

网格缩减的自适应 hp 伪谱法

雷虎民¹, 刘滔^{1†}, 李炯¹, 姜志鹏^{1,2}

(1. 空军工程大学 防空反导学院, 陕西 西安 710051; 2. 空军装备研究院 防空所, 北京 100085)

摘要: 针对控制变量不连续的最优控制问题, 本文提出一种自适应更新的 hp 伪谱法, 这种方法在(Legendre Gauss Radau, LGR)点处取配点, 能够以较小的网格规模获得较高的精度. 通过计算相对误差估计, 判断网格规模是增加还是缩减, 若相对容许误差大于给定值, 则增加网格区间数或网格配点数提高解的精度, 反之则合并网格或减小网格配点数缩减网格规模提高计算效率. 将 hp 伪谱法应用于最优控制问题, 仿真验证了 hp 伪谱法的优越性.

关键词: 最优控制; 伪谱法; 网格更新; 相对误差估计; 合并网格区间

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Adaptive mesh refinement of hp pseudospectral method using mesh size reduction

LEI Hu-min¹, LIU Tao^{1†}, LI Jiong¹, JIANG Zhi-peng^{1,2}

(1. Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an Shaanxi 710051, China;
2. Equipment Academy of Air Force, Land-Based Air Defense Equipment Institute, Beijing 100085, China)

Abstract: An adaptive mesh refinement of hp pseudospectral method is described for solving the optimal control problem when the control variable of the problem is discontinuous. The method uses orthogonal collocation at Legendre Gauss Radau points, and produces significantly smaller mesh sizes with a higher accuracy tolerance solution. The derived relative error estimate is then used to decide if the mesh size should be increased or if it should be reduced, and if the error relative error estimate is greater than the set value, then the relative error estimate is reduced by increasing the number of collocation points or increasing the number of mesh intervals, otherwise the computation time is reduced by reducing the number of collocation points or merging adjacent mesh intervals. The hp pseudospectral method is applied successfully to the examples of the optimal control problem, and the simulation experiment results show that the hp pseudospectral method has many advantages.

Key words: optimal control; pseudospectral method; mesh refinement; relative error estimate; merge mesh intervals

1 引言(Introduction)

目前, 求解最优控制问题的方法主要有间接法和直接法两类^[1-4]. 其中, 间接法将利用Pontryagin极小值原理和一阶最优必要条件将最优问题转换为两点或多点边值问题, 可获得精确的最优解. 间接法的优点是解的精度高, 满足最优性一阶必要条件, 但其收敛半径小, 对共轭变量初值高度敏感且难以估计, 同时各种约束也使得间接法的求解推导十分困难. 相比间接法, 直接法则利用参数化方法将连续空间的最优控制问题转化为非线性规划问题(nonlinear program, NLP), 然后在利用NLP问题求解工具^[5]进行求解.

直接法中的配点法是比较典型的代表, 配点法是在同时离散化系统的控制变量与状态变量, 将微分方程

转化为代数约束条件, 这种算法收敛速度较快, 且收敛半径大^[6]. 文献[7]比较了Legendre, Radau和Gauss 3种主要伪谱法, Gauss和Radau伪谱法在收敛速度与协态变量估算精度方面优于Legendre伪谱法, 但当控制变量和协态变量不存在不连续点时伪谱法才具有高精度和高收敛速度, 可许多实际问题大多是状态或控制不连续. 网格细化算法能识别不连续点且能大概确定离散点使用数目, 能极大提高伪谱法的有效性, h 法和 p 法是网格细化算法中比较典型的算法. h 法和 p 法存在转化后的NLP问题维度高、求解速率低的问题, 对此文献[8]和文献[9]分别提出 hp 或 ph 网格细化算法, 这种方法网格配点数和网格区间数均是可变的, 提高了转换后NLP问题求解效率. 本文在此基础上

收稿日期: 2015-10-21; 录用日期: 2016-06-08.

†通信作者. E-mail: ltlover@sina.com; Tel.: +86 15591879107.

本文责任编辑: 蔡开元.

国家自然科学基金项目(61573374, 61503408)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61573374, 61503408).

上,提出了一种网格规模可减小的 hp 网格细化算法,相比于文献[8]中的其网格配点数与网格区间数均随着迭代不断增加,该算法一定条件下还会缩减,能够减小网格规模,降低转换后NLP问题求解规模,提高计算效率.

2 Radau伪谱法(Radau pseudospectral)

2.1 Bolza问题(Bolza problem)

为不失一般性,下面讨论非线性最优控制问题的标准形式,即Bolza问题.

已知非线性系统状态方程如下:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{t_f - t_0}{2} f(x(\tau), u(\tau), t(\tau, t_0, t_f)), \quad (1)$$

其中: 状态变量 $x(\tau) \in \mathbb{R}^{n_x}$, 控制变量 $u(\tau) \in \mathbb{R}^{n_u}$, 变换域 $\tau \in [-1, +1]$, 初始时刻 t_0 , 终端时刻 t_f , 时间域从 $t \in [t_0, t_f]$ 变换到 $\tau \in [-1, +1]$, 变换等式为

$$t \equiv t(\tau, t_0, t_f) = \frac{t_f - t_0}{2} \tau + \frac{t_f + t_0}{2}. \quad (2)$$

边界条件

$$b_{\min} \leq b(x(-1), t_0, x(+1), t_f) \leq b_{\max}. \quad (3)$$

路径约束为

$$c_{\min} \leq c(x(\tau), u(\tau), t(\tau, t_0, t_f)) \leq c_{\max}. \quad (4)$$

Bolza问题描述为,在满足状态方程(1)、边界条件(3)及路径约束(4)的条件下,求解控制变量 $u(\tau) \in \mathbb{R}^{n_u}$,使得性能指标(5)达到最小.

$$J = M(x(-1), t_0, x(+1), t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^{+1} L(x(\tau), u(\tau), t(\tau, t_0, t_f)) d\tau. \quad (5)$$

在离散 hp 伪谱法中,域 $\tau \in [-1, +1]$ 由 K 个网格区间 $S_k = [T_{k-1}, T_k]$ 组成, $k = 1, \dots, K$, 其中 $\bigcup_{k=1}^K S_k = [-1, +1]$, $\bigcup_{k=1}^K S_k = [-1, +1]$, $x^{(k)}(\tau)$ 与 $u^{(k)}(\tau)$ 分别为区间 S_k 的状态变量与控制变量, Bolza最优控制问题如下.

目标函数

$$J = M(x^{(1)}(-1), t_0, x^{(K)}(+1), t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K \int_{T_{k-1}}^{T_k} L(x^{(k)}(\tau), u^{(k)}(\tau), t(\tau, t_0, t_f)) d\tau. \quad (6)$$

状态方程

$$\frac{dx^{(k)}(\tau)}{d\tau} = \frac{t_f - t_0}{2} f(x^{(k)}(\tau), u^{(k)}(\tau), t(\tau, t_0, t_f)). \quad (7)$$

路径约束

$$c_{\min} \leq c(x^{(k)}(\tau), u^{(k)}(\tau), t(\tau, t_0, t_f)) \leq c_{\max}. \quad (8)$$

边界条件

$$b_{\min} \leq b(x^{(1)}(-1), t_0, x^{(K)}(+1), t_f) \leq b_{\max}. \quad (9)$$

在网格内点处必须连续, 因而有 $x(T_k^-) = x(T_k^+)$, $k = 1, \dots, K$.

2.2 Legendre Gauss radau配点离散(LGR collocation discretization)

伪谱法是将状态变量与控制变量在Legendre-Gauss-Radau(LGR)点上进行离散^[10-11], 在LGR配点法中, 区间 S_k ($k = 1, \dots, K$)的连续时间状态变量

$$x^{(k)}(\tau) \approx X^{(k)}(\tau) = \sum_{j=1}^{N_k+1} X_j^{(k)}(\tau) \ell_j^{(k)}(\tau), \quad (10)$$

$$\ell_j^{(k)}(\tau) = \prod_{l=1, l \neq j}^{N_k+1} \frac{\tau - \tau_l^{(k)}}{\tau_j^{(k)} - \tau_l^{(k)}},$$

其中: $\tau \in [-1, +1]$, $\ell_j^{(k)}(\tau)$, $j = 1, \dots, N_k + 1$ 为拟合多项式的基, 网格区间 $S_k = [T_{k-1}, T_k]$ 处的LGR配点为 $(\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_{N_k}^{(k)})$, $\tau_{N_k+1}^{(k)} = T_k$ 为非配点. 状态方程

$$\frac{dX^{(k)}(\tau)}{d\tau} = \sum_{j=1}^{N_k+1} X_j^{(k)} \frac{d\ell_j^{(k)}(\tau)}{d\tau}, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{N_k+1} D_{ij}^{(k)} X_j^{(k)} = \frac{t_f - t_0}{2} f(X_i^{(k)}(\tau), U_i^{(k)}(\tau), t(\tau_i^{(k)}, t_0, t_f)), \quad (12)$$

其中: $D_{ij}^{(k)} = \frac{d\ell_j^{(k)}(\tau_i^{(k)})}{d\tau}$ ($i = 1, \dots, N_k$, $j = 1, \dots, N_k + 1$)为网格区间 S_k 的 $N_k \times (N_k + 1)$ 阶Legendre Gauss Radau微分矩阵^[12], LGR离散化后求解下列NLP问题, 目标函数

$$J = M(X_1^{(1)}, t_0, X_{N_{K+1}}^{(K)}, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_k} \omega_j^{(k)} L(X_j^{(k)}, U_j^{(k)}, t(\tau_i^{(k)}, t_0, t_f)), \quad (13)$$

式中积分权重 $\omega_j^{(k)} = \int_{-1}^1 \ell_j^{(k)}(\tau) d\tau$.

微分约束方程

$$\sum_{j=1}^{N_k+1} D_{ij}^{(k)} X_j^{(k)} - \frac{t_f - t_0}{2} f(X_i^{(k)}, U_i^{(k)}, t(\tau_i^{(k)}, t_0, t_f)) = 0, \quad (14)$$

$$i = 1, \dots, N_k.$$

离散路径约束

$$c_{\min} \leq c(X_i^{(k)}, U_i^{(k)}, t(\tau_i^{(k)}, t_0, t_f)) \leq c_{\max}, \quad (15)$$

$$i = 1, \dots, N_k.$$

离散边界条件

$$b_{\min} \leq b(X_1^{(1)}, t_0, X_{N_{K+1}}^{(K)}, t_f) \leq b_{\max}. \quad (16)$$

内点(T_1, \dots, T_{K-1})处状态变量连续, 所以有

$$X_{N_k+1}^{(k)} = X_1^{(k+1)}, k = 1, \dots, K - 1. \quad (17)$$

3 hp自适应网格更新方法(Method of hp adaptive mesh refinement)

3.1 相对误差估计(Relative error estimate)

在划分的每个网格区间内设定最大容许误差 ε , 若任意网格区间 $S_k(k = 1, \dots, K)$ 的相对误差估计 $e_{\max}^{(k)}$ 大于 ε , 则对网格区间进行重新细化或增加网格区间内插值多项式的阶次, 否则减小网格区间数或降低多项式阶次. 假定式(13)–(16)的离散Bolza最优控制问题的解在网格区间 $S_k = [T_{k-1}, T_k], k = 1, \dots, K$ 中有 N_k 个LGR配点. 当LGR配点数增加时, 解的精度也能随之提高, 因而设有 $M_k = N_k + 1$ 个LGR配点($\hat{\tau}_1^{(k)}, \dots, \hat{\tau}_{M_k}^{(k)}$), 其中 $\hat{\tau}_1^{(k)} = \tau_1^{(k)} = T_{k-1}, \hat{\tau}_{M_k}^{(k)} = T_k$. 根据式(10), M_k 个LGR配点($\hat{\tau}_1^{(k)}, \dots, \hat{\tau}_{M_k}^{(k)}$)处的状态近似值为($x(\hat{\tau}_1^{(k)}), \dots, x(\hat{\tau}_{M_k}^{(k)})$), 控制变量Lagrange插值的基

$$U^{(k)}(\tau) = \sum_{j=1}^{N_k} U_j^{(k)}(\tau) \hat{\ell}_j^{(k)}(\tau), \quad (18)$$

$$\hat{\ell}_j^{(k)}(\tau) = \prod_{l=1, l \neq j}^{N_k} \frac{\tau - \tau_l^{(k)}}{\tau_j^{(k)} - \tau_l^{(k)}},$$

其中状态 $\hat{X}^{(k)}(\hat{\tau}_j^{(k)})$ 由下式计算获得

$$\hat{X}^{(k)}(\hat{\tau}_j^{(k)}) = X^{(k)}(\tau_{k-1}) + \frac{t_f - t_0}{2} \times \sum_{l=1}^{M_k} (\hat{I}_{jl}^{(k)} f(X^{(k)}(\hat{\tau}_j^{(k)}), U^{(k)}(\hat{\tau}_j^{(k)}), t(\hat{\tau}_i^{(k)}, t_0, t_f)), \quad (19)$$

$$j, l = 1, \dots, M_k + 1,$$

式中: $\hat{I}^{(k)} = [\hat{D}_2^{(k)}, \dots, \hat{D}_{N_k+1}^{(k)}]^{-1}$ 为LGR点($\hat{\tau}_1^{(k)}, \dots, \hat{\tau}_{M_k}^{(k)}$)的 $M_k \times M_k$ 阶积分权重矩阵, $x(\hat{\tau}_j^{(k)})$ 与 $\hat{x}(\hat{\tau}_j^{(k)})$ 之间的绝对差与相对差分别如下^[9]:

$$E_i^{(k)}(\hat{\tau}_l^{(k)}) = |\hat{X}_i^{(k)}(\hat{\tau}_l^{(k)}) - X_i^{(k)}(\hat{\tau}_l^{(k)})|, \quad (20)$$

$$e_i^{(k)}(\hat{\tau}_l^{(k)}) = \frac{E_i^{(k)}(\hat{\tau}_l^{(k)})}{1 + \max_{j \in [1, \dots, N_k+1], k \in [1, \dots, K]} |X_i^{(k)}(\tau_l^{(k)})|}, \quad (21)$$

$$l = 1, \dots, M_k + 1, i = 1, \dots, n_x.$$

网格区间 S_k 处的相对误差估计^[11]

$$e_{\max}^{(k)} = \max_{i \in [1, \dots, n_x], l \in [1, \dots, M_k+1]} e_i^{(k)}(\hat{\tau}_j^{(k)}). \quad (22)$$

3.2 hp自适应网格更新 (hp adaptive mesh refinement)

3.2.1 非光滑处定位(Nonsmooth solution location)

当网格区间 $k \in [1, \dots, K]$ 需进一步细化时, 需要判断是增加配点数还是增加插值多项式的阶次, 本文

采用的方法如下, 若需细化的网格区间是非光滑的, 则增加配点数, 若需细化的网格区间是光滑的, 则增加插值多项式的阶次. 为了简便, 在网格区间 $k \in [1, \dots, K]$ 中, 令

$$\begin{cases} P_{ij}^{(M)} = |\ddot{X}_i^{(M)}(\tau_{ij})|, P_{ij}^{(M-1)} = |\ddot{X}_i^{(M-1)}(\tau_{ij})|, \\ i = 1, \dots, n_x, j = 1, \dots, L_i, \end{cases} \quad (23)$$

其中 $\tau_{ij} \in S_k$ 为 $|\ddot{X}_i^{(M)}(\tau)|$ 取的局部极大值的点. 相似的, $P_{ij}^{(M-1)}$ 为 $|\ddot{X}_i^{(M-1)}(\tau)|$ 在 $\tau_{ij} \in S_k$ 邻域内取极大值的点. M 表示当前优化次数, 若

$$R_{ij} = \frac{P_{ij}^{(M)}}{P_{ij}^{(M-1)}} \geq \bar{R}, \quad (24)$$

则网格区间 S_k 为非光滑处^[14], 其中 \bar{R} 为给定的比值.

3.2.2 网格区间分解(Dividing a mesh interval)

当网格区间 $S_k, k \in [1, \dots, K]$ 处 $e_{\max}^{(k)} > \varepsilon, \varepsilon$ 为给定的最大容许误差, 且存在 $\tau_{ij} \in S_k$ 使得式(24)成立, 即网格区间 S_k 中存在非光滑点. 设对任意 $j \in [1, \dots, H_k]$, 存在 $i \in [1, \dots, n_x]$ 使得 $R_{ij} \geq \bar{R}$ 成立, 则认为网格区间 S_k 中存在 H_i 个非光滑点, 则以这 H_k 个非光滑点为分界点将网格区间 S_k 分成 $H_k + 1$ 个子区间. 为了使得子网格区间的数量不至于过大, 有必要限制子网格区间数目的增长, 因而子网格区间数量必须设定最大值, 子网格区间数量最大为^[15]

$$H_{\max} = \lceil \log_{N_k}(e^{(k)}/\varepsilon) \rceil, \quad (25)$$

子网格区间数量上界 H_{\max} 变化如下, 当 $e^{(k)} \gg \varepsilon$ (如 10^6)时, 大约取15~25, 当 $e^{(k)} \rightarrow \varepsilon$ 时, H_{\max} 趋近于0. 子网格区间数量 S

$$S = \min(H_k + 1, H_{\max}). \quad (26)$$

3.2.3 增加网格配点数(Increasing the number of collocation points in a mesh interval)

当网格区间 S_k 处, $e_{\max}^{(k)} > \varepsilon$, 且对任意的 $\tau \in S_k$, 都有 $R_{ij} < \bar{R}$, 网格区间 S_k 为光滑处. 为使相对误差估计 $e_{\max}^{(k)}$ 达到 ε 以内, 则其误差必须缩小 $\varepsilon/e_{\max}^{(k)}$ 倍^[9]. 通过增加配点数 P_k 来达到要求, 且 $N_k^{-P_k} = \varepsilon/e_{\max}^k$, 即

$$P_k = \log_{N_k} \left(\frac{e_{\max}^{(k)}}{\varepsilon} \right), \quad (27)$$

其中 P_k 为整数, 因而式(27)改写成为

$$P_k = \lceil \log_{N_k} \left(\frac{e_{\max}^{(k)}}{\varepsilon} \right) \rceil. \quad (28)$$

3.2.4 减小网格配点数(Reducing the number of collocation points in a mesh interval)

网格区间 $S_k = [T_{k-1}, T_k]$ 的相对误差估计 $e_{\max}^{(k)}$ 小于 ε , 下面进一步讨论在减少配点数的情况下, 该网格区间的相对误差估计 $e_{\max}^{(k)}$ 仍小于 ε ^[15]. 令

$$\mu_k = \frac{T_{k-1} + T_k}{2}, h_k = \frac{T_k - T_{k-1}}{2},$$

则有

$$\begin{cases} X_i^{(k)}(\tau) = \sum_{j=1}^{N_k+1} X_{ij} \ell_j(\frac{\tau - \mu_k}{h_k}), \\ \ell_j(s) = \prod_{i=1, i \neq j}^{N_k+1} (\frac{s - s_i}{s_j - s_i}), \end{cases} \quad (29)$$

其中 $-1 = s_1 < s_2 < \dots < s_{N_k} < s_{N_k+1} = 1$, 多项式 $\ell_j(s)$ 可写成如下形式:

$$\ell_j(s) = \sum_{l=0}^{N_k} a_{lj} s^l. \quad (30)$$

设多项式 $Q_j(s)$ 与 $\ell_j(s)$ 的根相同, $Q_j(s)$ 的根为 $\{s_k\}_{k=1, k \neq j}^{N_k+1}$, 那么有

$$i = 1, \dots, n_x, j = 1, \dots, L_i. \quad (31)$$

因为 $\ell_j(s_j) = 1$,

$$\ell_j(s) = \frac{1}{Q_j(s_j)} Q_j(s) = \sum_{l=0}^{N_k} \frac{Q_{lj}}{Q_j(s_j)} s^l, \quad (32)$$

从而推导出

$$a_{lj} = \frac{Q_{lj}}{Q_j(s_j)}. \quad (33)$$

值得注意的是, 系数仅依赖于配点数. 联立式(29)与式(30), 得

$$\begin{cases} X_i^{(k)}(\tau) = \sum_{l=0}^{N_k} b_{ij} (\frac{\tau - \mu_k}{h_k})^l, \\ b_{ij} = \sum_{j=1}^{N_k+1} X_{ij} a_{ij}, \end{cases} \quad (34)$$

其中 $\tau \in S_k$, 则 $|\frac{\tau - \mu_k}{h_k}| \leq 1$. 若 N_k 阶项去掉, 则网格区间 S_k 的最大误差为 $|b_{iN_k}|$. 为了便于比较, 必须标准化系数 b_{ij} , 令

$$\beta_{ij} = 1 + \max_{k \in [1, \dots, K]} \max_{\tau \in S_k} |X_i^{(k)}(\tau)|, \quad (35)$$

式中 $i = 1, \dots, n_x$. 去掉最高阶次项, 直到系数 $|b_{ij}| / \beta_{ij} > \varepsilon$ 为止. 对于状态的每一个分量 $i \in [1, \dots, n_y]$ 都进行相同的计算, 得到 n_x 个拟合项阶次 $N_1^{(k)}, \dots, N_{n_x}^{(k)}$. $X^{(k)}(\tau)$ 的差值多项式阶次取 $(N_1^{(k)}, \dots, N_{n_x}^{(k)})$ 中的最大值.

3.2.5 合并相邻网格区间(Merging adjacent mesh intervals)

网格区间合并之前必须按照减小网格区间配点数的方法消去两网格区间插值多项式的最高阶次, 然后对相邻网格区间的配点数进行一个大致的判断, 若 $N_{k+1} \neq N_k$, 则网格区间 $S_{k+1} = [T_k, T_{k+1}]$ 与网格区间 $S_k = [T_{k-1}, T_k]$ 不能合并, 因为这两个相邻网格区间的差值多项式最高阶次不等. 合并的新网格区间以原两个网格区间的所有配点为配点, 两个网格区间能合并的条件主要有 3 个: 1) 两个网格区间必须相邻; 2) 两个网格区间的相对误差估计都不大于 ε ; 3) 合并

后的大网格区间相对误差估计也不大于 ε .

3.2.6 hp自适应伪谱法计算流程(hp adaptive pseudospectral method procedure)

hp自适应伪谱法计算步骤如下所示, 其流程图如图1所示.

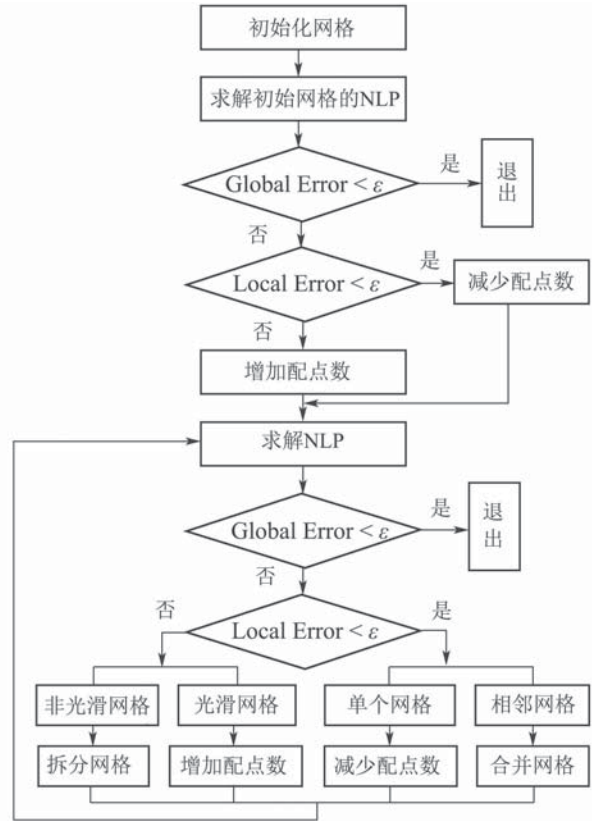


图1 适应hp伪谱法流程图

Fig. 1 Schematic of adaptive hp pseudospectral method

Step 1 初始化网格区间 $S_k = [T_{k-1}, T_k]$, $k = 1, \dots, K$, 及网格区间配点数 N_k , 利用Radau伪谱法将最优控制问题在LGR点进行离散, 转化为NLP问题, 采用序列二次规划(SNOPT)对NLP问题进行求解;

Step 2 判断所有网格区间相对误差估计 $e_{\max}^{(k)}$, ($k = 1, \dots, K$) 是否都满足 $e_{\max}^{(k)} < \varepsilon$, 是则退出程序, 否则进入Step 3;

Step 3 判断网格区间 S_k 的相对容许误差 $e_{\max}^{(k)}$ 是否满足 $e_{\max}^{(k)} < \varepsilon$, 是则减小网格配点数, 否则增加网格配点数;

Step 4 根据上一步的计算结果构建新的网格区间, 求解此时的NLP问题,

Step 5 判断所有网格区间相对误差估计 $e_{\max}^{(k)}$ 是否都满足 $e_{\max}^{(k)} < \varepsilon$, 是则退出程序, 否则执行下一步;

Step 6 判断网格区间 S_k 的相对容许误差 $e_{\max}^{(k)}$ 是否满足 $e_{\max}^{(k)} < \varepsilon$, 是则进入Step 8, 否则进入Step 7;

Step 7 判断网格区间 S_k 是否光滑, 光滑则增加网格区间配点数, 否则拆分网格. 完成后返回Step 4.

Step 8 对于单个网格区间, 减小网格区间配点数, 对于相邻网格区间, 判断是否满足合并条件, 满足则合并, 否则不合并. 完成后返回Step 4.

4 仿真分析(Simulation analysis)

为叙述方便, 本文将第3节方法称为hp法, 文献[9]所述方法称为ph法. $ph - (N_{\min}, N_{\max})$ 表示ph法网格区间配点数不是固定的, 数量在 N_{\min} 与 N_{\max} 之间. M 表示网格更新优化次数, $M = 0$ 表示网格初始化, N, M 分别表示网格总的配点数与网格区间数, hp法与ph法每个网格区间的配点数至少为2, 即 $N_k \geq 2$, ($k = 1, \dots, K$), 其中网格优化精度最大容许误差 $\epsilon = 10^{-6}$. 网格初始化时, 将整个时间区段平均分为10段, 每段配点数为2. 对于hp法, 根据文献[14]取 $\bar{R} = 1.2$, 每个网格区间最大配点数 $N_k = 15$. 对于ph法选择与文献hp法相似, 为 $ph - (3, 15)$.

本文的仿真结果都来自于MATLAB仿真, 其中NLP问题求解采用SNOPT工具^[4], 在联想CPU 3.4 GHz Intel Core i7计算机上获得. 论文以具有高灵敏度(hypersensitive)的最优控制问题^[9, 15]为例进行仿真验证本文方法的有效性, 一是能精确求解最优控制问题, 二是网格更新通过消去不必要的配点减小整个解的配点数, 提高算法计算性能.

目标函数

$$\min J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^2 + u^2) dt. \quad (36)$$

状态方程

$$\dot{x} = -x + u. \quad (37)$$

边界条件

$$x(0) = 1.5, x(t_f) = 1, \quad (38)$$

其中末端时间 t_f 固定, 方程(36)–(38)表示的最优控制问题的精确解为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ u^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t\sqrt{2}}c_1 \\ e^{-t\sqrt{2}}c_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{e^{-t_f\sqrt{2}} - e^{t_f\sqrt{2}}} \begin{bmatrix} 1.5e^{-t_f\sqrt{2}} - 1 \\ 1 - 1.5e^{t_f\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (39)$$

图2(a)与图2(b)是最优控制问题式(36)–(38)的精确解, 其中 $t_f = 10000$, 图3(a)与图3(b)分别表示hp法与ph法解的配点分布. 根据式(39), 可知, 当 t_f 较大时, 在两端点处, 状态变量与控制变量的变化较大, 因而在两端点的配点数较多, 图3(a)与图3(b)所示的仿真结果与之相符. 图3(a)中, 随着 M 的增加, 配点数不断增加, 而图3(b)中, 当 $M \geq 3$ 时, 随着 M 增加, 配点数没有增加, 反而减小. 因为hp方法具有减小网格区间数和网格数的性质, 而ph法没有这种性质, 因而其配点数不会减小. 当 $M = 5$ 时, ph法最终的配点数为332(图3(a)), hp法最终配点数为102(图3(b)), hp方法

配点数大大小于ph方法. 这是因为ph方法通过增加在每次迭代中配点数与网格区间数来提高解的精度, 而hp方法在求解过程中, 减小不必要的网格区间与配点数, 在两端点 $t = t_0$ 与 $t = t_f$ 处集中更多的配点与网格区间, 这样在保证求解精度的前提下提高求解速率.

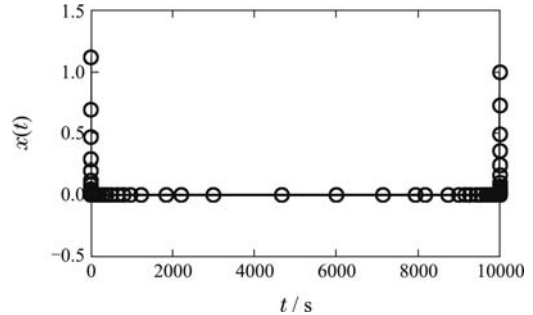


图2(a) $x(t)$ 随时间 t 变化曲线

Fig. 2(a) $x(t)$ vs. t

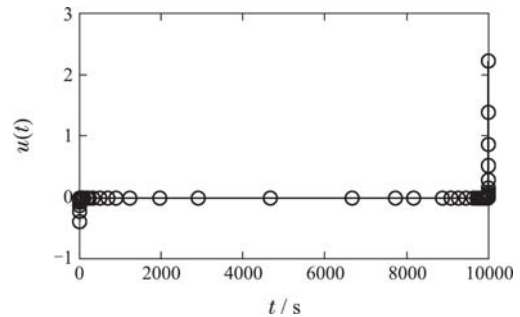


图2(b) $u(t)$ 随时间 t 变化曲线

Fig. 2(b) $u(t)$ vs. t

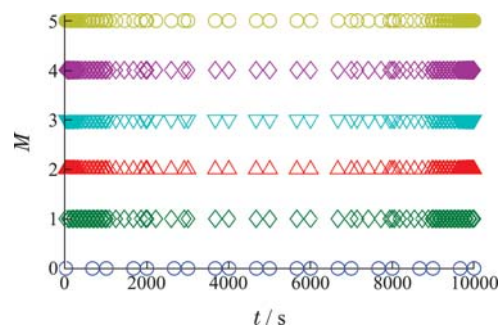


图3(a) ph法配点分布

Fig. 3(a) ph mesh point history

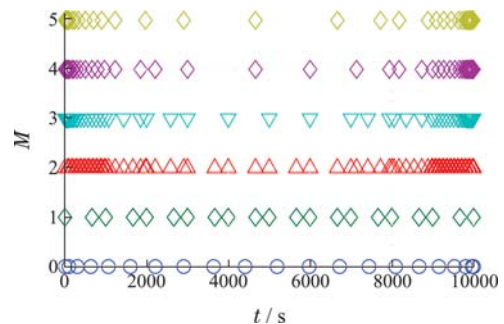


图3(b) hp法配点分布

Fig. 3(b) hp mesh point history

下面分析 hp 方法在两端点 $t = t_0$ 与 $t = t_f$ 对精确解的逼近能力. 如下图4(a)与图4(b)所示, 状态变量在 $t \in [0, 15]$ 与 $t \in [9995, 10000]$ 的计算结果, 随着 M 的增加, 所得的解逐渐收敛于精确解. 随着网格的不断更新, 在两端点处的配点数也不断增加, 因为在端点处状态变化较大, 这样使得解得精度也随之提高.

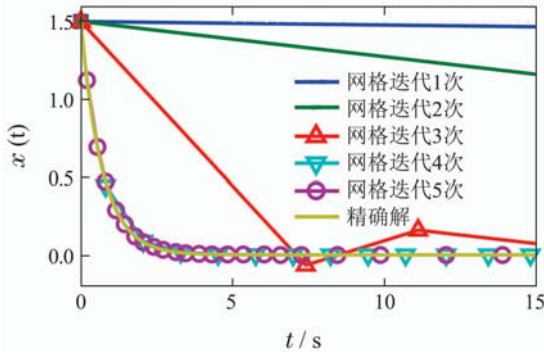


图4(a) $x(t)$ 在 t_0 附近随时间变化曲线

Fig. 4(a) $x(t)$ vs. t near t_0

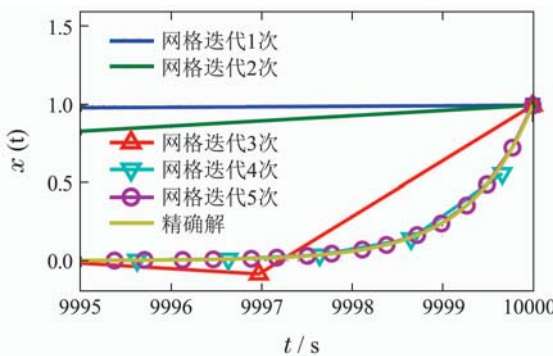


图4(b) $x(t)$ 在 t_f 附近随时间变化曲线

Fig. 4(b) $x(t)$ vs. t near t_f

接下来对 hp 法、 ph 法与 h 法及文献[8]中的方法(HP 法表示)进行比较, 表1(a)与表1(b)为 t_f 分别取10000, 100000时3种方法的运行时间, 及总配点数 N 、网格区间数 K 及网格更新次数 M .

从表1中可看出, ph 法、 h 法与 HP 法的总配点数 N 、网格区间数 K 随 t_f 的增大而增大, 而 hp 法基本保持不变. t_f 增大时, hp 法与 h 法、 ph 法及 HP 法的计算时间相差越大, 这是因为网格数及配点总数增加, 且 h 法、 ph 法和 HP 法迭代次数比 hp 法增加的多.

对本文 hp 法与文献[8]中 HP 法收敛性对比如表2所示. 表2中, $t_f = 10000$, e_{\max} 表示相对误差估计, e_{\max}^{exact} 表示与精确值之间的相对误差. 对 HP 法中的 e_{\max} 与 e_{\max}^{exact} 也进行了计算.

从表2中可看出相对误差估计能够较好的对与精确值误差对近似, 相对误差估计能够很好的反映所求解对精确解的逼近程度, hp 法与 HP 法都能够收敛给定误差范围内.

表1 hp 法与 h 法和 ph 法的对比

Table 1 Compare results using hp and various h and ph methods

		a) $t_f = 10000$					
		N_{\min}	N_{\max}	t/s	N	K	M
hp		2	15	5.83	102	16	5
HP	$\rho = 3$ $L = 1$			14.28	368	48	7
h	2	2	2	25.39	378	189	8
h	3	3	3	16.37	489	163	7
h	4	4	4	12.56	548	137	6
h	5	5	5	20.38	605	121	6
ph	3	8	8	18.56	435	108	7
ph	3	12	12	15.88	388	84	7
ph	3	15	15	13.19	332	43	6
ph	4	8	8	16.89	497	95	7
ph	4	12	12	15.71	408	75	7
ph	4	15	15	14.35	348	65	7
		b) $t_f = 100000$					
		N_{\min}	N_{\max}	t/s	N	K	M
hp		2	15	15.56	118	21	6
HP	$\rho = 3$ $L = 1$			114.28	401	63	9
h	2	2	2	184.81	436	218	9
h	3	3	3	159.2	513	171	9
h	4	4	4	137.34	624	156	8
h	5	5	5	141.06	710	140	8
ph	3	8	8	126.56	517	112	9
ph	3	12	12	113.91	439	84	9
ph	3	15	15	103.19	393	57	8
ph	4	8	8	127.88	532	116	9
ph	4	12	12	115.37	441	97	9
ph	4	15	15	109.59	386	88	8

表2 hp 法文献[8]中 HP 法收敛性对比

Table 2 Convergence of hp method compare with HP method in Ref. [8]

M	hp		HP	
	e_{\max}	e_{\max}^{exact}	e_{\max}	e_{\max}^{exact}
1	1.278×10^0	8.913×10^{-3}	8.573×10^{-1}	6.151×10^{-3}
2	3.425×10^{-1}	3.258×10^{-2}	4.189×10^{-1}	1.708×10^{-3}
3	2.150×10^{-2}	6.153×10^{-2}	3.769×10^{-2}	3.250×10^{-3}
4	9.556×10^{-4}	7.332×10^{-4}	5.121×10^{-3}	5.208×10^{-4}
5	6.523×10^{-10}	1.083×10^{-9}	1.705×10^{-3}	6.711×10^{-5}
6	—	—	5.893×10^{-5}	2.384×10^{-6}
7	—	—	8.384×10^{-9}	1.083×10^{-8}

5 结论(Conclusions)

针对最优控制问题, 本文提出了一种自适应 hp 伪谱法, 相比于其他增加网格配点数及网格区间数的方法, hp 法还能减小网格配点数和网格区间数. 通过误

差估计判断网格规模是增加还是缩小, 网格规模增加时分为两种情况, 一是在光滑网格区间增加配点数, 另一种是在非光滑网格区间增加网格配点数; 网格规模的减小, 是在满足一定的条件下减小网格配点数和合并相邻网格区间. 将 hp 法应用于最优控制问题, 并与其他方法 ph 法和 h 法进行比较, 仿真验证了 hp 法的优越性.

参考文献(References):

- [1] BETTS J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, 21(2): 193 – 207.
- [2] ROSS I M, FAHROO F A. Perspective on methods for trajectory optimization [C] // *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*. Monterey: AIAA Press, 2002: 1 – 7.
- [3] LI G D, LIU X G. Optimal control problems with incomplete and different integral time domains in the objective and constraints [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(4): 2883 – 2895.
- [4] HUANG Jie, ZHANG Youan, WANG Liying. Convergence of nonlinear optimal control problem using Radau pseudospectral method [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 31(2): 263 – 267.
(黄洁, 张友安, 王丽英. 基于Radau伪谱法的非线性最优控制问题的收敛性 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 31(2): 263 – 267.)
- [5] GILL P E, WONG E, MURRAY W, et al. User's guide for SNOPT Version 7.4: Software for large-scale nonlinear programming [R]. *Numerical Analysis Report, Department of Mathematics*, San Diego: University of California, 2015.
- [6] HUNTINGTON G T. *Advancement and analysis of a Gauss pseudospectral transcription for optimal control problems* [D]. Cambridge, MIT: Massachusetts Institute of Technology, 2007: 23 – 32.
- [7] HUNTINGTON G T, BENSON D, RAO A V. A comparison of accuracy and computational efficiency of three pseudospectral methods [C] // *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. South Carolina: AIAA Press, 2007: 1 – 25.
- [8] DARBY C L, HAGER W W, RAO A V. An hp -adaptive pseudospectral method for solving optimal control problems [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2011, 32(4): 476 – 502.
- [9] PATTERSON M A, HAGER W W, RAO A V. A ph mesh refinement method for optimal control [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2014, DOI: 10.1002/oca2114.
- [10] GARG D, HAGER W W, RAO A V. Pseudospectral methods for solving infinite horizon optimal control problems [J]. *Automatica*, 2011, 47(4): 829 – 837.
- [11] FENGJIN L, WILLIAM W H, RAO A V. An hp mesh refinement method for optimal control using discontinuity detection and mesh size reduction [C] // *2014 IEEE Conference on Decision and Control*, Los Angeles, 2014, 12: 5868 – 5873.
- [12] GARG D, PATTERSON M A, DARBY C L, et al. Direct trajectory optimization and costate Estimation of finite-horizon and infinite-horizon optimal control problems via a Radau pseudospectral method [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2011, 49(2): 335 – 358.
- [13] HOU H. *Convergence analysis of orthogonal collocation methods for unconstrained optimal control* [D]. Florida: University of Florida, 2013.
- [14] PACHÓN R, PLATTE R, TREFETHEN L N. Piecewise smooth chebfuns [J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2010, 30(4): 898 – 916.
- [15] LIU F, HAGER W W, RAO A V. Adaptive mesh refinement method for optimal control using nonsmoothness detection and mesh size reduction [J]. *Journal of the Franklin Institute*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2015.05.028>.

作者简介:

雷虎民 (1960–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为飞行器导航、制导与控制, E-mail: lhmleinet@21cn.com;

刘滔 (1988–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为空天拦截器制导, E-mail: ltloveder@sina.com;

李炯 (1978–), 男, 博士, 目前研究方向为飞行器导航、制导与控制, E-mail: gracefuloool@163.com;

姜志鹏 (1986–), 男, 博士, 目前研究方向为反导指挥体制, E-mail: tisme.zp@163.com.