第 33 卷第 10 期
2016 年 10 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 33 No. 10
Oct. 2016

DOI: 10.7641/CTA.2016.50818

变周期采样系统指数稳定的新条件

张 丹, 邵汉永†, 赵建荣

(曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165)

摘要: 本文研究了线性采样系统在变周期采样下的指数稳定性问题. 基于离散时间Lyapunov理论, 构造了一个新的类Lyapunov泛函. 该泛函不仅是时变的, 还增加了对状态二次项的积分, 而且不要求在采样区间内正定. 利用这一新的类Lyapunov泛函, 本文首先针对一类非线性采样系统提出了指数稳定性定理, 再结合改进的Wirtinger积分不等式, 导出了使变周期线性采样系统指数稳定以及渐近稳定的线性矩阵不等式条件. 最后举例说明了所得稳定性结果比现存的某些文献报道的结果保守性较小.

关键词: 采样系统; 指数稳定; 类Lyapunov泛函; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

New conditions for exponential stability of sampled-data systems under aperiodic sampling

ZHANG Dan, SHAO Han-yong†, ZHAO Jian-rong

(Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China)

Abstract: This article is concerned with the exponential stability problem of linear sampled-data systems under aperiodic sampling. Based on discrete-time Lyapunov theorem, a new Lyaponov-like functional is constructed with the following features. It explicitly depends on time t, contains the integral quadratic term of the states, and is not required to be positive definite between sampling instants. Based on this new Lyapunov-like functional, a new theorem is proposed in this paper to study the exponential stability of a class of nonlinear sampled-data systems firstly. And then new conditions for the linear sampled-data systems under aperiodic sampling to be exponentially and asymptotically stable are given respectively in terms of linear matrix inequalities by taking advantages of the new theorem and the improved Wirtinger integral inequality. Examples are provided to illustrate that the stability conditions have less conservatism compared with some existing ones.

Key words: sampled-data systems; exponential stability; Lyapunov-like functional; linear matrix inequalities

1 引言(Introduction)

由于采样系统在数字控制系统以及网络控制系统[1–2]中的广泛应用, 在过去的几十年里它受到了广泛的关注. 其中文献[1]研究了基于预测值控制的变采样网络控制系统. 采样系统稳定是其正常工作的前提, 采样系统的稳定性是一个基本的问题, 研究采样系统的稳定性具有重要的理论和实际意义. 综观采样系统稳定性的研究报道, 分析稳定性的方法大致有以下几种: 首先是离散系统方法[3–5], 就是将采样系统转化为离散系统, 用处理离散系统的方法对采样系统进行分析. 但在变周期采样情况下, 这种方法会导致时变离散系统, 为进一步分析稳定性带来一定困难. 为克服这一困难, 文献[5]将所得的时变离散系统包含于一类范数有界不确定离散系统, 应用Finsler引理和矩阵扩充(matrix-dilatian)技术进行鲁棒稳定性分析, 以较大计算量为代价得到了保守性较小的结果. 第2种方法为输入时滞方法[6], 这种方法将采样系统化为带有时滞的连续时间系统, 然后用研究时滞系统的方法进行采样系统的研究[7]. 第3种方法则是将采样系统化为脉冲系统[8–9], 再用Lyapunov稳定性理论进行稳定性分析. 还有一种分析采样系统稳定性的方法就是最近报道的一种基于离散时间Lyapunov理论的方法[10–12]. 该方法给出了离散时间Lyapunov 理论与连续时间Lyapunov理论之间的关系, 放松了对通常意义下Lyapunov泛函正定性的限制.

注意到最近文献[12]研究了变周期采样系统的渐

收稿日期: 2015−10−17; 录用日期: 2016−07−06.
†通信作者. E-mail: hanyongshao@163.com.
本文责任编委: 吴敏.
国家自然科学基金项目(61374090), 山东省高等院校科研创新团队项目, 山东省泰山学者人才工程项目.
Supported by National Natural Science Foundation of China (61374090), Program for Scientific Research Innovation Team in Colleges and Universities of Shandong Province and Taishan Scholarship Project of Shandong Province.

近稳定性, 文献[13]讨论了周期采样系统的指数稳定条件, 文献[11]虽然研究了变周期采样系统的指数稳定性, 但对Lyapunov泛函导数的处理仍存在一定的保守性. 本文拟构造新的类Lyapunov泛函, 深入研究变周期采样系统指数稳定的新条件, 具体来说就是: 基于离散时间Lyapunov理论方法, 结合采样系统的连续时间模型, 构造一个新的类Lyapunov泛函. 与通常的Lyapunov泛函相比, 其最大的特点在于它并不要求在采样区间内的正定性. 笔者将用该类Lyapunov泛函分析线性采样系统的稳定性, 首先对一类非线性采样系统提出了一个新的指数稳定性定理, 然后利用该定理和最近提出的改进的Wirtinger积分不等式导出了线性采样系统指数稳定的条件.

本文中: 上角标T表示向量或矩阵的转置; I表示适当维数的单位矩阵; $|\cdot|$表示向量的欧式范数; $\|\cdot\|$表示矩阵的诱导范数; $\mathbb{N}$和$\mathbb{R}$分别表示非负整数和实数; 集合$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$以及$\mathbb{S}^n$分别代表n维列向量、$m\times n$维实矩阵以及$\mathbb{R}^{n\times n}$中的n维对称矩阵; $P>0$表示P是对称的正定矩阵; 对称矩阵中的对称项由$*$代替; 符号$V(t_k^-)$表示$V(t_k^-)=\lim\limits_{t\to t_k^-}V(t),\ k\in\mathbb{N}$; $He(A)$代表$A+A^{\mathrm{T}}$.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑下面的线性系统:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \tag{1}$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $u(t)\in\mathbb{R}^m$分别代表状态向量和输入向量; 矩阵$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$是已知的常数矩阵. 控制输入$u(t)$遵从下面的控制律:

$$u(t)=Kx(t_k),\ t\in[t_k,t_{k+1}),\ k\in\mathbb{N}, \tag{2}$$

其中$K\in\mathbb{R}^{m\times n}$是控制增益. 采样序列$\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$满足$0=t_0<t_1<\cdots<t_k<\cdots$且有

$$0\leqslant T_{\min}\leqslant T_k=t_{k+1}-t_k\leqslant T_{\max}. \tag{3}$$

由式(1)–(2)可得相对应的闭环系统为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+A_{\mathrm{d}}x(t_k),\ \ t\in[t_k,t_{k+1}),\ \ k\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

其中$A_{\mathrm{d}}=BK$.

注 1 最近文献[5]研究了线性采样系统(3)–(4)的镇定问题. 通过系统变换将线性采样系统(3)–(4)化为不确定线性时变离散系统, 用鲁棒稳定性分析和设计方法给出了状态反馈增益K的算法. 本文将考虑线性采样系统(3)–(4)的稳定性分析问题, 当给定增益矩阵K时, 对线性采样系统(3)–(4)本身直接用Lyapunov理论方法分析稳定性, 而不经过系统变换.

对于给定的控制增益K, 本文旨在导出线性采样系统(3)–(4)的指数稳定性条件. 为此给出下面的引理:

引理 1[14] 对于任给的对称正定矩阵$M>0$, 以及向量函数$\omega:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, 假设与其相关的积分是有意义的, 则有下面的不等式成立:

$$\int_{\mathrm{a}}^{b}\omega^{\mathrm{T}}(s)M\omega(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{b-a}\varLambda^{\mathrm{T}}M\varLambda,$$

其中$\varLambda=\int_{\mathrm{a}}^{b}\omega(s)\mathrm{d}s$.

引理 2[15] 考虑一个给定的正定矩阵$M>0$, 那么对于所有的连续可微函数$\omega:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, 下面的不等式成立:

$$\int_{\mathrm{a}}^{b}\dot{\omega}^{\mathrm{T}}(s)M\dot{\omega}(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{b-a}(\varTheta^{\mathrm{T}}M\varTheta+3\varOmega^{\mathrm{T}}M\varOmega),$$

其中: $\varTheta=\omega(b)-\omega(a)$, $\varOmega=\omega(a)+\omega(b)-\dfrac{2}{b-a}\varLambda$.

为分析线性采样系统(3)–(4)的指数稳定性, 首先提出下面的定理:

定理 1 考虑如下的一类非线性采样系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(x(t),x(t_k)), & t\in[t_k,t_{k+1}),\\ x(t_k)=\lim\limits_{t\to t_k^-}x(t), & k\in\mathbb{N},\end{cases} \tag{5}$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$, 采样区间满足式(3), $f(0,0)=0$, 对于任意的$z(t)\in\mathbb{R}^n$,

$$|f(x(t),x(t_k))-f(z(t),z(t_k))|\leqslant L_1|x(t)-z(t)|+L_2|x(t_k)-z(t_k)|$$

成立, 这里L_1,L_2为已知正常数. 设存在正数c_1, c_2和α, 连续泛函$V_{\mathrm{a}}(x(t))$, 及分段连续泛函$V_{\mathrm{b}}(x(t),t)$, $t\in[t_k,\ t_{k+1})$, $k\in\mathbb{N}$, 使

i) 在采样时刻$V_{\mathrm{a}}(x(t))$满足

$$c_1|x(t_k)|^2\leqslant V_{\mathrm{a}}(x(t_k))\leqslant c_2|x(t_k)|^2;$$

ii) 在采样时刻$V_{\mathrm{b}}(x(t),t)$满足

$$V_{\mathrm{b}}(x(t_k),t_k)=\mathrm{e}^{2\alpha T_k}V_{\mathrm{b}}(x(t_{k+1}^-),t_{k+1}^-);$$

iii) 对于

$$\bar{V}(x(t),t)=\mathrm{e}^{2\alpha(t-t_k)}[V_{\mathrm{a}}(x(t))+V_{\mathrm{b}}(x(t),t)]$$

有

$$\dot{\bar{V}}(x(t),t)<0,\ \forall t\in(t_k,t_{k+1}),$$

那么非线性采样系统(5)在条件(3)下以衰减率α指数稳定.

证 由iii)可得

$$\bar{V}(x(t_{k+1}^-),t_{k+1}^-)-\bar{V}(x(t_k),t_k)=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\dot{\bar{V}}(x(s),s)\mathrm{d}s<0.$$

由$\bar{V}(x(t),t)$的定义可得

$$\mathrm{e}^{2\alpha T_k}[V_{\mathrm{a}}(x(t_{k+1}^-))+V_{\mathrm{b}}(x(t_{k+1}^-),t_{k+1}^-)]-[V_{\mathrm{a}}(x(t_k))+V_{\mathrm{b}}(x(t_k),t_k)]<0.$$

注意到$V_\mathrm{a}(x(t))$是连续的, 再由ii)可得到

$$\mathrm{e}^{2\alpha T_k}V_\mathrm{a}(x(t_{k+1}))-V_\mathrm{a}(x(t_k))<0.$$

由上式以及条件i)得出

$$|x(t_k)|^2\leqslant \frac{1}{c_1}V_\mathrm{a}(x(t_k))\leqslant\frac{1}{c_1}V_\mathrm{a}(x(0))\mathrm{e}^{-2\alpha t_k}\leqslant \frac{c_2}{c_1}|x(0)|^2\mathrm{e}^{-2\alpha t_k},$$

即

$$|x(t_k)|\leqslant\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}|x(0)|\mathrm{e}^{-\alpha t_k}. \tag{6}$$

另一方面, 对系统(5)在区间$[t_k,t)$, $t\in[t_k,t_{k+1})$, 上进行积分, 有

$$x(t)=x(t_k)+\int_{t_k}^{t}f(x(s),x(t_k))\mathrm{d}s,$$

进而有

$$\begin{aligned}&|x(t)|=\\&|x(t_k)+\int_{t_k}^{t}f(x(s),x(t_k))\mathrm{d}s|\leqslant\\&|x(t_k)|+\int_{t_k}^{t}|f(x(s),x(t_k))-f(0,0)|\mathrm{d}s\leqslant\\&|x(t_k)|+\int_{t_k}^{t}L_1|x(s)-0|\mathrm{d}s+\int_{t_k}^{t}L_2|x(t_k)-0|\mathrm{d}s\leqslant\\&|x(t_k)|+\int_{t_k}^{t}L_1|x(s)|\mathrm{d}s+T_kL_2|x(t_k)|\leqslant\\&(1+T_{\max}L_2)|x(t_k)|+L_1\int_{t_k}^{t}|x(s)|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

应用Grownwall-Bellman引理, 可得

$$|x(t)|\leqslant(1+T_{\max}L_2)|x(t_k)|\mathrm{e}^{L_1(t-t_k)}.$$

令$L=1+T_{\max}L_2$, 上式变为

$$|x(t)|\leqslant L\mathrm{e}^{L_1(t-t_k)}|x(t_k)|. \tag{7}$$

因为$t-t_k\leqslant t_{k+1}-t_k=T_k\leqslant T_{\max}$, 由式(6)–(7), 可得

$$\begin{aligned}&|x(t)|\leqslant\\&L\mathrm{e}^{L_1(t-t_k)}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}|x(0)|\mathrm{e}^{-\alpha t_k}=\\&L\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}|x(0)|\mathrm{e}^{L_1(t-t_k)+\alpha(t-t_k)}\mathrm{e}^{-\alpha t}\leqslant\\&L\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\mathrm{e}^{(L_1+\alpha)T_{\max}}|x(0)|\mathrm{e}^{-\alpha t}.\end{aligned}$$

这样就证明了非线性采样系统(5)在条件(3)下以衰减率α指数稳定. 证毕.

注 2 此处对$V_\mathrm{b}(x(t),t)$的正定性不作要求, 因此由$V_\mathrm{a}(x(t))$和$V_\mathrm{b}(x(t),t)$二者组合得到的$\bar V(x(t),t)$比通常意义下的Lyapunov泛函要求弱, 这样构造Lyapunov泛函旨在导出保守性小的结果. 这点在后面的例子中将会进行说明. 如果令$V_\mathrm{b}(x(t),t)=0$, 则定理1的条件变为$\bar V(x(t),t)=\mathrm{e}^{2\alpha(t-t_k)}\cdot V_\mathrm{a}(x(t))$沿系统的解正定且单调递减, 采用上面的证明仍可得到定理1的结论.

注 3 与文献[12]中的命题1相比, 定理1将渐近稳定性的判定推广到了指数稳定性的判定, 为研究采样系统的指数稳定性提供了理论基础. 另外, 与文献[13]中的引理1相比较, 定理1将其应用范围由线性采样系统扩展到了一类非线性采样系统, 且由周期采样推广到了变周期采样的情况.

3 指数稳定的新条件(New conditions for exponential stability)

下面的定理给出了线性采样系统(3)–(4)的指数稳定性准则.

定理 2 对于给定的标量$0\leqslant T_{\min}\leqslant T_{\max}$以及$\alpha>0$, 线性采样系统(3)–(4)以衰减率$\alpha$指数稳定, 如果存在$P>0$, $S,X\in\mathbb{S}^n$, $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $R>0$, $Z>0$, 以及$Y_i\in\mathbb{R}^{3n\times n}$, $i=1,2,3$, 使得对于$T\in\{T_{\min},T_{\max}\}$有

$$X<0, \tag{8}$$

$$\varPsi_\alpha^1(T)=\varPi_{1\alpha}+T(\varPi_{2\alpha}+\varPi_3)<0, \tag{9}$$

$$\varPsi_\alpha^2(T)=\begin{bmatrix}\varPsi_{11}&\varPsi_{12}&\varPsi_{13}\\ *&\varPsi_{22}&0\\ *&*&\varPsi_{33}\end{bmatrix}<0, \tag{10}$$

其中:

$$\begin{aligned}&\varPi_{1\alpha}=\\&\varPi_1+2\alpha(M_1^\mathrm{T}PM_1-W_1^\mathrm{T}RW_1-3W_2^\mathrm{T}RW_2)+\\&2\alpha T_{\max}He(Y_1W_1+3Y_2W_2),\\&\varPi_{2\alpha}=\varPi_2+2\alpha W_1^\mathrm{T}(SW_1+2QM_2),\\&\varPi_3=M_2^\mathrm{T}XM_2,\\&\varPsi_{11}=\varPi_{1\alpha}-T(\varPi_3-\varPi_{4\alpha}),\\&\varPsi_{12}=T(1-2\alpha T_{\max})Y_1,\\&\varPsi_{13}=3T(1-2\alpha T_{\max})Y_2,\\&\varPsi_{22}=-T(1-2\alpha T_{\max})R,\\&\varPsi_{33}=-3T(1-2\alpha T_{\max})R,\\&\varPi_1=\varPi_1^0-He(Y_1W_1+Y_3W_1+3Y_2W_2),\\&\varPi_2=\\&M_0^\mathrm{T}RM_0+He(M_0^\mathrm{T}SW_1+M_0^\mathrm{T}QM_2)+M_1^\mathrm{T}ZM_1,\\&\varPi_{4\alpha}=\varPi_4+2\alpha T_{\max}M_3^\mathrm{T}ZM_3,\\&\varPi_1^0=He(M_1^\mathrm{T}PM_0-W_1^\mathrm{T}QM_2)-W_1^\mathrm{T}SW_1,\\&\varPi_4=He(Y_3M_4)-M_3^\mathrm{T}ZM_3,\end{aligned}$$

且$M_0=[A\ \ A_\mathrm{d}\ \ 0]$, $M_1=[I\ \ 0\ \ 0]$, $M_2=[0\ \ I\ \ 0]$, $M_3=[0\ \ 0\ \ I]$, $M_4=[0\ \ A_\mathrm{d}\ \ A]$, $W_1=[I\ \ -I\ \ 0]$, $W_2=[I\ \ I\ \ -2I]$.

证 下面根据定理1证明线性采样系统(3)–(4)的

指数稳定性条件.

对线性采样系统(3)–(4)有

$$f(x(t),x(t_k))=Ax(t)+A_{\rm d}x(t_k),$$

易得$f(0,0)=0$. 取$L_1=\|A\|$, $L_2=\|A_{\rm d}\|$, 可见线性采样系统(3)–(4)满足定理1中关于函数f的限定条件.

对于给定的整数$k\geqslant 0$, $T_k\in[T_{\min},T_{\max}]$, 构建如下的泛函:

$$\bar V(x(t),t)={\rm e}^{2\alpha(t-t_k)}[V_{\rm a}(x(t))+V_{\rm b}(x(t),t)],$$

其中:

$$\begin{aligned}&V_{\rm a}(x(t))=x^{\rm T}(t)Px(t),\\&V_{\rm b}(x(t),t)=\\&(t_{k+1}-t)\zeta^{\rm T}(t)[S\zeta(t)+2Qx(t_k)]+\\&(t_{k+1}-t)\int_{t_k}^t\dot x^{\rm T}(s)R\dot x(s){\rm d}s+\\&(t_{k+1}-t)(t-t_k)x^{\rm T}(t_k)Xx(t_k)+\\&(t_{k+1}-t)\int_{t_k}^t x^{\rm T}(s)Zx(s){\rm d}s,\end{aligned}$$

这里$\zeta(t)=x(t)-x(t_k)$.

令$c_1=\lambda_{\min}(P)$, $c_2=\lambda_{\max}(P)$有

$$c_1|x(t_k)|^2\leqslant V_{\rm a}(x(t_k))\leqslant c_2|x(t_k)|^2.$$

又因$V_{\rm b}(x(t_k),t_k)$=0, ${\rm e}^{2\alpha T_k}V_{\rm b}(x(t_{k+1}^-),t_{k+1}^-)$=0, 即

$$V_{\rm b}(x(t_k),t_k)={\rm e}^{2\alpha T_k}V_{\rm b}(x(t_{k+1}^-),t_{k+1}^-).$$

显然$V_{\rm a}(x(t))$, $V_{\rm b}(x(t),t)$满足定理1中的条件i)–ii).

接下来证明$\bar V(x(t),t)$满足定理1中的条件iii). 定义如下形式的变量:

$$\upsilon_k(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t-t_k}\displaystyle\int_{t_k}^t x(s){\rm d}s, & t\neq t_k,\\ x(t), & t=t_k,\end{cases}$$

以及$\eta_k(t)=[x^{\rm T}(t)\ \ x^{\rm T}(t_k)\ \ \upsilon_k^{\rm T}(t)]^{\rm T}$. 对所有的$t\in(t_k,t_{k+1})$, $k\in\mathbb N$, 考虑$\bar V(x(t),t)$沿系统(4)轨线的时间导数, 得

$$\begin{aligned}&{\rm e}^{-2\alpha(t-t_k)}\dot{\bar V}(x(t),t)=\\&\eta_k^{\rm T}(t)[\mathit\Pi_1^0+2\alpha M_1^{\rm T}PM_1+\\&(t_{k+1}-t)\mathit\Pi_{2\alpha}+(t_{k+1}+t_k-2t)\mathit\Pi_3+\\&2\alpha(t_{k+1}-t)(t-t_k)\mathit\Pi_3]\eta_k(t)+\\&[2\alpha(t_{k+1}-t)-1]\int_{t_k}^t\dot x^{\rm T}(s)R\dot x(s){\rm d}s+\\&[2\alpha(t_{k+1}-t)-1]\int_{t_k}^t x^{\rm T}(s)Zx(s){\rm d}s.\end{aligned}\tag{11}$$

由式(10), $1-2\alpha T_{\max}>0$成立, 故对所有的$t\in[t_k,t_{k+1})$, 恒有$2\alpha(t_{k+1}-t)-1<0$. 进一步对积分项$[2\alpha(t_{k+1}-t)-1]\int_{t_k}^t\dot x^{\rm T}(s)R\dot x(s){\rm d}s$应用引理2, 可得

$$\begin{aligned}&[2\alpha(t_{k+1}-t)-1]\int_{t_k}^t\dot x^{\rm T}(s)R\dot x(s){\rm d}s\leqslant\\&[2\alpha(T_{\max}-t+t_k)-1]\int_{t_k}^t\dot x^{\rm T}(s)R\dot x(s){\rm d}s\leqslant\\&\frac{2\alpha(T_{\max}-t+t_k)-1}{t-t_k}\eta_k^{\rm T}(t)[W_1^{\rm T}RW_1+\\&3W_2^{\rm T}RW_2]\eta_k(t)=\\&\frac{2\alpha T_{\max}-1}{t-t_k}\eta_k^{\rm T}(t)[W_1^{\rm T}RW_1+3W_2^{\rm T}RW_2]\eta_k(t)-\\&2\alpha\eta_k^{\rm T}(t)[W_1^{\rm T}RW_1+3W_2^{\rm T}RW_2]\eta_k(t).\end{aligned}$$

对任意矩阵$Y_i\in\mathbb R^{3n\times n}$, $i=1,2$, 下面的不等式恒成立:

$$-\frac{1}{t-t_k}W_i^{\rm T}RW_i\leqslant(t-t_k)Y_iR^{-1}Y_i^{\rm T}-He(Y_iW_i),$$

从而有

$$\begin{aligned}&[2\alpha(t_{k+1}-t)-1]\int_{t_k}^t\dot x^{\rm T}(s)R\dot x(s){\rm d}s\leqslant\\&\eta_k^{\rm T}(t)\{(1-2\alpha T_{\max})[-He(Y_1W_1+3Y_2W_2)+\\&(t-t_k)(Y_1R^{-1}Y_1^{\rm T}+3Y_2R^{-1}Y_2^{\rm T})]-\\&2\alpha(W_1^{\rm T}RW_1+3W_2^{\rm T}RW_2)\}\eta_k(t).\end{aligned}\tag{12}$$

对$[2\alpha(t_{k+1}-t)-1]\int_{t_k}^t x^{\rm T}(s)Zx(s){\rm d}s$应用引理1, 得

$$\begin{aligned}&[2\alpha(t_{k+1}-t)-1]\int_{t_k}^t x^{\rm T}(s)Zx(s){\rm d}s\leqslant\\&[2\alpha(T_{\max}-t+t_k)-1]\int_{t_k}^t x^{\rm T}(s)Zx(s){\rm d}s\leqslant\\&[2\alpha(T_{\max}-t+t_k)-1](t-t_k)\upsilon_k^{\rm T}(t)Z\upsilon_k(t)\leqslant\\&(2\alpha T_{\max}-1)(t-t_k)\eta_k^{\rm T}(t)M_3^{\rm T}ZM_3\eta_k(t).\end{aligned}\tag{13}$$

对于$t\in[t_k,t_{k+1})$, 对式(4)两边积分有

$$\begin{aligned}&x(t)-x(t_k)=\\&\int_{t_k}^t(Ax(s)+A_{\rm d}x(t_k)){\rm d}s=\\&(t-t_k)(A\upsilon_k(t)+A_{\rm d}x(t_k)).\end{aligned}$$

于是, 存在$Y_3\in\mathbb R^{3n\times n}$使

$$\eta_k^{\rm T}(t)[2(t-t_k)Y_3M_4-2Y_3W_1]\eta_k(t)=0.\tag{14}$$

将式(12)和式(13)代入式(11)并结合式(14), 得

$${\rm e}^{-2\alpha(t-t_k)}\dot{\bar V}(x(t),t)\leqslant\eta_k^{\rm T}(t)\mathit\Upsilon_\alpha(t)\eta_k(t),$$

这里:

$$\begin{aligned}&\mathit\Upsilon_\alpha(t)=\\&\mathit\Pi_{1\alpha}+(t_{k+1}-t)\mathit\Pi_{2\alpha}+(t_{k+1}+t_k-2t)\mathit\Pi_3+\\&2\alpha(t_{k+1}-t)(t-t_k)\mathit\Pi_3+(t-t_k)\mathit\Pi_{4\alpha}+\\&(t-t_k)(1-2\alpha T_{\max})\mathit\Pi_5,\\&\mathit\Pi_5=Y_1R^{-1}Y_1^{\rm T}+3Y_2R^{-1}Y_2^{\rm T}.\end{aligned}$$

在(t_k, t_{k+1})上, 证$\dot{\bar{V}}(x(t),t)<0$, 只要证$\varUpsilon_\alpha(t)$负定即可. 由条件$X<0$, 可得$\varUpsilon_\alpha(t)$是关于时间t的凸函数, 则$\varUpsilon_\alpha(t)$在整个区间(t_k, t_{k+1})上负定的充分必要条件是它在两个端点时刻均负定, 即

$$\varPi_{1\alpha}+T_k(\varPi_{2\alpha}+\varPi_3)<0,$$
$$\varPi_{1\alpha}-T_k(\varPi_3-\varPi_{4\alpha})+T_k(1-2\alpha T_{\max})\varPi_5<0.$$

注意到上面的两式关于T_k是凸的, 根据Schur补引理, 由定理2中的式(9)–(10)可得上面的两个不等式成立.

至此定理1中的条件都得到了满足, 故线性采样系统(3)–(4)是以衰减率α指数稳定的.　　证毕.

注 4　与文献[11]中推论2相比, 本文在构造$\bar{V}(x(t),t)$时, 除了各项关于时间t的函数因子不同外, 还增加了状态的二次积分项$(t_{k+1}-t)\int_{t_k}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Zx(s)\mathrm{d}s$, 以及关于时间$t$的二次项$(t_{k+1}-t)(t-t_k)x^{\mathrm{T}}(t_k)Xx(t_k)$. 与文献[12]相比, 本文将其由渐近稳定性条件推广至指数稳定性条件, 并且在构造类Lyapunov泛函时引入了状态的积分信息, 从而使得本文的类Lyapunov泛函更具一般性. 另外在处理$\dot{\bar{V}}(x(t),t)$时, 本文利用了采样系统的状态方程信息, 并且同时运用了引理1和引理2, 这样既可以得到一个较紧的导数上界, 又不致引入过多的矩阵变量.

对上述定理取$\alpha=0$, 得线性采样系统(3)–(4)的渐近稳定性准则:

推论 1　对于给定的标量$0\leqslant T_{\min}\leqslant T_{\max}$, 线性采样系统(3)–(4)是渐近稳定的, 如果存在$P>0$, S, $X\in\mathbb{S}^n$, $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $R>0$, $Z>0$, 以及$Y_i\in\mathbb{R}^{3n\times n}$, $i=1,2,3$, 使得对于$T\in\{T_{\min},T_{\max}\}$有

$$\varPsi_0^1(T)=\varPi_1+T(\varPi_2+\varPi_3)<0,$$
$$\varPsi_0^2(T)=\begin{bmatrix}\varPi_1-T(\varPi_3-\varPi_4) & TY_1 & 3TY_2\\ * & -TR & 0\\ * & * & -3TR\end{bmatrix}<0,$$

其中$\varPi_i, i=1,2,3,4$在定理2中已给出.

注 5　本推论中并不要求$X<0$, 即对X没有限制.

注 6　定理2以及推论1可应用于定常周期采样系统以及多面体不确定采样系统, 可得相应的稳定性结果.

4　数值例子(Examples)

下面给出两个数值例子来说明本文方法的有效性.

例 1　考虑线性采样系统(3)–(4), 其系统矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -0.1\end{bmatrix}, A_{\mathrm{d}}=BK=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -0.375 & -1.15\end{bmatrix}.$$

对于不同的衰减率α, 当$T_{\min}=0$时, 分别应用文献[11]中推论2及本文中定理2得到了保证系统指数稳定的最大变周期采样上界$T_{\max}$, 结果详见表1.

表 1　系统指数稳定的最大变周期采样上界$T_{\max}$

Table 1　Maximum upper bound $T_{\max}$ of the aperiodic sampling for systems to be exponentially stable

α	0.1	0.2	0.3	0.4
文献[11]	1.447	1.259	1.119	1.006
本文	1.623	1.539	1.473	1.250

由表1可以看出, 针对本例中的系统, 与文献[11]中推论2相比, 由本文定理2得到的保证系统指数稳定的最大变周期采样上界更大. 这说明本文定理2比文献[11]中推论2保守性小.

例 2　考虑线性采样系统(3)–(4), 其系统矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\ A_{\mathrm{d}}=BK=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

对于不同的衰减率α, 当$T_{\min}=0$时, 分别应用文献[11]中推论2及本文中定理2得到了保证系统指数稳定的最大变周期采样上界$T_{\max}$, 结果详见表2.

表 2　系统指数稳定的最大变周期采样上界$T_{\max}$

Table 2　Maximum upper bound $T_{\max}$ of the aperiodic sampling for systems to be exponentially stable

α	0.1	0.2	0.3	0.4
文献[11]	1.916	1.566	1.333	1.165
本文	2.032	1.705	1.531	1.250

由表2中可以看出, 对本例中的系统, 与文献[11]中推论2相比, 由本文定理2得到的保证系统指数稳定的最大变周期采样上界更大. 从这个意义上来讲, 本文定理2 比文献[11]中推论2保守性小.

与通常的要求每一项都正定的Lyapunov泛函相比, 本文的类Lyapunov泛函不要求每一项都正定, 具体体现在定理2对矩阵变量S, Q没有正定性的限制. 为了说明问题方便, 将定理 2 中 $V_{\mathrm{b}}(x(t),t)$ 包含 S, Q 的部分改写成如下形式:

$$\zeta^{\mathrm{T}}(t)[S\zeta(t)+2Qx(t_k)]\triangleq$$
$$\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t_k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}S & Q-S\\ * & S-Q-Q^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t_k)\end{bmatrix}\triangleq$$
$$\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t_k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}W\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t_k)\end{bmatrix}.$$

定理2对S, Q没有限制, 即对W不要求正定. 由表2知当$\alpha=0.2$时, $T_{\max}$的最大值为1.705. 利用MATLAB中的LMI工具箱可得

$$S=\begin{bmatrix}-83.0776 & -18.1933\\ -18.1933 & -1.5318\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}-103.7366 & -29.1847\\ -21.7074 & -1.6615\end{bmatrix},$$

即

$$W=\begin{bmatrix}-83.0776 & -18.1933 & -20.6590 & -10.9915\\ -18.1933 & -1.5318 & -3.5142 & -0.1297\\ -20.6590 & -3.5142 & 124.3956 & 32.6989\\ -10.9915 & -0.1297 & 32.6989 & 1.7912\end{bmatrix}.$$

W的特征值分别为$-89.6656, -6.4418, 2.7283, 134.9564$, 所以$W$是不定的. 假若对$S, Q$加以限制, 使$W>0$, 定理2的其他条件不变, 此时得到的$T_{\max}$的最大值只有1.127. 这说明若要求$S, Q$使$W$正定, 其他条件不变, 其相应的结果比定理2保守性较大.

特别地, 取$\alpha=0$, 且$T_{\min}=0$时, 表3总结了用本文推论1和某些文献中的方法得到的保证例1中系统渐近稳定的最大变周期采样的上界$T_{\max}$.

表 3 系统渐近稳定的最大变周期采样上界$T_{\max}$

Table 3 Maximum upper bound $T_{\max}$ of the aperiodic sampling for systems to be asymptotically stable

方法	文献[16]	文献[6]	文献[11]	本文
$T_{\max}$	1.689	1.695	1.723	1.729

表3说明了本文中推论1比以往某些文献中的方法保守性小.

5 结论(Conclusions)

本文提供了一个分析变周期线性采样系统指数稳定的新方法. 通过构造新的类Lyapunov泛函, 导出了一个保证一类非线性采样系统指数稳定的新定理, 利用这个新定理和改进的Wirtinger积分不等式, 导出了变周期线性采样系统指数稳定及渐近稳定的新准则. 数值例子说明了本文给出的稳定性判定准则与现存的某些文献相比具有更小的保守性.

参考文献

[1] XUE Yan, LIU Ke. Variable-sampling-rate networked control systems based on prediction-value control [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(6): 657 – 660.
(薛燕, 刘克. 基于预测值控制的变采样网络控制系统 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(6): 657 – 660.)

[2] DAI Jianguo, CUI Baotong. Robust H-infinity control of nonlinear networked systems with uncertainty [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(11): 1569 – 1574.
(戴建国, 崔宝同. 不确定非线性网络化系统的鲁棒H_∞控制 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(11): 1569 – 1574.)

[3] FUJIOKA H. A discrete-time approach to stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(10): 2440 – 2445.

[4] OISHI Y, FUJIOKA H. Stability and stabilization of aperiodic sampled-data control systems using robust linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 2010, 46(8): 1327 – 1333.

[5] LEE D, JOO Y. A note on sampled-data stabilization of LTI systems with aperiodic sampling [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(10): 1 – 6.

[6] FRIDMAN E. A refined input delay approach to sampled-data control [J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 421 – 427.

[7] SHAO H. Improved delay-dependent stability criteria for systems with a delay varying in a range [J]. *Automatica*, 2008, 44(12): 3215 – 3218.

[8] HU L, LAM J, CAO Y, et al. A LMI approach to robust H_2 sampled-data control for linear uncertain systems with time-varying delay [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B*, 2003, 33(1): 149 – 155.

[9] NAGHSHTABRIZI P, HESPANHA J P, TEEl A R. Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data system [J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(5): 378 – 385.

[10] BRIAT C, SEURET A. A looped-functional approach for robust stability analysis of linear impulsive systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(10): 980 – 988.

[11] SEURET A. A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings [J]. *Automatica*, 2012, 48(1): 177 – 182.

[12] SHAO H, LAM J, FENG Z. Sampling-interval-dependent stability for linear sampled-data systems with non-uniform sampling [J]. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(12): 2893 – 2900.

[13] SHAO H, ZHU X, ZHANG Z. Sampling-interval-dependent exponential stability for a networked control system model of sampled-data system [C] *//Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*. Nanjing: IEEE, 2014: 6108 – 6113.

[14] GU K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems [C] *//Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney: IEEE, 2000: 2805 – 2810.

[15] SEURET A, GOUAISBAUT F. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems [J]. *Automatica*, 2013, 49(9): 2860 – 2866.

[16] SEURET A. Stability analysis for sampled-data systems with a time-varying period [C] *//The 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*. Shanghai: IEEE, 2009: 8130 – 8135.

作者简介:

张 丹 (1989–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为线性采样系统, E-mail: zhangdanjisuan@163.com;

邵汉永 (1964–), 男, 教授, 硕士生导师, 目前研究方向为采样系统、时滞系统、神经网络系统、鲁棒控制及其应用等, E-mail: hanyongshao@163.com;

赵建荣 (1990–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为线性采样系统, E-mail: zhaojianrong6666@163.com.