可表达如下:

$$\eta(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \tau_i y^i = \tau_0 + \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i} c_{i-1} y^i.$$

因此, 稳态情况下系统(2)的状态PDF表达如下:

$$p(y) = \exp(\eta(y)) = \theta_0 \exp\left[\frac{1}{H} \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i} c_{i-1} y^i\right], \quad (15)$$

其中 $\theta_0 = \exp(\tau_0)$.

根据PDF的性质, $\int_{-\infty}^{\infty} p(y) dy = 1$, 因此, θ_0 通过下式获取

$$\theta_0 = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{H} \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i} c_{i-1} y^i\right) dy}. \quad (16)$$

这样, 一旦 $\phi(y)$ 的形式确定, 就能够通过式(15)和式(16)确定 $p(y)$.

下面, 确定控制 $u(y)$, 使系统(2)的状态响应 $y(t)$ 的PDF $p(y)$ 在稳态时跟踪期望的PDF $p_d(y)$.

4 完全统计特征控制(The complete statistical characterization control)

以下用PDF形状逼近代替完全统计特征控制, 并根据期望的PDF的不同特点, 确定相应的控制策略.

4.1 期望PDF指数展开为有限项(The exponential expansion of the PDF is finite terms)

如果期望PDF的指数展开为有限项, 就能够把 $p_d(y)$ 改造为 $p_d(y) = \exp(\eta_d(y))$ 的形式, 此时 $\eta_d(y) = \ln p_d(y)$, 且 $\eta_d(y)$ 为有限项多项式形式.

假设 $\eta_d(y)$ 最高项次为 n , 即

$$\eta_d(y) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \tau_{di} y^i,$$

其中

$$\tau_{di} = \left. \frac{\partial^i [\eta_d(y)]}{\partial y^i} \right|_{y=0}. \quad (17)$$

对于 $p(y)$ 跟踪 $p_d(y)$, 用 $\tau_{d1}, \tau_{d2}, \dots, \tau_{dm}$ 代替式(14)中的 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$, 即可计算出 c_0, c_1, \dots, c_m . 再根据式(6), 可以得到控制增益 b_0, b_1, \dots, b_w , 即

$$b_0 = c_0 - a_0, \quad b_1 = c_1 - a_1, \quad \dots, \quad b_w = c_w - a_w. \quad (18)$$

4.2 期望PDF指数展开为无限项(The exponential expansion of the PDF is infinite terms)

由 $p_d(y) = \exp[\eta_d(y)]$, 有 $\eta_d(y) = \ln p_d(y)$. 对

$\eta_d(y)$ 进行Taylor展开, 则

$$\eta_d(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \tau_{di} y^i.$$

如果仅取前 n 阶展开, 采用上节方法, 同样可以计算出 c_0, c_1, \dots, c_n 并进一步确定出 $u(y)$. 此时 $p(y)$ 跟踪 $p_d(y)$ 存在误差, 误差源如下:

$$\epsilon(y) = \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{i!} \tau_{di} y^i.$$

通过取更大的 m 的值, 可以减少 $\epsilon(y)$ 的影响, 以达到满意的PDF跟踪精度. 不过 m 过大的话, 会导致控制器过于复杂, 实际应用中应权衡选择.

4.3 期望PDF为一般形式(The PDF is ordinary form)

这种情况下可能无法或难以采用前述 τ_i 逼近的方法. 为了解决PDF逼近问题, 构造如下优化问题:

$$\min e = \int_{-\infty}^{\infty} [p(y) - p_d(y)]^2 dy. \quad (19)$$

求解该优化问题, 可以确定出 $u(y)$. 解决该优化问题方法很多, 本文不再详细描述.

实际上, 对于前两种情况来说, 也可以采用本方法, 通过优化问题的求解确定出 $u(y)$ 结构.

5 数值算例及仿真(Examples simulation)

综上所述, 本文提出的非线性随机系统完全统计特征控制方法可通过下面的算法来实施:

Step 1 将目标PDF进行指数展开. 如果无法展开为指数有限项形式, 进入Step 2, 否则进入Step 3;

Step 2 求解优化问题(19), 约束 $p(y)$ 具有有限指数展开, 获得最优 $p(y)$ 并把 $p(y)$ 当做 $p_d(y)$ 对待;

Step 3 按照式(17)计算 τ_{di} ;

Step 4 用 τ_{di} 代替式(14)中的 τ_i , 计算 c_i 的值;

Step 5 按照式(18)计算 b_i 的值;

Step 6 按照式(3)确定控制器 $u(y)$.

下面通过实例来说明本文方法的特点.

考虑如下受白噪声激励的非线性系统:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y - 10y^3 + u(y) + \omega(t), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\omega(t)$ 是均值为 0 的高斯白噪声, 其谱密度为 $1/\pi$.

期望的PDF为

$$p_d(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (21)$$

其中: $\mu = 1, \sigma = 0.5$. 期望PDF为高斯形状, 容易得到其 $\tau_{d0}, \tau_{d1}, \dots, \tau_{dn}$ 分别为

$$\tau_{d0} = -2.226, \quad \tau_{d1} = 4.000,$$

$$\tau_{d2} = -4.000, \quad \tau_{di} = 0, \quad i = 3, 4, \dots$$

该期望PDF能够进行指数展开且展开项有限, 因此直接用 τ_{di} 代替式(14)中的 τ_i , 得

$$c_0 = 4, c_1 = -4, c_i = 0, i = 2, 3, \dots$$

由式(20)可知

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, \\ a_3 = -10, a_i = 0, i = 4, 5, \dots$$

把 a_i, c_i 的值代入式(18), 得到 b_i 的值为

$$b_0 = 4, b_1 = -5, b_2 = 0, \\ b_3 = 10, b_i = 0, i = 4, 5, \dots$$

因此, 控制函数为

$$u(y) = 4 - 5y + 10y^3.$$

根据式(15), 控制后的PDF为

$$p(y) = \theta_0 \exp[4y - 2y^2],$$

其中 θ_0 由式(16)求得为 $\theta_0 = 0.108$. 因此, $p(y)$ 的完整表达为

$$p(y) = 0.108 \exp[4y - 2y^2].$$

用 $u(y)$ 控制目标系统, 状态 $y(t)$ 稳态时的PDF形状如图1所示. 图中实线为目标PDF, 虚线为控制后的PDF. 仿真结果可以看出控制后的PDF完全跟踪目标PDF, 这是由于目标PDF的指数函数的Taylor展开为有限项, 因此, 可以求解出合适的控制器, 使得系统控制后的 $p(y)$ 能够完全跟踪 $p_d(y)$.

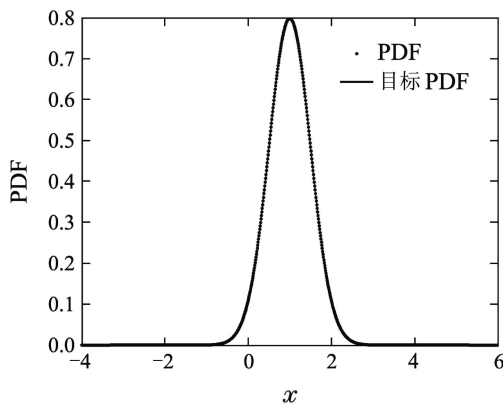


图 1 被控PDF与目标PDF

Fig. 1 The controlled PDF and the goal PDF

上面的目标PDF只有一个峰值, 而实际系统中很多都要求是多峰形状, 例如

$$p_d(y) = 0.182 \exp(2y^2 - y^4 - 0.3 \sin y).$$

相应的 $\tau_{d0}, \tau_{d1}, \dots, \tau_{dn}$ 分别为

$$\tau_{d0} = -1.704, \tau_{d1} = -0.3, \tau_{d2} = 4, \tau_{d3} = -0.3, \\ \tau_{d4} = -24, \tau_{d2i-1} = -0.3, i = 3, 4, \dots, \\ \tau_{d2i} = 0, i = 3, 4, \dots$$

假定控制器最高次为3. 先采用方法2, 用 $\tau_{d1}, \tau_{d2}, \tau_{d3}, \tau_{d4}$ 代替式(14)中的 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$, 得

$$c_0 = -0.3, c_1 = 4, c_2 = -0.15, c_3 = -4.$$

根据本文方法, $u_1(y)$ 和PDF1 $p_1(y)$ 分别为

$$u_1(y) = -0.3 + 3y - 0.15y^2 + 6y^3, \\ p_1(y) = 0.176 \exp(-0.3y + 2y^2 - 0.05y^3 - y^4).$$

再采用方法3, 构造优化问题

$$\min e = \int_{-\infty}^{\infty} [p(y) - p_d(y)]^2 dy, \quad (22)$$

其中 $p(y)$ 表达式如下:

$$p(y) = \frac{\exp(c_0 y + \frac{1}{2} c_1 y^2 + \frac{1}{3} c_2 y^3 + \frac{1}{4} c_3 y^4)}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(c_0 y + \frac{1}{2} c_1 y^2 + \frac{1}{3} c_2 y^3 + \frac{1}{4} c_3 y^4) dy}.$$

求解优化问题(22), 得

$$c_0 = -0.268, c_1 = 4.039, \\ c_2 = 0.074, c_3 = -4.087.$$

此时, $\min e = 0.0000732$. $u_2(y)$ 和PDF2 $p_2(y)$ 分别为

$$u_2(y) = -0.268 + 3.039y + 0.074y^2 + 5.913y^3, \\ p_2(y) = 0.183 \exp(-0.268y + 2.020y^2 + 0.025y^3 - 1.022y^4).$$

分别用 $u_1(y), u_2(y)$ 控制状态 $y(t)$, 稳态时PDF1, PDF2的效果如图2所示. 图中实线为目标PDF.

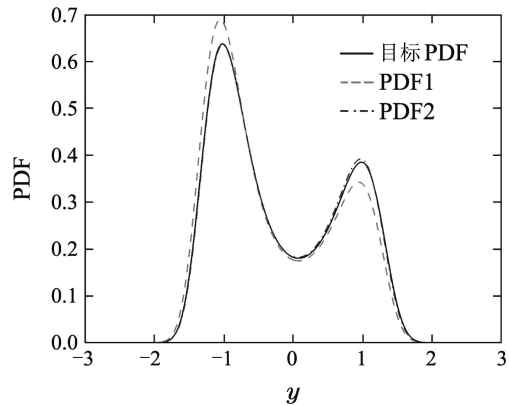


图 2 被控PDF与具有多峰形式的目标PDF

Fig. 2 The controlled PDF and the goal PDF with multi-peak

从图2可以看出两点: 1) 尽管采用优化问题的方法比采用方法2计算过程复杂, 但是却能在同等阶数下, 控制器取得更好的跟踪效果; 2) 多峰目标函数对应 $\eta_d(y)$ 的Taylor展开为无限项, 但仍能确定出合适的控制器, 使得系统控制后的 $p(y)$ 尽量逼近 $p_d(y)$.

为了进一步分析本文方法的效果, 假设目标PDF

难以展开为指数形式,例如如下三角形形状:

$$\begin{cases} p_d(y) = -0.5y + 0.5, & -1 \leq y \leq 1, \\ p_d(y) = 0, & y < -1 \text{ 或 } y > 1. \end{cases}$$

采用方法3,分别限定PDF指数多项式最高次数为4和6,并构造优化问题(19).

限定PDF指数多项式最高次数为4时,得到

$$\begin{aligned} c_0 &= -0.359, c_1 = 1.664, \\ c_2 &= -9.375, c_3 = -16.836. \end{aligned}$$

此时, $\min e = 0.0356$. $u_{t1}(y)$ 和 $p_{t1}(y)$ 分别为

$$\begin{aligned} u_{t1}(y) &= -0.359 + 0.664y - 9.375y^2 - 6.836y^3, \\ p_{t1}(y) &= 0.462 \exp(-0.359y + 0.832y^2 - \\ & 3.125y^3 - 4.209y^4). \end{aligned}$$

限定PDF指数多项式最高次数为6时,得到

$$\begin{aligned} c_0 &= -0.355, c_1 = 1.656, c_2 = -9.366, \\ c_3 &= -16.686, c_4 = 0.091, c_5 = -0.055. \end{aligned}$$

此时, $\min e = 0.0354$. $u_{t2}(y)$ 和 $p_{t2}(y)$ 分别为

$$\begin{aligned} u_{t2}(y) &= -0.355 + 0.656y - 9.366y^2 - 6.686y^3 + \\ & 0.091y^4 - 0.055y^5, \\ p_{t2}(y) &= 0.463 \exp(-0.355y + 0.828y^2 - 3.122y^3 - \\ & 4.172y^4 + 0.018y^5 - 0.009y^6). \end{aligned}$$

分别用 $u_{t1}(y)$ 和 $u_{t2}(y)$ 控制状态 $y(t)$,稳态时的PDF1和PDF2形状如图3所示.

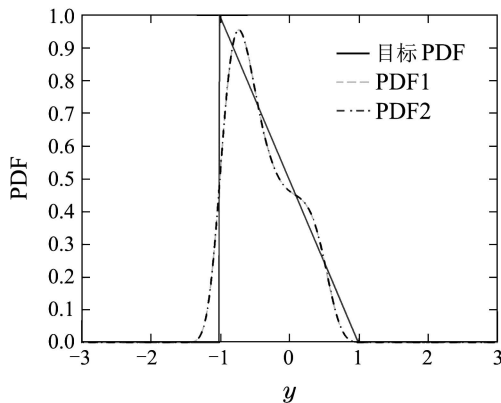


图3 被控PDF与三角形目标PDF

Fig. 3 The controlled PDF and the goal PDF with triangle

本例中 $\min e$ 相比前例明显较大.可见,如果目标PDF难以展开为指数多项式形式,采用本文方法难以保证控制效果.另外,对于该目标PDF,为了提高PDF跟踪精度,控制器阶次由4次提高到6次,尽管付出了计算工作量大大提高以及控制器的复杂度也显著提高的代价.从仿真结果看, $\min e$ 改善还不足1%.

仿真表明,使用本文提出的方法,对于目标PDF能

够展开为指数多项式形式的情况具有良好的控制效果;而对于目标PDF难以展开为指数多项式的情况,尽管能够取得一定的效果,但却无法保证控制精度.

6 结论(Conclusions)

对于非线性随机系统,状态变量必然具有随机不确定性,而随机变量的PDF完全刻画了不确定性的统计特征.动态系统随时间的演化过程遵从FPK方程,但FPK方程在绝大多数情况下无法获得解析解,即使获得数值解也存在很大困难.本文利用FPK方程,确立了PDF指数函数和控制器多项式的关系,获得了系统稳态PDF的表达形式,解决了PDF跟踪控制问题,仿真结果表明了本文方法对能够展开为指数多项式形式的目标PDF的有效性,尤其是在目标PDF指数函数Taylor展开为有限项条件下,跟踪精度更高;而对于目标PDF指数函数Taylor展开为无限项的情况,通过增加控制器的阶次,也能够提高跟踪精度.同时,针对一般形式的目标PDF,本文把PDF跟踪问题转换为优化问题,为借鉴在数学领域出现的新的优化方法奠定了基础.另外,本文提出的控制算法具有分离性特点,即控制增益与状态无关,可以离线计算,在线应用,使用方便.

尽管非线性系统的PDF控制已经出现了大量研究工作,但都因为算法复杂而难以实际实施.本文与文献[13]以不同的技术路线,为控制算法在实际物理系统的应用提供了新的途径.但是,如上分析,本文方法对于目标PDF具有指数多项式形式的情况能够达到满意的控制效果.对于一般形式的目标PDF如何达到更好的跟踪效果?这个问题值得进一步深入研究.

参考文献(References):

- [1] ASTROM K J. *Introduction to Stochastic Control Theory* [M]. New York: Academic Press, 1970
- [2] QIAN F C, GAO J J, LI D. Complete statistical characterization of discrete-time LQG and cumulant control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2110 – 2115.
- [3] LI D, QIAN F C, FU P L. Optimal nominal dual control for discrete-time LQG problem with unknown parameters [J]. *Automatica*, 2008, 44(1): 119 – 127.
- [4] LI D, QIAN F C, GAO J J. Performance-first control for discrete-time LQG problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(9): 2225 – 2230.
- [5] FORBES M G, GUAY M, FORBES J F. Control design for first-order processes: Shaping the probability density of the process state [J]. *Journal of Process Control*, 2004, 14(4): 399 – 410.
- [6] KARNY M. Towards fully probabilistic control design [J]. *Automatica*, 1996, 32(12): 1719 – 1722.
- [7] PAOLA M D, RICCIARDI G, VASTA M. A method for the probabilistic analysis of nonlinear systems [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1995, 10(1): 1 – 10.
- [8] HAN Min, LIU Xiaoxin. Mutual information estimation based on Copula entropy [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(7): 875

- 879.
(韩敏, 刘晓欣. 基于Copula熵的互信息估计方法 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(7): 875 – 879.)
- [9] SI Xiaosheng, HU Changhua, ZHANG Qi, et al. Fault prognosis based on evolving belief-rule-base system [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(12): 1579 – 1586.
(司小胜, 胡昌华, 张琪, 等. 基于进化信度规则库的故障预测 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(12): 1579 – 1586.)
- [10] GUO L, WANG H. *Stochastic Distribution Control System Design: A Convex Optimization Approach* [M]. London: Springer, 2010.
- [11] GUO L, WANG H. PID controller design for output PDFs of stochastic systems using linear matrix inequalities [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B, Cybernetics*, 2005, 35(1): 65 – 71.
- [12] YANG Hengzhan, QIAN Fucui, GAO Yun, et al. The shape regulated of probability density function for uncertain stochastic systems [J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(24): 240508.
(杨恒占, 钱富才, 高韵, 等. 随机系统的概率密度函数形状调节 [J]. 物理学报, 2014, 63(24): 240508.)
- [13] YI Y, GUO L, WANG H. Adaptive statistic tracking control based on two steps neural networks with time delays [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2009, 20(3): 420 – 429.
- [14] ZHANG Z B, CHEN N L, GAO Z. *The Random Vibration Theory of the Nonlinear and Application* [M]. Hangzhou : Zhejiang University Press, 1986.

作者简介:

杨恒占 (1976–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为最优控制、随机系统、系统辨识, E-mail: yanghengzhan@126.com;

钱富才 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性系统、最优控制、随机系统、系统辨识、故障诊断, E-mail: fcqian@xaut.edu.cn;

黄姣茹 (1987–), 女, 博士, 目前研究方向为非线性系统、随机控制、最优控制、系统辨识, E-mail: huangjiaoru@126.com;

高嵩 (1966–), 男, 教授, 目前研究方向为分数阶控制、最优控制、系统辨识, E-mail: gaos@xatu.edu.cn.