第 33 卷第 8 期
2016 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 33 No. 8
Aug. 2016

DOI: 10.7641/CTA.2016.50632

采用区间数排序的采矿方法优选模型及其应用

叶义成[1,2†], 姚　囝[1], 王其虎[1]

(1. 武汉科技大学 资源与环境工程学院, 湖北 武汉 430081;

2. 湖北省页岩钒资源高效清洁利用工程技术研究中心, 湖北 武汉 430081)

摘要: 针对采矿方法优选多属性决策中评价指标权重值难以确定和区间数排序难的问题, 通过统计分析大量专家评价指标及其权重值, 提出了基于专家经验统计的评价指标区间数权重值确定法; 定义了有限个区间数排序时的目标区间数, 解析了基于高斯平面直角坐标系的区间数与目标区间数二维关系. 在此基础上, 基于平面几何和极限的原理, 定义了可实现对有限个区间数及同中轴区间数排序的区间数优势度函数, 进而给出了该基于二维信息的区间数排序方法在多属性决策中的应用步骤. 最后, 通过采矿方法优选多属性决策实例验证了该方法的可行性和有效性.

关键词: 决策; 采矿方法优选; 区间数; 优势度函数; 排序

中图分类号: C934　　　**文献标识码**: A

Mining method optimal selection model and its application by using interval numbers ranking method

YE Yi-cheng[1,2†], YAO Nan[1], WANG Qi-hu[1]

(1. School of Resources and Environmental Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430081, China;
2. Hubei Provincial Engineering Technology Research Center of High Efficient Clean Utilization Shale Vanadium Resource, Wuhan Hubei 430081, China)

Abstract: In order to solve the problems of difficulty in evaluation indexes values determination and the difficulty of ranking interval numbers during the optimal selection of mining method in multiple attribute decision making, the interval-number-weights of evaluation indexes determination method based on the statistics of experts' experiences was proposed after numerous mining experts' evaluation indexes and their values were counted and analyzed. The target interval number was defined during ranking finite interval numbers, and two-dimensional relations between interval numbers and the target interval number were analyzed which based on interval numbers be indicated in the Gauss-Krueger plane rectangular coordinate system. On the basic of these, the advantage degree function of interval numbers which can rank finite interval numbers and interval numbers with equal symmetry axis was defined based on the principles of geometry and limits, then the applying procedures of ranking interval numbers in multiple attribute decision making based on two-dimensional information were given. At last, the feasibility and effectiveness of this method were verified through a mining method optimal selection multiple attribute decision making example.

Key words: decision making; mining method optimal selection; interval number; advantage degree function; ranking

1　引言(Introduction)

采矿方法的选择是否合理决定了整个矿山的生产运营效果及各项技术经济指标的优劣. 采矿方法的选择受多项技术经济指标影响, 且各影响因素的关系也不明确, 构成一个复杂的多属性决策问题[1–3]. 在实际决策过程中, 由于人类思维的模糊性及采矿工程的复杂不确定性, 评价指标值往往不是确定的数值, 而是用一个范围来表示, 该范围构成一个区间数. 多属性决策中引入区间数表征评价指标值, 可以更好地接近复杂不确定的实际, 更符合人们的模糊思维习惯[4–6].

采矿方法优选的评价指标赋权法主要有主观赋权法、客观赋权法和组合赋权法, 其中主观赋权法实际应用最多[7]. 主观赋权法往往依靠少数甚至个别专家的主观经验判断, 存在主观随意性较强的不足[1]. 客

收稿日期: 2015−07−20; 录用日期: 2016−04−28.
†通信作者. E-mail: yeyicheng@wust.edu.cn; Tel.: +86 27-68862885.
本文责任编委: 张化光.
国家“十二五”科技支撑计划项目(2011BAB05B03), 国家自然科学基金项目(51204127)资助.
Supported by Key Projects in National Science Technology Pillar Program during Twelfth Five-Year Plan Period of China (2011BAB05B03) and National Natural Science Foundation of China (51204127).

观赋权法依据评价指标属性值差异大小对各指标进行权重赋值, 仅以区分各方案的差异为目的, 赋权结果存在明显的失真. 组合赋权法虽然结合以上两种赋权法的优点, 但不可避免存在两种方法的缺点. 因此, 对于区间数多属性决策问题的权重值确定方法, 仍需要在主观赋权法的前提下减少因个别专家的主观经验错误而导致的权重值不合理问题.

区间数的排序是区间数多属性决策问题的关键, 许多学者也进行了较多研究[8–10]. 目前大量关于区间数排序方法的研究中, 分为确定性排序方法和基于度的排序方法. 确定性排序方法一般是根据两区间数在数轴上的位置关系, 通过区间长度等数值的运算来确定区间数的相对排序, 该方法虽然计算简单直观, 但区间数的信息可能大量丢失, 影响决策的准确性. 基于度的排序方法一般通过对区间数信息的挖掘并对信息进行处理和运算, 计算一个区间数优于另一区间数的程度[10], 具有较好的效果, 但一般计算较为复杂. 此外, 对于某些有特殊关系的区间数, 很多方法无法对其进行排序, 比如[2, 8]和[4, 6]这种包含关系的同中轴区间数, 很多排序方法认为两区间数相等, 显然不符合人们主观的决策习惯. Moore[11]首先提出了一种无相交区间的区间数的排序方法; Ishibuchi和Tanaka[12]在此基础上做出重要改进, 定义了两区间数的线性规划中弱优先顺序关系, 但该方法只能比较区间数的优先顺序, 不能区间数之间相互比较的优劣程度; Kundu[13]提出了一种模糊左(右)关系函数计算了两个区间数的偏序关系及其程度, 但对于同中轴区间数无法排序; Nakahara[14]、张全等[15]分别给出了基于区间数中轴和长度信息的两个区间数大小比较的可能度函数, 函数计算简单直观, 但同样无法实现对同中轴区间数的排序; 张全等[16]考虑落了在区间内的评价值服从正态分布的区间数排序问题, 推导了一个区间数优于另一个区间数的可能度计算方法, 无法实现对同中轴区间数的排序; XU[17]在Nakahara基础上推导了类似的可能度函数, 因此与其方法存在同样的优缺点; Sengupta和Pal[18]提出了一个基于区间数中轴和长度信息的可接受度指标, 实现了对同中轴区间数的排序, 但对于多个区间数的排序较为困难; 兰继斌等[19]提取区间数中的隐形数据并对数据进行处理, 根据各个区间数与目标区间数相似度程度的不同, 提出了一种基于相似度的区间数排序方法, 实现了对同中轴区间数的排序, 具有较好的排序效果.

通过区间数二维信息挖掘, 将区间数关系在数轴上表示的通常表征方式改为在高斯平面直角坐标系中表征, 提出一种基于二维信息的区间数排序方法, 能克服区间数排序方法计算复杂、特殊关系的区间数难以排序的难题; 针对典型的采矿方法区间数多属性决策问题, 采用基于统计方法的评价指标权重值计算方法, 通过对大量采矿行业专家在采矿方法优选过程中评价指标及其权重值的统计分析, 构建了基于专家经验统计的评价指标区间数权重值确定法.

2 区间数基本知识(Preliminaries of interval numbers)

2.1 区间数基本定义(Basic definitions of interval numbers)

定义 1[15,20] 称$\tilde{a}=[a^{\rm L},a^{\rm U}]=\{a|a^{\rm L}\leqslant a\leqslant a^{\rm U}, a^{\rm L}, a^{\rm U}\in\mathbb{R}\}$为一个区间数, $a^{\rm L}$和$a^{\rm U}$分别为$\tilde{a}$的下界和上界. 特别地, 当$a^{\rm L}=a^{\rm U}$时, $\tilde{a}$退化为一个实数.

定义 2[5,12] 两区间数$\tilde{a}=[a^{\rm L},a^{\rm U}]$和$\tilde{b}=[b^{\rm L},b^{\rm U}]$, 则$\tilde{a}+\tilde{b}=[a^{\rm L}+b^{\rm L},a^{\rm U}+b^{\rm U}]$; 若$a^{\rm L},b^{\rm L}>0$, 则称$\tilde{a},\tilde{b}$为正区间数, $\tilde{a}\bigotimes\tilde{b}=[a^{\rm L}\cdot b^{\rm L},a^{\rm U}\cdot b^{\rm U}]$.

定义 3[18,21] 区间数$\tilde{a}=[a^{\rm L},a^{\rm U}]$, 称$l^{+}(\tilde{a})=(a^{\rm L}+a^{\rm U})/2$为区间数$\tilde{a}$的中轴, 称$l^{-}(\tilde{a})=a^{\rm U}-a^{\rm L}$为区间数$\tilde{a}$的长度.

定义 4[15,22] 两区间数$\tilde{a}=[a^{\rm L},a^{\rm U}]$和$\tilde{b}=[b^{\rm L},b^{\rm U}]$, 定义$P(\tilde{a}\succ\tilde{b})$为$\tilde{a}$优于$\tilde{b}$的优势度$P(\tilde{a}\succ\tilde{b})\in[0,1]$, 且恒有$P(\tilde{a}\succ\tilde{b})+P(\tilde{b}\succ\tilde{a})=1$. 若$P(\tilde{a}\succ\tilde{b})>0.5$, 则$\tilde{a}\succ\tilde{b}$; 若$P(\tilde{a}\succ\tilde{b})=0.5$, 则$\tilde{a}=\tilde{b}$; 若$P(\tilde{a}\succ\tilde{b})$ $x<0.5$, 则$\tilde{b}\succ\tilde{a}$.

定义 5[12,17] 两区间数$\tilde{a}=[a^{\rm L},a^{\rm U}]$和$\tilde{b}=[b^{\rm L},b^{\rm U}]$, 若$a^{\rm L}\geqslant b^{\rm U}$, 则$P(\tilde{a}\succ\tilde{b})=1, P(\tilde{b}\succ\tilde{a})=0$.

2.2 目标区间数(The target interval numbers)

设$\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n$为一组区间数, $\tilde{a}_{\rm m}$为其中一个区间数, 若$a_{\rm m}^{\rm U}=\max(a_1^{\rm U},a_2^{\rm U},\cdots,a_n^{\rm U})$, 则称$\tilde{a}_{\rm m}=[a_{\rm m}^{\rm L},a_{\rm m}^{\rm U}]$为目标区间数; 若$\max(a_1^{\rm U},a_2^{\rm U},\cdots,a_n^{\rm U})=a_{\rm c}^{\rm U}=a_{\rm d}^{\rm U}=\cdots=a_k^{\rm U}, a_i^{\rm L}=\max(a_{\rm c}^{\rm L},a_{\rm d}^{\rm L},\cdots,a_k^{\rm L})$, 则目标区间数为$\tilde{a}_i$, 即当有多个相等的最大区间数上界值时, 再比较上界值相等的各区间数的下界值, 取下界值最大的区间数为目标区间数. 选取目标区间数的目的是在区间数比较前先确定目标, 使比较更有目的性, 减少比较次数和计算量.

2.3 基于高斯平面直角坐标系的区间数二维关系解析(Two-dimensional relations of interval numbers analysis in Gauss-Krueger plane rectangular coordinate system)

在决策科学中, 区间数属性值的上下界一般均为正实数, 因此仅对正区间数进行研究, 同时考虑非退化区间数的情况, 即$\tilde{a}=[a^{\rm L},\ a^{\rm U}]=\{a|a^{\rm L}\leqslant a\leqslant a^{\rm U}, a^{\rm L}<a^{\rm U},\ a^{\rm L},a^{\rm U}\in\mathbb{R}^{+}\}$. 将区间数表征在高斯平面直角坐标系中的方法见图1, 并对图1作如下说明.

1) 区间数的下界与上界数值分别在高斯平面直角坐标系中的x轴与y轴方向表示.

2) 假设$\tilde{a}=[a^{\rm L},\ a^{\rm U}]$为一组区间数的目标区间

数, 易得其它任意区间数$\tilde{a}_*$对应的点$(a_*^{\mathrm{L}}, a_*^{\mathrm{U}})$均能在且必在由3条直线$y = a^{\mathrm{U}}$, $x = 0$和$y = x$围成的三角区域内表示.

3) 用4条线$y = a^{\mathrm{L}}$, $x = a^{\mathrm{L}}$, $y = -x + 2l^+(\tilde{a})$和$y = x + l^-(\tilde{a})$可将三角区域划分为5个区域, 这4条线分别表示该区间数组内上界等于目标区间数下界的区间数集合、与目标区间数等上界的区间数集合、与目标区间数等中轴的区间数集合和与目标区间数等长度的区间数集合.

4) 三角区域内$y = a^{\mathrm{L}}$下方(⑤区内)的点对应的区间数与目标区间数相离, 即对应区间数的上界小于目标区间数的下界; $x = a^{\mathrm{L}}$右方(③和④区内)的点对应的区间数被目标区间数包含, 即对应区间数的上界大于目标区间数的上界且其下界小于目标区间数的下界; ①和②区内的点对应的区间数与目标区间数相交, 即对应区间数的上界大于目标区间数的上界且其下界小于目标区间数的下界;

5) $y = -x + 2l^+(\tilde{a})$左下方(①②③⑤区内)的点对应的区间数中轴比目标区间数中轴小, 另一侧反之; $y = x + l^-(\tilde{a})$右下方(②③④区内)的点对应的区间数长度比目标区间数长度小, 另一侧反之.

3 区间数排序方法(Ranking method of interval numbers)

3.1 区间数优势度函数(The advantage degree function of interval numbers)

由图1可见, 当区间数$\tilde{a}_* = [a_*^{\mathrm{L}}, a_*^{\mathrm{U}}]$在高斯平面直角坐标系中的对应点$(a_*^{\mathrm{L}}, a_*^{\mathrm{U}})$落在直线$y = -x + 2l^+(\tilde{a})$时, 区间数$\tilde{a}_*$与目标区间数$\tilde{a}$中轴相等, 即$l^+(\tilde{a}_*) = l^+(\tilde{a})$, 因此称$y = -x + 2l^+(\tilde{a})$为区间等轴函数. 同理, 称$y = x + l^-(\tilde{a})$为区间等长函数.

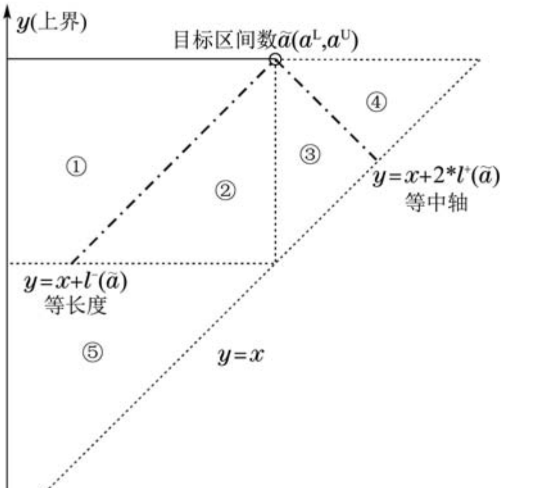

图 1 高斯平面直角坐标系中的区间数

Fig. 1 Interval numbers in the Gauss-Krueger plane rectangular coordinate system

根据区间数中轴和长度信息, 及其在高斯平面直角坐标系表征时与目标区间数的区间等轴函数$y = -x + 2l^+(\tilde{a})$和区间等长函数$y = x + l^-(\tilde{a})$距离的变化规律, 基于极限和分段函数的原理, 设计区间数优势度函数.

①②③④区(包括边界)中离目标区间数$\tilde{a}$的区间等轴函数$y = -x + 2l^+(\tilde{a})$和区间等长函数$y = x + l^-(\tilde{a})$的两侧的最远点分别为$(0, a^{\mathrm{L}})$, $(a^{\mathrm{U}}, a^{\mathrm{U}})$, (a_i, a_i)和$(0, a^{\mathrm{U}})$, 其中(a_i, a_i)为$y = x(a^{\mathrm{L}} < x < a^{\mathrm{U}})$上的任意一点. 各点对应的区间数$\tilde{a}_*$的$l^-(\tilde{a}_*)$或$l^+(\tilde{a}_*)$均为极小值或极大值.

直线$y = -x + 2l^+(\tilde{a})$下侧最远点$(0, a^{\mathrm{L}})$和上侧最远点$(a^{\mathrm{U}}, a^{\mathrm{U}})$与该直线距离

$$\begin{cases} d_{1\max}^- = \dfrac{|0 + a^{\mathrm{L}} - 2l^+(\tilde{a})|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{a^{\mathrm{U}}}{\sqrt{2}}, \\ d_{1\max}^+ = \dfrac{|a^{\mathrm{U}} + a^{\mathrm{U}} - 2l^+(\tilde{a})|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{l^-(\tilde{a})}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

直线$y = x + l^-(\tilde{a})$下侧最远点(a_i, a_i)和上侧最远点$(0, a^{\mathrm{U}})$与该直线距离

$$\begin{cases} d_{2\max}^- = \dfrac{|a_i - a_i + l^-(\tilde{a})|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{l^-(\tilde{a})}{\sqrt{2}}, \\ d_{2\max}^- = \dfrac{|0 - a^{\mathrm{U}} + l^-(\tilde{a})|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{a^{\mathrm{L}}}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

对于直线$y = -x + 2l^+(\tilde{a})$下侧(①②③区)的任意点$(a_*^{\mathrm{L}}, a_*^{\mathrm{U}})$, 该点离直线的距离

$$d_{1*}^- = \frac{|a_*^{\mathrm{L}} + a_*^{\mathrm{U}} - 2l^+(\tilde{a})|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2l^+(\tilde{a}) - 2l^+(\tilde{a}_*)}{\sqrt{2}}.$$

对于直线$y = -x + 2l^+(\tilde{a})$上侧(④区)的任意点$(a_*^{\mathrm{L}}, a_*^{\mathrm{U}})$, 该点离直线的距离

$$d_{1*}^+ = \frac{|a_*^{\mathrm{L}} + a_*^{\mathrm{U}} - 2l^+(\tilde{a})|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2l^+(\tilde{a}_*) - 2l^+(\tilde{a})}{\sqrt{2}}.$$

对于直线$y = -x + 2l^+(\tilde{a})$上的任意点$(a_*^{\mathrm{L}}, a_*^{\mathrm{U}})$, 该点离直线的距离为0.

当点离直线$y = -x + 2l^+(\tilde{a})$越近, 任意区间数$\tilde{a}_*$与目标区间数$\tilde{a}$中轴越接近, 其中轴优势度越接近0.5, 即关于$l^+(\tilde{a}_*)$的函数在$l^+(\tilde{a})$处的左右极限值均为0.5.

$$\lim_{l^+(\tilde{a}_*) \to l^+(\tilde{a})^-} \Big(\frac{d_{1*}^-}{d_{1\max}^-} \cdot x_1 + x_2\Big) = 0.5 \Longrightarrow$$
$$\lim_{l^+(\tilde{a}_*) \to l^+(\tilde{a})^-} \frac{2l^+(\tilde{a}) - 2l^+(\tilde{a}_*)}{a^{\mathrm{U}}} \cdot x_1 + x_2 =$$
$$0 + x_2 = 0.5,$$

$$\lim_{l^+(\tilde{a}_*) \to l^+(\tilde{a})^+} \Big(\frac{d_{1*}^+}{d_{1\max}^+} \cdot x_3 + x_4\Big) = 0.5 \Longrightarrow$$
$$\lim_{l^+(\tilde{a}_*) \to l^+(\tilde{a})^+} \frac{2l^+(\tilde{a}_*) - 2l^+(\tilde{a})}{l^-(\tilde{a})} \cdot x_3 + x_4 =$$
$$0 + x_4 = 0.5.$$

当点离直线$y=-x+2l^{+}(\tilde{a})$越远且在直线下侧越靠近点$(0,a^{\rm L})$时, 其对应任意区间数$\tilde{a}_*$的中轴优势度越小, 设点$(0,a^{\rm L})$ 对应区间数的中轴优势度为0, 即

$$\lim_{l^{+}(\tilde{a}_*)\to a^{\rm L}/2}(\frac{d^{-}_{1*}}{d^{-}_{1\max}}\cdot x_1+x_2)=0\Longrightarrow$$
$$\lim_{l^{+}(\tilde{a}_*)\to a^{\rm L}/2}\frac{2l^{+}(\tilde{a})-2l^{+}(\tilde{a}_*)}{a^{\rm U}}\cdot x_1+x_2=$$
$$x_1+x_2=0.$$

当点离直线$y=-x+2l^{+}(\tilde{a})$越远且在直线上侧越靠近点$(a^{\rm U},a^{\rm U})$时, 其对应任意区间数$\tilde{a}_*$的中轴优势度越大, 设点$(a^{\rm U},a^{\rm U})$对应区间数的中轴优势度为1, 即

$$\lim_{l^{+}(\tilde{a}_*)\to a^{\rm U}}(\frac{d^{+}_{1*}}{d^{+}_{1\max}}\cdot x_3+x_4)=1\Longrightarrow$$
$$\lim_{l^{+}(\tilde{a}_*)\to a^{\rm U}}\frac{2l^{+}(\tilde{a}_*)-2l^{+}(\tilde{a})}{l^{-}(\tilde{a})}\cdot x_3+x_4=$$
$$x_3+x_4=1.$$

可求得对应的x_1,x_2,x_3和x_4分别为$-0.5,0.5,0.5$和0.5. 区间数的中轴优势度函数见以下式(1), 其长度优势度函数采用相同方法设计, 不再赘述. 在两区间数为非相离关系时, 区间数中轴优势度函数S_1和长度优势度函数S_2如下所示:

$$S_1(\tilde{a}_*\succ\tilde{a})=$$
$$\begin{cases}0.5-(l^{+}(\tilde{a})-l^{+}(\tilde{a}_*))/a^{\rm U}, & l^{+}(\tilde{a}_*)<l^{+}(\tilde{a}),\\ 0.5, & l^{+}(\tilde{a}_*)=l^{+}(\tilde{a}),\\ (l^{+}(\tilde{a}_*)-l^{+}(\tilde{a}))/l^{-}(\tilde{a})+0.5, & l^{+}(\tilde{a}_*)>l^{+}(\tilde{a}),\\ a^{\rm U}_*>a^{\rm L}, \end{cases} \quad (1)$$

$$S_2(\tilde{a}_*\succ\tilde{a})=$$
$$\begin{cases}(l^{-}(\tilde{a})-l^{-}(\tilde{a}_*))/2l^{-}(\tilde{a})+0.5, & l^{-}(\tilde{a}_*)<l^{-}(\tilde{a}),\\ 0.5, & l^{-}(\tilde{a}_*)=l^{-}(\tilde{a}),\\ 0.5-(l^{-}(\tilde{a}_*)-l^{-}(\tilde{a}))/2a^{\rm L}, & l^{-}(\tilde{a}_*)>l^{-}(\tilde{a}),\\ a^{\rm U}_*>a^{\rm L}, \end{cases} \quad (2)$$

区间数优势度函数

$$P(\tilde{a}_*\succ\tilde{a})=$$
$$\begin{cases}S_1(\tilde{a}_*\succ\tilde{a}), & a^{\rm U}_*>a^{\rm L},\ l^{+}(\tilde{a}_*)\neq l^{+}(\tilde{a}),\\ S_2(\tilde{a}_*\succ\tilde{a}), & a^{\rm U}_*>a^{\rm L},\ l^{+}(\tilde{a}_*)=l^{+}(\tilde{a}),\\ 0, & a^{\rm U}_*\leqslant a^{\rm L}, \end{cases} \quad (3)$$

区间数优势度函数认为, 两区间数比较时, 中轴越大则区间数内平均取值越大, 则区间数越大; 若两区间数中轴相等, 则长度越小则区间数越集中, 区间数越大. 即先比较区间数的中轴关系, 对于中轴相等的区间数, 再比较区间数的长度.

3.2 区间数排序步骤(Procedures of ranking interval numbers)

1) 对一组区间数进行初步比较, 选出目标区间数$\tilde{a}$.

2) 判断其他任意区间数$\tilde{a}_*$与目标区间数$\tilde{a}$的关系, 若$a^{\rm U}_*\leqslant a^{\rm L}$, 则该区间数相对目标区间数的优势度$P(\tilde{a}_*\succ\tilde{a})=0$; 若$a^{\rm U}_*>a^{\rm L}$, 根据式(1)计算该区间数相对于目标区间数的中轴优势度S_1, 并根据值的排序进行区间数排序. 若存在两个及以上区间数的相等, 根据式(2)计算该区间数相对于目标区间数的长度优势度S_2, 并根据S_2值的排序对之前的排序进行补充.

3) 若存在多个区间数的$P(\tilde{a}_*\succ\tilde{a})=0$, 对这多个区间数重复步骤1)和2), 对上次排序进行补充, 直到完成全排序.

区间数的具体排序步骤见图2.

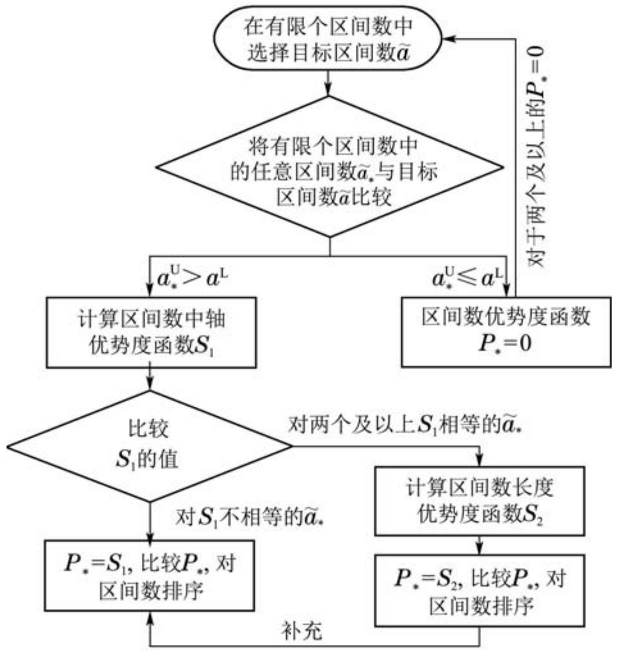

图 2 区间数排序步骤

Fig. 2 Procedures of ranking interval numbers

3.3 区间数排序效果验证(Effects verification of ranking interval numbers)

通过一个案例验证区间数排序方法有效性.

例 设一组区间数$\tilde{a}_1=[2,8]$, $\tilde{a}_2=[4,6]$, $\tilde{a}_3=[0.5,7]$, $\tilde{a}_4=[1,2]$, $\tilde{a}_5=[1,4]$, $\tilde{a}_6=[4,7]$和 $\tilde{a}_7=[0.5,1.5]$, 试比较其大小.

解 1) $a^{\rm U}_1=\max(a^{\rm U}_1,a^{\rm U}_2,\cdots,a^{\rm U}_7)=8$, 则选取的目标区间数为$\tilde{a}_1$.

2) 由 于$a^{\rm U}_4\leqslant a^{\rm L}_1, a^{\rm U}_7\leqslant a^{\rm L}_1$, 则$P(\tilde{a}_4\succ\tilde{a}_1)=0=P(\tilde{a}_7\succ\tilde{a}_1)$.

根据式(1)计算的$\tilde{a}_2,\tilde{a}_3,\tilde{a}_5$和$\tilde{a}_6$相对于$\tilde{a}_1$的中轴优势度分别为

$$S_1(\tilde{a}_2\succ\tilde{a}_1)=1/2=S_1(\tilde{a}_1\succ\tilde{a}_1),$$

$S_1(\tilde{a}_3 \succ \tilde{a}_1) = 11/32,\ S_1(\tilde{a}_5 \succ \tilde{a}_1) = 3/16,$

$S_1(\tilde{a}_6 \succ \tilde{a}_1) = 7/12,$

$P(\tilde{a}_6 \succ \tilde{a}_1) > 0.5 > P(\tilde{a}_5 \succ \tilde{a}_1) > P(\tilde{a}_3 \succ \tilde{a}_1),$

则$\tilde{a}_6 \succ \tilde{a}_1 \succ \tilde{a}_5 \succ \tilde{a}_3$. 由于$S_1(\tilde{a}_2 \succ \tilde{a}_1) = S_1(\tilde{a}_1 \succ \tilde{a}_1) = 1/2$, 因此$\tilde{a}_2$和$\tilde{a}_1$为同中轴区间数, 根据式(2)计算的$\tilde{a}_2$相对于$\tilde{a}_1$的长度优势度分别为

$$S_2(\tilde{a}_2 \succ \tilde{a}_1) = 5/6,$$

$P(\tilde{a}_2 \succ \tilde{a}_1) > 0.5$, 则$\tilde{a}_2 \succ \tilde{a}_1$. 补充以上排序, 对此5个区间数的排序为$\tilde{a}_6 \succ \tilde{a}_2 \succ \tilde{a}_1 \succ \tilde{a}_5 \succ \tilde{a}_3$.

3) 由于$P(\tilde{a}_4 \succ \tilde{a}_1) = P(\tilde{a}_7 \succ \tilde{a}_1) = 0$, 无法进行直接排序, 因此对$\tilde{a}_4$和$\tilde{a}_7$进行二次排序. 步骤同上.

目标区间数为$\tilde{a}_4$, 则

$$S_1(\tilde{a}_7 \succ \tilde{a}_4) = 1/4,\ P(\tilde{a}_7 \succ \tilde{a}_4) < 0.5,$$

则$\tilde{a}_4 \succ \tilde{a}_7$, 结合上步中的排序, 组成所有区间数的全排序为$\tilde{a}_6 \succ \tilde{a}_2 \succ \tilde{a}_1 \succ \tilde{a}_5 \succ \tilde{a}_3 \succ \tilde{a}_4 \succ \tilde{a}_7$.

需要说明的是, $\tilde{a}_1$和$\tilde{a}_2$为同中轴区间数, 采用本方法能比较二者的大小, 具有一定的先进性. 该排序符合人们心中的排序预期和习惯, 在一定程度上说明了该排序方法的有效性.

4　基于区间数排序的采矿方法优选模型(Mining method optimal selection model based on ranking interval numbers)

4.1　决策模型的建立(Establishment of decision-making model)

设$A = A_1, A_2, \cdots, A_n$为由$n$个方案组成的方案集, $X = x_1, x_2, \cdots, x_m$为由$m$个评价指标组成的评价指标集, $W = \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \cdots, \tilde{w}_m$为评价指标的区间数权重集, $\tilde{W}_j = [w_j^{\mathrm{L}}, w_j^{\mathrm{U}}]$为评价指标$x_j$的区间数权重值. 方案$A_i$在评价指标$x_j$下的评价指标值$\tilde{a}_{ij} = [a_{ij}^{\mathrm{L}},\ a_{ij}^{\mathrm{U}}]$ $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m)$, $\tilde{A} = (\tilde{a_{ij}})_{n\times m}$构成方案集的决策矩阵.

4.2　基于专家经验统计的评价指标区间数权重值确定法[23](Interval-number-weights of evaluation indexes determination method based on the statistics of experts' experiences)

为合理确定采矿方法优选评价指标及其权重值, 统计分析了100篇地下矿山采矿方法优选的学术论文. 100篇学术论文构成为最新发表和最高被引频次各一半. 统计论文中的采矿方法选择评价指标及其权重值, 被选为评价指标次数大于10次的评价指标共14个, 将其作为采矿方法优选评价指标集合, 见图3.

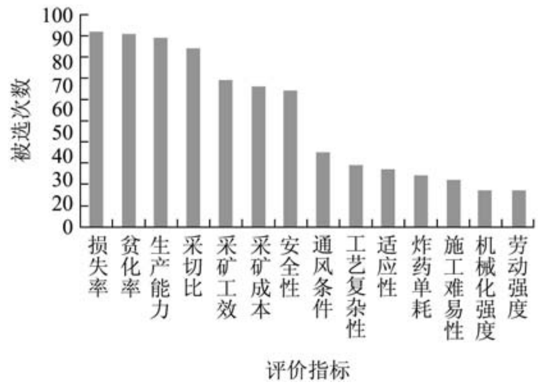

图 3 评价指标的被选次数

Fig. 3 Times of evaluation indexes were selected

设评价指标集为$X = x_1, x_2, \cdots, x_{14}$, 依次对应图3中各评价指标, x_1为"损失率", x_2为"贫化率", $\cdots$, x_{14}为"劳动强度". 评价指标被选中次数分别为$K = k_1, k_2, \cdots, k_{14}$, k_j为第j项评价指标被选中的次数, 统计的评价指标权重均值分别为$W^* = w_1^*, w_2^*, \cdots, w_{14}^*$, w_j^*表示统计的第j项评价指标权重均值. 按评价指标x_j被选次数统计出的指标权重值w_j^{s}和带权重统计的指标权重值w_j^{q}的计算方法分别见式(4)和式(5). 评价指标的区间数权重值$\tilde{w}_j = [w_j^{\mathrm{L}}, w_j^{\mathrm{U}}]$中的$w_j^{\mathrm{L}}$和$w_j^{\mathrm{U}}$计算方法见式(6). 最终的评价指标的区间数权重值见表1.

表 1 评价指标的区间数权重值

Table 1 The interval-number-weights of evaluation indexes

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
k_j	92	91	89	84	69	66	64	35	29	27	24	22	17	17
w_j^*	0.139	0.130	0.130	0.107	0.124	0.163	0.142	0.098	0.079	0.103	0.071	0.093	0.110	0.077
w_j^{s}	0.127	0.125	0.123	0.116	0.095	0.091	0.088	0.048	0.040	0.037	0.033	0.030	0.023	0.023
w_j^{q}	0.144	0.133	0.130	0.101	0.096	0.121	0.102	0.038	0.026	0.031	0.019	0.023	0.021	0.015
$\tilde{w}_j$	[0.127, 0.144]	[0.125, 0.133]	[0.123, 0.130]	[0.101, 0.116]	[0.095, 0.096]	[0.091, 0.121]	[0.088, 0.102]	[0.038, 0.048]	[0.026, 0.040]	[0.031, 0.037]	[0.019, 0.033]	[0.023, 0.030]	[0.021, 0.023]	[0.015, 0.023]

采用基于专家经验统计的评价指标区间数权重值确定方法是大量专家决策的统计结果, 能有效避免个别专家的主观经验错误而导致的权重值不合理问题, 符合群决策原理, 使权重值更加符合实际.

$$w_j^{\rm s} = k_j / \sum_{j=1}^{m} k_j, \tag{4}$$

$$w_j^{\rm q} = (k_j \cdot w_j^*) / \sum_{j=1}^{m} (k_j \cdot w_j^*), \tag{5}$$

$$\begin{cases} w_j^{\rm L} = \min(w_j^{\rm s}, w_j^{\rm q}), \\ w_j^{\rm U} = \max(w_j^{\rm s}, w_j^{\rm q}). \end{cases} \tag{6}$$

4.3 评价指标规范化(Standardization of evaluation indexes)

对于定量评价指标的区间评价值, 一般易于获取；对于定性评价指标的区间评价值, 采用专家主观评价的方法. 设语言变量集合$L=${很好, 好, 较好, 一般}, 不同语言变量对应的区间数分值见表2.

表 2 评价语言区间数分值

Table 2 The interval-number-values of evaluation linguistic terms

级别	很好	好	较好	一般
区间数分值	[9,10]	[8,9]	[7,8]	[6,7]

评价指标一般分为效益型指标(越大越优)和成本型指标(越小越优), 为便于计算, 将定性评价指标定为效益型指标. 为了消除不同物理量纲和不同数量级的数据对决策结果的影响, 采用文献[23]的方法将决策矩阵$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$转化为规范化的决策矩阵$\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$, 其中$\tilde{r}_{ij} = [r_{ij}^{\rm L}, r_{ij}^{\rm U}]$. $r_{ij}^{\rm L}$和$r_{ij}^{\rm U}$ 的计算方法见式(7) 和式(8):

$$\text{效益型指标,}\ \begin{cases} r_{ij}^{\rm L} = a_{ij}^{\rm L} / \max(a_{ij}^{\rm U}), \\ r_{ij}^{\rm U} = a_{ij}^{\rm U} / \max(a_{ij}^{\rm U}), \end{cases} \tag{7}$$

$$\text{成本型指标,}\ \begin{cases} r_{ij}^{\rm L} = \min(a_{ij}^{\rm L}) / a_{ij}^{\rm U}, \\ r_{ij}^{\rm U} = \min(a_{ij}^{\rm L}) / a_{ij}^{\rm L}, \end{cases} \tag{8}$$

4.4 综合评价指标值计算与排序 (Calculation and ranking comprehensive values of evaluation indexes)

根据定义2, 采用式(9)求出方案A_i的综合评价指标区间数值$\tilde{z}_i$. 采用上节的区间数排序方法对$\tilde{z}_i$进行排序, 并根据其排序结果, 完成方案优选.

$$\tilde{z}_i = \sum_{j=1}^{m} \tilde{w}_j \cdot \tilde{r}_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{9}$$

4.5 采矿方法优选步骤(Procedures of mining method optimal selection)

采矿方法优选的具体步骤见图4.

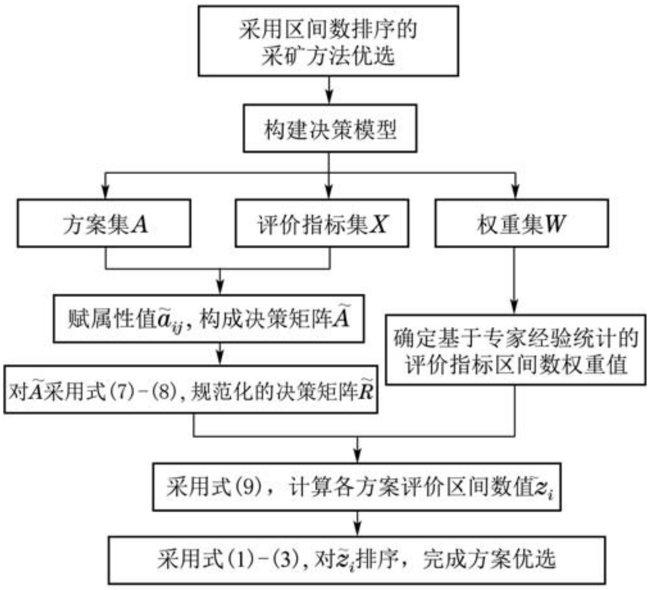

图 4 采矿方法优选步骤

Fig. 4 Procedures of mining method optimal selection

5 采矿方法优选的应用实例(Application example of mining method optimal selection)

某多层缓倾斜薄–中厚矿床呈层状平行产出, 矿体倾角为8°～30°, 矿体长度一般为352～870 m, 倾斜延深为92～236 m, 矿石层厚度一般为1.83～5.54 m, 夹石层厚度为5～11 m. 矿岩稳固性较好, 根据环保及相关政策要求, 地表不允许塌陷.

针对该矿床的开采技术条件, 初步选择的备选方案为全面采矿嗣后充填法(A_1)、浅孔房柱嗣后充填法(A_2)、长壁式开采嗣后充填法(A_3)、多层条带开采嗣后充填法(A_4)、液压支护削壁充填法(A_5)、短壁式开采嗣后充填法(A_6)和分段矿房嗣后充填法(A_7). 评价指标为表1内的14个指标: 损失率(x_1)、贫化率(x_2)、$\cdots$、劳动强度(x_{14})等. 其中安全性(x_7)、通风条件(x_8)、工艺复杂性(x_9)、适应性(x_{10})、施工难易性(x_{12})、机械化程度(x_{13})和劳动强度(x_{14})为定性评价指标, 其余指标为定量评价指标; 损失率(x_1)、贫化率(x_2)、采切比(x_4)、采矿成本(x_6)和炸药单耗(x_{11})为成本型指标, 其余为效益型指标.

评价指标的区间数权重值见表1, 相应的各方案评价指标原始区间数值见表3. 采用式(7)和式(8)进行评价指标规范化后的各方案评价指标区间数值见表4, 采用式(9)计算的综合评价指标区间数值$\tilde{z}_i$见表5.

表 3 各方案评价指标原始区间数值

Table 3 The original interval-number-values of evaluation indexes of each program

	x_1/%	x_2/%	$x_3/(\mathrm{t\cdot d^{-1}})$	$x_4/(\mathrm{m\cdot kt^{-1}})$	$x_5/(\mathrm{t\cdot h^{-1}})$	$x_6/(¥\cdot\mathrm{t^{-1}})$	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$x_{11}/(\mathrm{kg\cdot m^{-3}})$	x_{12}	x_{13}	x_{14}
A_1	[8, 13]	[8, 17]	[40, 80]	[15, 18]	[5, 10]	[60, 80]	一般	较好	好	较好	[0.4, 0.6]	较好	一般	一般
A_2	[16.6, 19]	[8, 17]	[110, 200]	[11, 14]	[9, 12]	[80, 90]	一般	很好	较好	好	[0.4, 0.6]	好	较好	较好
A_3	[3, 5]	[4, 8]	[30, 50]	[13, 16]	[4, 6]	[70, 80]	很好	较好	好	好	[0.4, 0.6]	好	一般	一般
A_4	[6, 10]	[6, 10]	[200, 300]	[8, 12]	[10, 14]	[60, 80]	好	较好	较好	好	[0.4, 0.6]	较好	好	好
A_5	[15, 18]	[13, 17]	[50, 70]	[10, 13]	[5, 8]	[50, 70]	一般	一般	很好	一般	[0.5, 0.7]	一般	一般	一般
A_6	[4, 6]	[4, 8]	[30, 50]	[14, 17]	[4, 6]	[70, 80]	很好	较好	好	好	[0.4, 0.6]	好	一般	一般
A_7	[10, 15]	[6, 10]	[150, 200]	[15, 18]	[8, 10]	[60, 80]	较好	较好	较好	一般	[0.4, 0.6]	较好	较好	较好

表 4 规范化后的各方案评价指标区间数值

Table 4 The standard interval-number-values of evaluation indexes of each program

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
A_1	[0.231, 0.375]	[0.235, 0.500]	[0.133, 0.267]	[0.444, 0.533]	[0.357, 0.714]	[0.625, 0.833]	[0.600, 0.700]	[0.700, 0.800]	[0.800, 0.900]	[0.778, 0.889]	[0.667, 1.000]	[0.778, 0.889]	[0.667, 0.778]	[0.667, 0.778]
A_2	[0.158, 0.181]	[0.235, 0.500]	[0.367, 0.667]	[0.571, 0.727]	[0.643, 0.857]	[0.556, 0.625]	[0.600, 0.700]	[0.900, 1.000]	[0.700, 0.800]	[0.889, 1.000]	[0.667, 1.000]	[0.667, 1.000]	[0.778, 0.889]	[0.778, 0.889]
A_3	[0.600, 1.000]	[0.500, 1.000]	[0.100, 0.167]	[0.500, 0.615]	[0.286, 0.429]	[0.625, 0.714]	[0.900, 1.000]	[0.700, 0.800]	[0.800, 0.900]	[0.889, 1.000]	[0.667, 1.000]	[0.667, 1.000]	[0.667, 0.778]	[0.667, 0.778]
A_4	[0.300, 0.500]	[0.400, 0.667]	[0.667, 1.000]	[0.667, 1.000]	[0.714, 1.000]	[0.625, 0.833]	[0.800, 0.900]	[0.700, 0.800]	[0.700, 0.800]	[0.889, 1.000]	[0.667, 1.000]	[0.778, 0.889]	[0.667, 1.000]	[0.667, 1.000]
A_5	[0.167, 0.200]	[0.235, 0.308]	[0.167, 0.233]	[0.615, 0.800]	[0.357, 0.571]	[0.714, 1.000]	[0.600, 0.700]	[0.600, 0.700]	[0.900, 1.000]	[0.667, 0.778]	[0.571, 0.800]	[0.667, 0.778]	[0.667, 0.778]	[0.667, 0.778]
A_6	[0.500, 0.750]	[0.500, 1.000]	[0.100, 0.167]	[0.471, 0.571]	[0.286, 0.429]	[0.625, 0.714]	[0.900, 1.000]	[0.700, 0.800]	[0.800, 0.900]	[0.889, 1.000]	[0.667, 1.000]	[0.667, 1.000]	[0.667, 0.778]	[0.667, 0.778]
A_7	[0.200, 0.300]	[0.400, 0.667]	[0.500, 0.667]	[0.444, 0.533]	[0.571, 0.714]	[0.625, 0.833]	[0.700, 0.800]	[0.700, 0.800]	[0.700, 0.800]	[0.667, 0.778]	[0.667, 1.000]	[0.778, 0.889]	[0.778, 0.889]	[0.778, 0.889]

表 5 各方案的综合评价指标区间数值

Table 5 The comprehensive interval-number-values of evaluation indexes of each program

方案	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
$\tilde{z}_i$	[0.390, 0.661]	[0.317, 0.493]	[0.365, 0.600]	[0.433, 0.695]	[0.285, 0.440]	[0.349, 0.559]	[0.355, 0.531]

采用基于二维信息的区间数排序方法对综合评价值进行排序, 具体步骤为:

1) $z_4^{\mathrm{U}} = \max(z_1^{\mathrm{U}}, z_2^{\mathrm{U}}, z_3^{\mathrm{U}}, z_4^{\mathrm{U}}, z_5^{\mathrm{U}}, z_6^{\mathrm{U}}, z_7^{\mathrm{U}}) = 0.695$, 则选取的目标区间数为$\tilde{z}_4$.

2) 任意$z_i^{\mathrm{U}} > z_4^{\mathrm{L}}$, 根据式(1)计算的$\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_5, \tilde{z}_6$和$\tilde{z}_7$相对于$\tilde{z}_4$的中轴优势度分别为

$$S_1(\tilde{z}_1 \succ \tilde{z}_4) = 0.444,\ S_1(\tilde{z}_2 \succ \tilde{z}_4) = 0.271,$$
$$S_1(\tilde{z}_3 \succ \tilde{z}_4) = 0.382,\ S_1(\tilde{z}_5 \succ \tilde{z}_4) = 0.210,$$
$$S_1(\tilde{z}_6 \succ \tilde{z}_4) = 0.342,\ S_1(\tilde{z}_7 \succ \tilde{z}_4) = 0.326,$$

根据式(3), $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_5, \tilde{z}_6$和$\tilde{z}_7$相对于$\tilde{z}_4$的优势度$0.5 > P(\tilde{z}_1 \succ \tilde{z}_4) > P(\tilde{z}_3 \succ \tilde{z}_4) > P(\tilde{z}_6 \succ \tilde{z}_4) > P(\tilde{z}_7 \succ \tilde{z}_4) > P(\tilde{z}_2 \succ \tilde{z}_4) > P(\tilde{z}_5 \succ \tilde{z}_4)$, 则对区间数的排序为$\tilde{z}_4 \succ \tilde{z}_1 \succ \tilde{z}_3 \succ \tilde{z}_6 \succ \tilde{z}_7 \succ \tilde{z}_2 \succ \tilde{z}_5$, 即$A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_6 \succ A_7 \succ A_2 \succ A_5$, 最优方案为多层条带开采嗣后充填法($A_4$).

6 结论(Conclusions)

本文提出了一种采用区间数排序的采矿方法优选模型, 该模型不仅可用于采矿方法优选问题, 同样适用于其他的多属性决策问题. 该方法的创新之处主要在以下3个方面:

1) 将评价指标被选次数统计的指标权重值和带权重统计的指标权重值构成了评价指标区间数权重值, 既考虑了采矿评价的专家判断, 同时也避免了实际应用中采矿方法选择时决策人员的主观片面性, 更符合决策过程中的模糊性和不确定性, 使权重值更加合理;

2) 基于直角坐标和一次函数、平面几何的解析

关系, 将区间数表征在高斯平面直角坐标系中, 并通过对区间数二维信息的挖掘, 将不同性质的区间数划分在坐标系中的不同区域内, 使区间数的相对关系更加清晰直观;

3) 在将区间数表征在高斯平面直角坐标系中的基础上, 基于平面几何和极限的原理, 推导了区间数中轴优势度函数和长度优势度函数, 并在此基础上建立了区间数优势度函数, 定义了基于二维信息的区间数排序方法, 通过该方法能实现对有限个区间数及同中轴区间数的排序.

通过采矿方法优选多属性决策模型的优选实例, 同时验证了区间数排序的可行性, 对于采矿方法优选具有一定的参考价值. 需要指出的是, 该排序方法中首先通过区间数中轴优势度函数能计算区间数相对于目标区间数的中轴优势度值, 对区间数进行排序; 对于中轴相等的区间数, 再通过区间数长度优势度函数计算各区间数的长度优势度值. 因此“长度”是次于“中轴”的第二信息, 如何综合考虑“长度”和“中轴”两类信息, 体现出更多的决策态度是下一步需要研究的问题.

参考文献(References):

[1] LIU L, CHEN J H, WANG G M, et al. Multi-attributed decision making for mining methods based on grey system and interval numbers [J]. *Journal of Central South University*, 2013, 20(4): 1029 – 1033.

[2] ORAEE K, SHAHRIAR K, BAKHTAVAR E. Mining method selection and optimization of transition from open pit to underground in combined mining [J]. *Archives of Mining Sciences,* 2009, 54(3): 481 – 493.

[3] ALPAY S, YAVUZ M. Underground mining method selection by decision making tools [J]. *Tunnelling & Underground Space Technology,* 2009, 24(2): 173 – 184.

[4] CHEN Zhiwang, CHEN Lin, YANG Qi, et al. Interval-valued intuitionistic fuzzy set method for group multi-attribute decision-making with unknown attribute weights [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(8): 1025 – 1033.
(陈志旺, 陈林, 杨七, 等. 用区间直觉模糊集方法对属性权重未知的群求解其多属性决策 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(8): 1025 – 1033.)

[5] BADRI S A, GHAZANFARI M, SHAHANAGHI K. A multi-criteria decision-making approach to solve the product mix problem with interval parameters based on the theory of constraints [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2014, 70(5/8): 1073 – 1080.

[6] ZHANG Biao, ZHOU Shaosheng. Stability analysis and control design for interval type-2 stochastic fuzzy system [J]. *Control Theory & Applications,* 2015, 32(7): 985 – 992.
(张彪, 周绍生. 区间二型随机模糊系统的稳定性分析和控制设计 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(7): 985 – 992.)

[7] YE Yicheng, KE Lihua, HUANG Deyu. *Technology and Application of System Comprehensive Evaluation* [M]. Beijing: Metallurgical Industry Press, 2006: 29 – 36.
(叶义成, 柯丽华, 黄德育. 系统综合评价技术及其应用 [M]. 北京: 冶金工业出版社, 2006: 29 – 36.)

[8] YUE Z L. An extended TOPSIS for determining weights of decision makers with interval numbers [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2011, 24(1): 146 – 153.

[9] CHEN Y Q, CHEN Q J. Interval analysis using least squares support vector fuzzy regression [J]. *Journal of Control Theory & Applications*, 2012, 10(4): 458 – 464.

[10] HSU B M, KUNG J Y, SHU M H. Interval-valued process data monitoring and controlling [J]. *Artificial Intelligence Research*, 2013, 2(3): 90 – 101.

[11] MOORE R E. *Method and Application of Interval Analysis* [M]. London: Prentice-Hall, 1979: 87 – 92.

[12] ISHIBUCHI H, TANAKA H. Multiobjective programing in optimization of the interval objective function [J]. *European Journal of Operational Research*, 1990, 48(2): 219 – 225.

[13] KUDDU S. Min-transitivity of fuzzy leftness relationship and its application to decision making [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 86(3): 357 – 367.

[14] NAKAHARA Y. User oriented ranking criteria and its application to fuzzy mathematical programming problems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 94(3): 275 – 286.

[15] ZHANG Quan, FAN Zhiping, PAN Dehui. A ranking approach for interval numbers in uncertain multiple attribute decision making problems [J]. *Systems Engineering–Theory & Practice,* 1999, 19(5): 129 – 133.
(张全, 樊治平, 潘德惠. 不确定性多属性决策中区间数的一种排序方法 [J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(5): 129 – 133.)

[16] ZHANG Quan, FAN Zhiping, PAN Dehui. A ranking approach with possibilities for multiple attribute decision making problems with intervals [J]. *Control and Decision,* 1999, 14(6): 703 – 706, 711.
(张全, 樊治平, 潘德惠. 区间数多属性决策中一种带有可能度的排序方法 [J]. 控制与决策, 1999, 14(6): 703 – 706, 711.)

[17] XU Z S. Dependent uncertain ordered weighted aggregation operators [J]. *Information Fusion*, 2008, 9(2): 310 – 316.

[18] SENQUPTA A, PAL T K. On comparing interval numbers [J]. *European Journal of Operational Research*, 2000, 127(1): 28 – 43.

[19] LAN Jibin, HU Mingming, YE Xinmiao. Ranking interval numbers based on similarity [J]. *Computer Engineering and Design,* 2011, 32(4): 1419 – 1421.
(兰继斌, 胡明明, 叶新苗. 基于相似度的区间数排序 [J]. 计算机工程与设计, 2011, 32(4): 1419 – 1421.)

[20] MOORE R E, LODWICK W. Interval analysis and fuzzy set theory [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, 135(1): 5 – 9.

[21] GANESAN K, VEERAMANI P. On arithmetic operations of interval numbers [J]. *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2011, 13(13): 619 – 632.

[22] KE Lihua, YE Yicheng, HUANG Jun. Sequencing of profit results of mines based on interval number [J]. *Mining and Metallurgical Engineering,* 2003, 23(1): 16 – 18.
(柯丽华, 叶义成, 黄军. 基于区间数的矿山经营效果排序研究 [J]. 矿冶工程, 2003, 23(1): 16 – 18.)

[23] YAO Nan, YE Yicheng, WANG Qihu, et al. The optimal selection model of mining method based on statistical fuzzy weights and fuzzy interval evaluation [J]. *China Mining Magazine,* 2014, 23(9): 112 – 117, 144.
(姚团, 叶义成, 王其虎, 等. 基于统计模糊权重和模糊区间评价的采矿方法优选模型 [J]. 中国矿业, 2014, 23(9): 112 – 117, 144.)

作者简介:

叶义成 (1960–), 男, 教授, 主要研究方向为矿业工程、安全工程和矿业系统工程等, E-mail: yeyicheng@wust.edu.cn;

姚 团 (1987–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为采矿工程和矿业系统工程, E-mail: yaonan-1987@163.com;

王其虎 (1987–), 男, 讲师, 主要研究方向为采矿工程和矿业系统工程, E-mail: wangqihu@wust.edu.cn.