

## 相关噪声下非线性滤波及在动力定位中的应用

林孝工, 焦玉召<sup>†</sup>, 梁 坤, 李 恒

(哈尔滨工程大学 自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:** 针对实际系统状态估计具有互相关噪声的情况, 研究了互相关噪声下非线性系统状态估计问题. 首先基于贝叶斯理论推导出新的互相关噪声下的贝叶斯估计算法. 然后使用三阶球面径向基(spherical-radial)规则计算贝叶斯估计中的非线性积分, 当噪声互相关时, 基于扩展卡尔曼滤波的思想分别计算状态矩阵和观测矩阵的Jacobi矩阵, 可得互相关噪声下的容积卡尔曼滤波(cubature Kalman filtering with one-step auto-correlated and two-step cross-correlated noise, CKF-CCN); 当噪声不相关时, 可得容积卡尔曼滤波(cubature Kalman filtering, CKF)及其平方根形式(SCKF). 最后通过动力定位系统仿真实验, 表明提出的CKF-CCN的估计精度要高于SCKF和仅考虑一步互相关的平方根容积卡尔曼滤波(SCKF-CN).

**关键词:** 相关噪声; 贝叶斯估计; 容积卡尔曼滤波; 动力定位

**中图分类号:** U666.1      **文献标识码:** A

## Application of the nonlinear filtering algorithm with a correlation noise in the dynamic positioning

LIN Xiao-gong, JIAO Yu-zhao<sup>†</sup>, LIANG Kun, LI Heng

(College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin Heilongjiang 150001, China)

**Abstract:** In view of the situation that the state estimates have correlated noise in practice, the state estimation of nonlinear system under correlation noise is studied. Firstly, the new Bayesian estimation with correlated noise is obtained based on the Bayesian theory. Secondly, the third-degree-spherical-radial rule is used to solve the nonlinear integral, if the noise is correlated then the Jacobi matrix of the state matrix and the observation matrix are computed respectively and the cubature Kalman filtering with one-step auto-correlated and two-step cross-correlated noise (CKF-CCN) is obtained; if the noise is uncorrelated then the cubature Kalman filtering (CKF) algorithm and its square root form (SCKF) are obtained. Finally, through the simulation experiment of dynamic positioning and the results illustrate that the estimation accuracy of proposed CKF-CCN algorithm is higher than the SCKF algorithm and the squared root cubature Kalman filtering algorithm which only considering one-step cross-correlated noise (SCKF-CN).

**Key words:** correlation noise; Bayesian estimation; cubature Kalman filtering; dynamic positioning

### 1 引言(Introduction)

动力定位技术是船舶进行海上作业的一种重要技术手段, 已成功应用于船舶海底石油和天然气开采、海底铺管、平台作业、循迹和潜水支持等领域<sup>[1]</sup>. 近年来, 随着人们对海洋资源开发的增加, 动力定位技术得到了进一步的发展, 动力定位船舶的状态估计问题也引起了越来越多的关注<sup>[1-2]</sup>.

目前的状态估计方法主要是基于贝叶斯理论求解系统的状态预测值和协方差预测值, 通过后验概率密度函数得到递推贝叶斯估计算法<sup>[3]</sup>. 并且通常假设系

统的过程噪声和观测噪声是高斯无关白噪声过程, 如果后验概率密度函数满足高斯分布, 那么由贝叶斯估计可以得到高斯滤波算法<sup>[4]</sup>. 如果系统状态转移矩阵和观测矩阵为线性确定矩阵, 那么贝叶斯估计可化简成为线性卡尔曼滤波器(linear Kalman filter, LKF)算法<sup>[5]</sup>. 如果状态转移矩阵或观测矩阵是非线性的, 那么, 贝叶斯估计中的状态预测值和协方差预测值不容易通过直接求积分的方法得到, 对于这类非线性问题, 通常有两种处理方法: 一是将非线性在状态 $x$ 处进行局部线性化, 然后基于线性卡尔曼滤波框架, 得到扩

收稿日期: 2015-10-28; 录用日期: 2016-06-12.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: jiaoyuzhao@hrbeu.edu.cn; Tel.: +86 13009809756.

本文责任编辑: 潘泉.

国家自然科学基金项目(51309062), 重大专项“深水铺管起重船及配套工程技术”(2011ZX05027-002)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (51309062) and National Technology Momentous Special Program of China (2011ZX05027-002).

展卡尔曼滤波(extended Kalman filter, EKF),但强非线性系统的局部线性化有时会引入较大的估计误差,导致线性化EKF无法收敛,这时通常会使用二阶扩展卡尔曼滤波(second order extended Kalman filter, SOEKF)算法<sup>[6]</sup>;二是采用无迹变换的方法<sup>[7]</sup>,通过空间的一系列矢量点加权逼近非线性积分,由此可得到无迹卡尔曼滤波(unscented Kalman filter, UKF),它与扩展卡尔曼滤波相比不需要计算雅可比(Jacobi)矩阵,且精度要高于前者,但计算较复杂.2009年,Arasaratnam提出了一种使用三阶球面径向基(spherical-radial)规则计算贝叶斯估计中的非线性积分的滤波方法,即容积卡尔曼滤波(cubature Kalman filter, CKF)算法,利用高斯加权积分的对称性质,将UKF积分规则中联立方程的个数由 $2n+1$ 减少到2个,同时为了确保协方差矩阵的对称性和半正定性,进一步提出了通过传递协方差矩阵平方根因子的平方根容积卡尔曼滤波(SCKF)<sup>[8]</sup>.这些算法由于计算量小估计精度高,已得到了广泛的应用.

然而,以上各种基于贝叶斯理论的估计方法,一般均假设系统过程噪声和观测噪声是不相关的,但是实际系统中的噪声往往又具有一定的相关性,因而,有必要进行相关噪声下的贝叶斯估计算法研究.文献[9]研究了系统概率密度函数满足高斯分布,且系统过程噪声和观测噪声具有一步互相关时的一种最小均方误差下的高斯近似递归滤波(GASF)算法.文献[10–11]提出了具有随机时滞和异步相关噪声下的非线性高斯滤波算法.与文献[9]一样,都是只考虑了噪声一步互相关的情况.文献[12]基于贝叶斯估计和三阶球面径向基规则提出了当贝叶斯估计过程噪声和观测噪声具有一步互相关时的容积卡尔曼滤波算法.文献[13]研究了有色观测噪声下的改进容积卡尔曼滤波算法.文献[14]讨论了观测噪声和过程噪声之间具有一步互相关性以及各组传感器观测噪声之间存在相关性两种情况下的各种非线性滤波算法及其在分布式融合中的应用,使得非线性相关噪声滤波理论得到进一步完善.针对相关噪声的贝叶斯估计,目前一般假设都是系统过程噪声和观测噪声具有一步互相关<sup>[9–10,12,14]</sup>,即仅考虑互相关矩阵,然而,实际中的噪声要比这复杂的多.文献[15]中已经指出,在目标跟踪系统中,过程噪声和观测噪声不仅仅是一步自相关的,同时过程噪声和观测噪声也是两步互相关的,基于此假设,提出了一步自相关和两步互相关噪声下的分布式加权线性Kalman滤波算法.实际中的状态估计问题一般又是非线性的,然而,针对非线性系统且具有一步自相关和两步互相关噪声的状态估计算法,就我们所知还没有出现过.因而本文的目标是基于这种相关噪声假设,提出一种具有一步自相关和两步互相关噪声下的非线性滤波算法.最后通过动力定位船舶非线性

状态估计验证了所提算法的有效性.

本文的结构如下:第2部分建立了动力定位船舶非线性系统模型;第3部分基于贝叶斯理论,推导出了相关噪声下的贝叶斯估计算法;第4部分基于三阶球面径向基规则计算贝叶斯估计中的非线性积分,对于相关噪声项,使用扩展卡尔曼滤波的思想计算系统雅可比(Jacobi)矩阵,从而得到具有一步自相关和两步互相关噪声的容积卡尔曼滤波算法(CKF–CCN);第5部分进行了船舶动力定位系统状态估计仿真实验,与标准平方根容积卡尔曼滤波(SCKF)和具有一步互相关噪声的平方根容积卡尔曼滤波(SCKF–CN)进行对比,仿真结果表明了所提算法具有更小的均方根估计误差.

## 2 模型描述(Model description)

本文针对动力定位船的位置和艏向估计,建立三自由度船舶运动方程<sup>[2]</sup>如下:

$$\begin{cases} \dot{x}' = u \cos \psi - v \sin \psi + \omega_1, \\ \dot{y}' = u \sin \psi + v \cos \psi + \omega_2, \\ \dot{\psi} = r + \omega_3, \\ \dot{u} = \omega_4, \\ \dot{v} = \omega_5, \\ \dot{r} = \omega_6, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x'$ 、 $y'$ 和 $\psi$ 分别表示船舶的北向位置,东向位置和艏向角; $u$ 、 $v$ 和 $r$ 分别表示船舶的北向速度,东向速度和艏摇率.为了研究在相关噪声下动力定位船非线性滤波算法,将式(1)所述的船舶动力定位模型写成状态空间的形式,如式(2):

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{x}_n + \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\omega}_n, \quad (2)$$

建立三自由度观测方程为

$$\mathbf{z}_n = h_n(\mathbf{x}_n) + \boldsymbol{\Xi} \mathbf{v}_n. \quad (3)$$

上述模型中:状态矢量 $\mathbf{x}_{n+1} = [x', y', \psi, u, v, r]$ , 矢量 $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 和 $\mathbf{0}_{3 \times 3}$ 分别表示三阶单位矩阵和三阶零矩阵,状态转移矩阵 $\mathbf{B}$ 为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} T \cos \psi_n & -T \sin \psi_n & 0 \\ T \sin \psi_n & T \cos \psi_n & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix},$$

$T$ 为采样周期. $\boldsymbol{\omega}_n$ 为一步自相关过程噪声, $\mathbf{\Gamma}$ 表示状态过程噪声方差矩阵. $\mathbf{z}_n$ 为观测状态, $h_n$ 为状态观测函数, $\boldsymbol{\Xi}$ 表示系统观测噪声方差矩阵, $\mathbf{v}_n$ 表示传感器观测噪声,并且观测噪声与过程噪声具有两步互相关性.为了研究相关噪声下的非线性滤波算法,可建立如下非线性离散系统模型:

$$\mathbf{x}_n = f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) + \mathbf{u}_n + \boldsymbol{\omega}_{n-1}, \quad (4)$$

$$\mathbf{z}_n = h_n(\mathbf{x}_n) + \mathbf{v}_n, \quad (5)$$

式中: $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ 是系统 $t_n$ 时刻的状态值,初始值 $\mathbf{x}_0$ 且

与噪声信号无关, 满足 $E[\mathbf{x}_0] = \boldsymbol{\mu}_0$ ,  $\mathbb{R}^n$ 表示 $n$ 维状态空间.  $\mathbf{P}_0$ 为初始状态协方差矩阵, 由下式计算 $\mathbf{P}_0 = E[(\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_0)^T]$ .  $f_{n-1}$ 是状态转移矩阵, 实现状态变量从 $t_{n-1}$ 到 $t_n$ 的状态转移.  $\mathbf{u}_n$ 是系统的控制输入向量.  $\mathbf{z}_n \in \mathbb{R}^m$ 是 $t_n$ 时刻的观测值,  $h_n$ 是观测矩阵,  $\boldsymbol{\omega}_n \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统的过程噪声和观测噪声, 且满足以下统计特性:

$$\begin{cases} E\{\boldsymbol{\omega}_n\} = \mathbf{0}, & E\{\mathbf{v}_n\} = \mathbf{0}, \\ E\{\boldsymbol{\omega}_t \boldsymbol{\omega}_m^T\} = \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\delta}_{t-m} + \mathbf{Q}(t, m)\boldsymbol{\delta}_{t-m+1} + \\ \quad \mathbf{Q}(t, m)\boldsymbol{\delta}_{t-m-1}, \\ E\{\mathbf{v}_t \mathbf{v}_m^T\} = \mathbf{R}(t)\boldsymbol{\delta}_{t-m} + \mathbf{R}(t, m)\boldsymbol{\delta}_{t-m+1} + \\ \quad \mathbf{R}(t, m)\boldsymbol{\delta}_{t-m-1}, \\ E\{\boldsymbol{\omega}_t \mathbf{v}_m^T\} = \mathbf{S}(t)\boldsymbol{\delta}_{t-m} + \mathbf{S}(t, m)\boldsymbol{\delta}_{t-m+1} + \\ \quad \mathbf{S}(t, m)\boldsymbol{\delta}_{t-m+2}, \end{cases} \quad (6)$$

其中: 符号 $E$ 表示求期望值, 符号 $T$ 表示矩阵的转置,  $\boldsymbol{\delta}_{t-m}$ 是Kronecker函数, 即满足

$$\boldsymbol{\delta}_{t-m} = \begin{cases} 0, & t \neq m, \\ 1, & t = m. \end{cases}$$

为了推导具有一步自相关和两步互相关噪声下的非线性滤波算法, 本文首先给出了如下的噪声假设:

**假设 1** 过程噪声 $\boldsymbol{\omega}_n \in \mathbb{R}^n$ 和观测噪声 $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ 是一步自相关和两步互相关的零均值高斯噪声, 即满足式(6). 其中 $\mathbf{Q}(t)$ 是过程噪声协方差矩阵,  $\mathbf{Q}(t, t-1) = \mathbf{Q}(t, t+1)$ 表示状态一步自相关协方差矩阵.  $\mathbf{R}(t)$ 是观测噪声协方差矩阵,  $\mathbf{R}(t, t-1) = \mathbf{R}(t, t+1)$ 表示观测噪声一步自相关协方差矩阵. 并且噪声协方差满足:  $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}^T(t)$ 和 $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}^T(t)$ , 且 $\mathbf{S}(t)$ 表示噪声 $\boldsymbol{\omega}_n$ 和 $\mathbf{v}_n$ 的互协方差矩阵,  $\mathbf{S}(t, t-1) = \mathbf{S}(t, t+1)$ 为一步互相关协方差矩阵,  $\mathbf{S}(t, t-2) = \mathbf{S}(t, t+2)$ 为两步互相关协方差矩阵.

本文目的就是在满足假设1的噪声环境下, 求系统(4)和(5)的递推贝叶斯估计算法.

### 3 相关噪声下的递推贝叶斯估计算法 (Recursive Bayesian estimation algorithm with correlated noise)

基于贝叶斯估计理论, 状态 $\mathbf{x}_n$ 的预测值是由时刻1到 $n-1$ 的所有观测值得到, 即

$$\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} = E[\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}] = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{x}_n P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n. \quad (7)$$

同理, 对于协方差矩阵, 可作如下运算:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n|n-1} &= E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})^T | \mathbf{z}_{1:n-1}] = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} (\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})^T \times \\ &P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{z}_{1:n} = \{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^n$ 表示从 $i=1$ 时刻到 $i=n$ 时刻的所有观测值序列. 如果系统过程噪声 $\boldsymbol{\omega}_n$ 和观测噪声 $\mathbf{v}_n$ 满足假设1, 即互相之间具有一步自相关和两步互相关, 那么, 可得到如下相关噪声下的递推贝叶斯估计算法, 它由状态矢量预测, 状态矢量更新和卡尔曼滤波器校正3部分组成:

a) 状态矢量预测为:

1) 状态预测:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) \times P(\mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{u}_n + \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \boldsymbol{\omega}_n P(\mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_{n-1}. \quad (9)$$

2) 状态协方差预测:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n|n-1}^{xx} &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} [f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) + \mathbf{u}_n - \\ &\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}][f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) + \mathbf{u}_n - \\ &\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}]^T P(\mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_{n-1} + \\ &\int_{\mathbb{R}^{n_x}} [f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) + \mathbf{u}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}] \times \\ &\boldsymbol{\omega}_n^T P(\mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_{n-1} + \\ &\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \boldsymbol{\omega}_n [f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) + \mathbf{u}_n - \\ &\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}]^T P(\mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_{n-1} + \\ &\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \boldsymbol{\omega}_n \boldsymbol{\omega}_n^T P(\mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_{n-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

b) 状态矢量更新:

1) 测量值预测:

$$\hat{\mathbf{z}}_{n|n-1} = E[\mathbf{z}_n | \mathbf{x}_n, \mathbf{z}_{1:n-1}] = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} h_n(\mathbf{x}_n) \times P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n + \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{v}_n P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n. \quad (11)$$

2) 新息协方差预测:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n|n-1}^{zz} &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} [h_n(\mathbf{x}_n) - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}] \times \\ &[h_n(\mathbf{x}_n) - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}]^T P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n + \\ &\int_{\mathbb{R}^{n_x}} [h_n(\mathbf{x}_n) - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}] \mathbf{v}_n^T \times \\ &P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n + \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{v}_n [h_n(\mathbf{x}_n) - \\ &\hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}]^T P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n + \\ &\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n. \end{aligned} \quad (12)$$

3) 互协方差预测:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n|n-1}^{xz} &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} [f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) + \mathbf{u}_n - \\ &\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}][h_n(\mathbf{x}_n) - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}]^T \times \\ &P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n + \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n \times x}} [f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) + \mathbf{u}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}] \times \mathbf{v}_n^T P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n + \int_{\mathbb{R}^{n \times x}} \boldsymbol{\omega}_n \times [h_n(\mathbf{x}_n) - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}]^T P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n + \int_{\mathbb{R}^{n \times x}} \boldsymbol{\omega}_n \mathbf{v}_n^T P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n. \quad (13)$$

c) 卡尔曼滤波校正更新方程:

卡尔曼滤波增益  $\mathbf{K}_n$  更新方程:

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_{n|n-1}^{xz} (\mathbf{P}_{n|n-1}^{zz})^{-1}. \quad (14)$$

状态估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{n|n}$  更新公式:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n|n} = \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} + \mathbf{K}_n (\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}). \quad (15)$$

估计误差协方差  $\mathbf{P}_{n|n}^{xx}$  更新公式:

$$\mathbf{P}_{n|n}^{xx} = \mathbf{P}_{n|n-1}^{xx} - \mathbf{K}_n \mathbf{P}_{n|n-1}^{zz} \mathbf{K}_n^T. \quad (16)$$

由式(7)–(8)的定义, 很容易得到式(9)–(13)成立, 由文献[5]提出的通过更新系统状态一阶和二阶预测矩的方法, 得到系统线性最小均方误差意义下的卡尔曼滤波更新式(14)–(16)成立. 式(9)–(16)即是具有相关噪声情况下的贝叶斯预测和更新公式. 若系统过程噪声  $\boldsymbol{\omega}_n$  和观测噪声  $\mathbf{v}_n$  是零均值且没有相关性, 则仅仅影响以上贝叶斯估计算法中的状态协方差预测式(10)、新息协方差预测式(12)和互协方差预测式(13), 其余公式不变, 仍然包括状态矢量预测, 状态矢量更新和卡尔曼滤波增益更新3部分, 3个协方差预测公式分别可简化为:

1) 状态协方差预测:

$$\mathbf{P}_{n|n-1}^{xx} = \int_{\mathbb{R}^{n \times x}} [f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) + \mathbf{u}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}] [f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) + \mathbf{u}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}]^T P(\mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{z}_{1:n-1}) \times d\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{Q}(t). \quad (17)$$

2) 新息协方差预测:

$$\mathbf{P}_{n|n-1}^{zz} = \int_{\mathbb{R}^{n \times x}} [h_n(\mathbf{x}_n) - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}] [h_n(\mathbf{x}_n) - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}]^T P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) \times d\mathbf{x}_n + \mathbf{R}(t). \quad (18)$$

3) 互协方差预测:

$$\mathbf{P}_{n|n-1}^{xz} = \int_{\mathbb{R}^{n \times x}} [f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) + \mathbf{u}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}] [h_n(\mathbf{x}_n) - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}]^T \times P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n, \quad (19)$$

其中  $\mathbf{Q}(t)$  和  $\mathbf{R}(t)$  分别是过程噪声协方差和观测噪声协方差, 由以下公式计算:

$$\mathbf{Q}(t) = \int_{\mathbb{R}^{n \times x}} \boldsymbol{\omega}_n \boldsymbol{\omega}_n^T P(\mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n, \quad (20)$$

$$\mathbf{R}(t) = \int_{\mathbb{R}^{n \times x}} \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n. \quad (21)$$

由以上公式可知, 当不存在相关噪声时, 式(10)–(13)分别退化为式(17)–(19), 此时即为独立高斯白噪声下的贝叶斯估计<sup>[3]</sup>算法.

#### 4 相关噪声下的非线性滤波算法(Nonlinear filtering algorithm with correlated noise)

在上述推导的贝叶斯估计算法中, 若状态转移矩阵是线性的, 即  $f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) = \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{x}_{n-1}$ ,  $h_n(\mathbf{x}_n) = \mathbf{H}_n \mathbf{x}_n$ , 其中  $\mathbf{F}_{n-1}$  和  $\mathbf{H}_n$  是已知的线性矩阵, 且概率密度函数满足高斯分布, 那么可得到线性卡尔曼滤波器. 然而实际中的系统一般都是非线性的, 因而贝叶斯估计问题就转化为如何精确的求解上述公式中的非线性积分问题. 由本文第1节的分析, 这里采用文献[8]中的球面径向基容积规则求解以上积分. 三阶球面容积规则计算高斯加权积分公式如下:

$$\mathbf{I}_N(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{x}; \mathbf{0}, \mathbf{I}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^M \mathbf{w}_i f(\boldsymbol{\xi}_i), \quad (22)$$

其中:  $\mathbf{N}(\mathbf{x}; \mathbf{0}, \mathbf{I})$  表示均值为  $\mathbf{0}$ , 方差为  $\mathbf{I}$  的高斯分布.  $\mathbf{w}_i = 1/M$ ,  $i = 1, 2, \dots, M = 2n$  是权值.

$$\boldsymbol{\xi}_i = \sqrt{\frac{M}{2}} [\mathbf{1}]_i,$$

$[\mathbf{1}]_i$  表示一组空间矢量点. 通过容积规则计算公式(9)–(13)可得到噪声相关的容积卡尔曼滤波(CKF-CCN)算法.

#### 4.1 相关噪声的容积卡尔曼滤波算法(Cubature Kalman filtering algorithm with cross-correlated noise)

结合以上容积准则, 可得到具有一步自相关和两步互相关的容积卡尔曼滤波算法(CKF-CCN), 它由时间更新和测量更新两部分组成:

a) 时间更新:

1) 状态协方差的平方根因子:

$$\mathbf{P}_{n-1|n-1}^{xx} = \mathbf{S}_{n-1|n-1} \mathbf{S}_{n-1|n-1}^T. \quad (23)$$

2) 产生初始容积点:

$$\boldsymbol{\chi}_{i,n-1|n-1} = \mathbf{S}_{n-1|n-1} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \quad i = 1, 2, \dots, M = 2n, \quad \boldsymbol{\xi}_i = \sqrt{\frac{M}{2}} [\mathbf{1}]_i. \quad (24)$$

3) 计算传播容积点:

$$\boldsymbol{\chi}_{i,n|n-1}^* = f(\boldsymbol{\chi}_{i,n-1|n-1}, \mathbf{u}_n). \quad (25)$$

4) 状态预测值:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\chi}_{i,n|n-1}^*. \quad (26)$$

5) 预测误差协方差:

$$\mathbf{P}_{n|n-1}^{xx} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\chi}_{i,n-1|n-1}^* \boldsymbol{\chi}_{i,n-1|n-1}^{*\top}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}^T + \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{Q}(n-1, n) + [\mathbf{F}_{n-1} \mathbf{Q}(n-1, n)]^T + \mathbf{Q}(t). \quad (27)$$

b) 测量更新.

1) 计算估计误差协方差的平方根因子:

$$\mathbf{P}_{n|n-1}^{xx} = \mathbf{S}_{n|n-1} \mathbf{S}_{n|n-1}^T. \quad (28)$$

2) 计算初始容积点:

$$\boldsymbol{\chi}_{i,n|n-1} = \mathbf{S}_{n|n-1} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}. \quad (29)$$

3) 计算传播容积点:

$$\mathbf{Z}_{i,n|n-1} = h(\boldsymbol{\chi}_{i,n|n-1}). \quad (30)$$

4) 测量值的预测值为

$$\hat{z}_{n|n-1} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{Z}_{i,n|n-1}. \quad (31)$$

5) 新息协方差矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n|n-1}^{zz} = & \mathbb{E}[(z_n - \hat{z}_{n|n-1})(z_n - \hat{z}_{n|n-1})^T | \mathbf{x}_n, \mathbf{z}_{1:n-1}] = \\ & \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{Z}_{i,n|n-1} \mathbf{Z}_{i,n|n-1}^T - \hat{z}_{n|n-1} \hat{z}_{n|n-1}^T + \\ & \mathbf{R}(t) + \mathbf{H}_n [\mathbf{F}_{n-1} \mathbf{F}_{n-2} \mathbf{S}(n-2, n) + \\ & \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{S}(n-1, n) + \mathbf{S}(n, n)] + \\ & \{ \mathbf{H}_n [\mathbf{F}_{n-1} \mathbf{F}_{n-2} \mathbf{S}(n-2, n) + \\ & \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{S}(n-1, n) + \mathbf{S}(n, n)] \}^T. \end{aligned} \quad (32)$$

6) 互协方差矩阵估计值:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n|n-1}^{xz} = & \mathbb{E}[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})(z_n - \hat{z}_{n|n-1})^T | \mathbf{z}_{1:n-1}] = \\ & \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\chi}_{i,n|n-1} \mathbf{Z}_{i,n|n-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} \hat{z}_{n|n-1}^T + \\ & \mathbf{S}(n, n) + \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{S}(n-1, n) + \\ & \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{F}_{n-2} \mathbf{S}(n-2, n). \end{aligned} \quad (33)$$

证 基于容积卡尔曼滤波算法, 容易证明式(23)–(26)和式(28)–(31)成立, 这里只需要证明预测误差协方差矩阵(27), 新息协方差矩阵(32)和互协方差矩阵(33)成立即可.

当假设1成立, 即存在相关噪声时, 则影响预测误差协方差矩阵, 新息协方差矩阵和互协方差矩阵. 对于协方差更新式(10) (12)–(13)中的相关噪声引起的相关项, 即

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n \times x}} h_n(\mathbf{x}_n) \boldsymbol{\omega}_n^T P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n \\ & \int_{\mathbb{R}^{n \times x}} [h_n(\mathbf{x}_n)] \mathbf{v}_n^T P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n \\ & \int_{\mathbb{R}^{n \times x}} [f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1})] \boldsymbol{\omega}_n^T P(\mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_{n-1} \\ & \int_{\mathbb{R}^{n \times x}} [f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1})] \mathbf{v}_n^T P(\mathbf{x}_n | \mathbf{z}_{1:n-1}) d\mathbf{x}_n. \end{aligned} \quad (34)$$

当存在相关噪声时, 对于上述噪声引起的相关项, 采用扩展卡尔曼滤波局部近似线性化来进行计算. 可将非线性函数在状态 $\mathbf{x}_n$ 处进行泰勒展开, 并且仅保留一阶项, 由于噪声引起的相关项较小, 这里假定函数 $h_n(\mathbf{x}_n)$ 和 $f_n(\mathbf{x}_n)$ 线性部分以外是小量, 因而, 计算噪声引起的相关项时可作如下的近似:

$$h_n(\mathbf{x}_n) \approx \mathbf{H}_n \mathbf{x}_n, \quad f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) \approx \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{x}_{n-1},$$

其中 $\mathbf{H}_n, \mathbf{F}_n$ 称为Jacobi矩阵, 由下式计算:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n &= \left. \frac{\delta h(\mathbf{x}_n)}{\delta \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}}, \\ \mathbf{F}_n &= \left. \frac{\delta f(\mathbf{x}_n)}{\delta \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}}. \end{aligned}$$

同时, 由于过程噪声和观测噪声与状态变量估计值和预测估计值分别正交, 那么可得以下各式成立:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} \mathbf{v}_n^T] &= 0, \quad \mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} \boldsymbol{\omega}_{n-1}^T] = 0, \\ \mathbb{E}[\hat{z}_{n|n-1} \mathbf{v}_n^T] &= 0, \quad \mathbb{E}[\boldsymbol{\omega}_{n-1} \hat{z}_{n|n-1}^T] = 0. \end{aligned}$$

则式(10) (12)–(13)中由于噪声引起的相关项分别计算如下:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h_n(\mathbf{x}_n) \mathbf{v}_n^T] &= (\mathbb{E}[\mathbf{v}_n h_n^T(\mathbf{x}_n)])^T = \\ & \mathbf{H}_n \mathbb{E}[\mathbf{x}_n \mathbf{v}_n^T] = \mathbf{H}_n [\mathbf{F}_{n-1} \mathbf{F}_{n-2} \times \mathbf{S}(n-2, n) + \\ & \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{S}(n-1, n) + \mathbf{S}(n, n)], \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h_n(\mathbf{x}_n) \boldsymbol{\omega}_n^T] &= \mathbf{H}_n \mathbb{E}[\mathbf{x}_n \boldsymbol{\omega}_n^T] = \\ & \mathbf{H}_n \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{Q}(n-1, n) + \mathbf{H}_n \mathbf{Q}(n, n), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) \boldsymbol{\omega}_n^T] &= (\mathbb{E}[\boldsymbol{\omega}_n f_{n-1}^T(\mathbf{x}_{n-1})])^T = \\ & \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{Q}(n-1, n), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) \mathbf{v}_n^T] &= \\ & (\mathbb{E}[\mathbf{v}_n f_{n-1}^T(\mathbf{x}_{n-1})])^T = \mathbf{F}_{n-1} \mathbb{E}[\mathbf{x}_{n-1} \mathbf{v}_n^T] = \\ & \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{F}_{n-2} \times \mathbf{S}(n-2, n) + \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{S}(n-1, n). \end{aligned} \quad (38)$$

最后将以上各式分别代入式(10)(12)–(13)然后结合容积规则求积分方法, 则可得式(27)(32)–(33)成立.

证毕.

因而, 式(23)–(33)结合卡尔曼滤波校正式(14)–(16)即是互相关噪声下的容积卡尔曼滤波(CKF-CCN)算法. 该算法的流程伪代码说明如表1所示.

表 1 互相关噪声下容积卡尔曼滤波算法

Table 1 Cubature Kalman Filtering algorithm with cross-correlated noise

- |   |
|---|
| 1) 计算状态预测值 $\hat{\mathbf{x}}_{n n-1}$ : 式(23)–(26); |
| 2) 计算状态预测误差协方差 $\mathbf{P}_{n n-1}^{xx}$ : 式(27);   |
| 3) 计算测量值的预测值 $\hat{z}_{n n-1}$ : 式(28)–(31);        |
| 4) 计算新息协方差预测矩阵 $\mathbf{P}_{n n-1}^{zz}$ : 式(32);   |
| 5) 计算互协方差预测矩阵 $\mathbf{P}_{n n-1}^{xz}$ : 式(33);    |
| 6) Kalman校正更新方程: 式(14)–(16).                        |

## 4.2 一步互相关噪声下的平方根容积卡尔曼滤波(Square root cubature Kalman filtering with one-step cross-correlated noise)

在本节,通过与已经存在的容积卡尔曼滤波(CKF)算法,不考虑相关的平方根容积卡尔曼滤波(SCKF)算法和具有一步互相关的平方根容积卡尔曼滤波(SCKF-CN)算法进行对比,以此说明本文算法与已有算法的区别,并且在理论上分析了CKF-CCN的滤波精度较高的原因。

如果系统噪声是独立的高斯白噪声,即不存在噪声相关性,那么式(27)(32)–(33)可以简化为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n|n-1}^{xx} &= \\ E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})^T | \mathbf{z}_{1:n-1}] &= \\ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\chi}_{i,n-1|n-1}^* \boldsymbol{\chi}_{i,n-1|n-1}^{*\top} &= \\ \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}^T + \mathbf{Q}(t), & \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n|n-1}^{zz} &= \\ E[(\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1})(\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1})^T | \mathbf{z}_{1:n-1}] &= \\ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{Z}_{i,n-1|n-1} \mathbf{Z}_{i,n-1|n-1}^T &= \\ \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1} \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}^T + \mathbf{R}(t), & \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n|n-1}^{xz} &= \\ E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})(\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1})^T | \mathbf{z}_{1:n-1}] &= \\ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\chi}_{i,n|n-1} \mathbf{Z}_{i,n|n-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}^T. & \quad (41) \end{aligned}$$

从以上公式可知,当不考虑相关噪声时,本文的具有一步自相关和两步互相关的容积卡尔曼滤波算法等效为的独立高斯白噪声下的容积卡尔曼滤波算法(CKF)<sup>[8]</sup>。

平方根容积卡尔曼滤波算法(SCKF)是CKF的推广形式,本质上与CKF具有相似的过程,但在状态递推过程中不使用协方差,而是使用预测和后验误差协方差的平方根因子,这样就可以保证协方差的对称性和正定性,同时具有二阶精度<sup>[8,16]</sup>,与CKF相比SCKF的精度进一步提高,表2给出了SCKF算法伪代码。

表2 平方根容积卡尔曼滤波算法

Table 2 Square root cubature Kalman filtering

- 1) 计算状态预测值;
- 2) 计算预测误差协方差的平方根因子;
- 3) 计算测量值的预测值;
- 4) 计算新息协方差矩阵的平方根因子;
- 5) 估计互协方差矩阵值;
- 6) 计算Kalman增益矩阵;
- 7) 计算状态估计值更新;
- 8) 计算下一时刻估计误差协方差平方根因子。

当观测噪声和过程噪声是一步互相关时,那么表2步骤4)中的新息协方差矩阵的平方根因子的计算形式将会改变,此时新息协方差矩阵变为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n|n-1}^{zz} &= \\ E[(\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1})(\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1})^T | \mathbf{x}_n, \mathbf{z}_{1:n-1}] &= \\ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{Z}_{i,n-1|n-1} \times \mathbf{Z}_{i,n-1|n-1}^T &= \\ \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1} \hat{\mathbf{z}}_{n|n-1}^T + \mathbf{R}(t) + \mathbf{H}_n \mathbf{S}(n, n) + & \\ [\mathbf{H}_n \mathbf{S}(n, n)]^T. & \quad (42) \end{aligned}$$

进一步可得到一步互相关噪声下的平方根容积卡尔曼滤波算法,详细的推导过程可参考文献[14]。

综上所述,基于相关噪声下的贝叶斯估计算法,通过结合容积卡尔曼滤波和扩展卡尔曼滤波方法得到了具有一步自相关和两步互相关下的容积卡尔曼滤波(CKF-CCN)算法,且当系统噪声不相关时,上述算法退化为通常的容积卡尔曼滤波(CKF)算法。如果在递推过程中传递的是协方差的平方根因子,那么可得平方根容积卡尔曼滤波(SCKF)算法。如果过程噪声和观测噪声只有一步互相关时,可得具有一步互相关的平方根容积卡尔曼滤波(SCKF-CN)算法。

通过对比以上协方差计算式(27)(32)–(33)和不考虑相关噪声下的式(39)–(41)以及仅考虑一步互相关下的式(42)可知,由于本文算法综合考虑了假设1中存在的一步自相关和两步互相关噪声的影响,使得滤波精度能够得到进一步提高。而SCKF算法忽略了这些相关项(34),SCKF-CN仅考虑一步互相关的影响(42),因而与这两种滤波算法相比,本文的CKF-CCN算法的具有更高的估计精度。在下一章节通过动力定位船状态估计仿真实验说明了本文提出的CKF-CCN算法的有效性。

## 5 数值仿真(Numerical simulations)

对于系统(2)和(3)所描述的三自由度船舶运动方程,船舶在运动过程中由于受到风、浪、流的影响,因而必然会存在过程噪声,同时由于传感器受环境影响,因而又会存在一定的观测噪声。本文仿真条件中,采样周期为 $T = 1$  s;  $\boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\omega}_n$ 构成系统过程噪声,为了构造一步相关噪声,令 $\boldsymbol{\omega}_n$ 为零均值,方差为1的高斯一步自相关噪声。而 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是由每一个过程值的过程噪声方差组成的对角线矩阵,即

$$\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}\{\text{var}_1, \text{var}_2, \text{var}_3, \text{var}_4, \text{var}_5, \text{var}_6\}.$$

本文中对于船舶的状态变量,设置过程噪声方差

$$\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}\{10, 10, 10, 2, 2, 2\};$$

令 $\mathbf{v}_n$ 是均值为0,方差为1的高斯一步自相关噪声,且 $\mathbf{v}_n = c \boldsymbol{\omega}_{n-1}$ ,  $c = 0.8$ ,则观测噪声和过程噪声具有互相关性。且 $\boldsymbol{\Xi} \mathbf{v}_n$ 表示系统观测噪声。而 $\boldsymbol{\Xi}$ 是由每一个

观测值的观测噪声方差组成的对角线矩阵, 即

$$\Xi = \text{diag}\{\text{var}'_1, \text{var}'_2, \text{var}'_3, \text{var}'_4, \text{var}'_5, \text{var}'_6\}.$$

对于船舶的位置和速度观测值, 设置观测噪声方差为  $\Xi = \text{diag}\{2, 2, 2, 2, 2, 2\}$ ; 船舶状态初始值为  $\mathbf{x}_0 = [10, 20, 10, 1, 1.5, 0.1]$ , 初始误差协方差  $\mathbf{P}_0 = [1, 1, 1, 1.5, 1.5, 0.5]$ .

本文使用均方根误差来衡量算法估计性能的优劣, 均方根误差的定义如下:

$$\text{RMSE} : \tilde{\mathbf{x}}_{n|n}^i = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\tilde{\mathbf{x}}_{n|n}^i(j)]^2}, \quad (43)$$

其中:  $j$  表示仿真次数,  $\tilde{\mathbf{x}}_{n|n}^i(j)$  表示第  $i$  个状态变量在第  $j$  次仿真中第  $n$  步的估计误差,  $\tilde{\mathbf{x}}_{n|n}^i$  表示状态变量  $i$  在第  $n$  步的均方根误差.

为了对比说明本文所提算法的有效性, 记不考虑相关性的平方根容积卡尔曼滤波(SCKF)为算法1; 文献[14]中考虑相关的平方根容积卡尔曼滤波(SCKF-CN)为算法2; 考虑一步自相关和两步互相关的容积卡尔曼滤波(CKF-CCN)为算法3; 进行200次蒙特卡罗(Monte Carlo)仿真对比实验.

图1-3分别为3种算法下的船舶北向位置估计, 东向位置估计和艏向位置估计的均方根误差. 图4-6分别为3种算法下的船舶北向速度估计, 东向速度估计和艏向角速度估计的均方根误差.

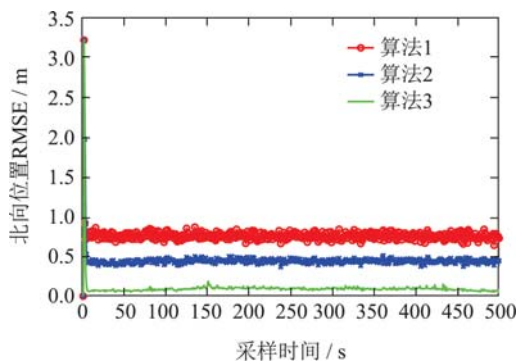


图 1 北向位置估计均方根误差  
Fig. 1 RMSE of north position estimation

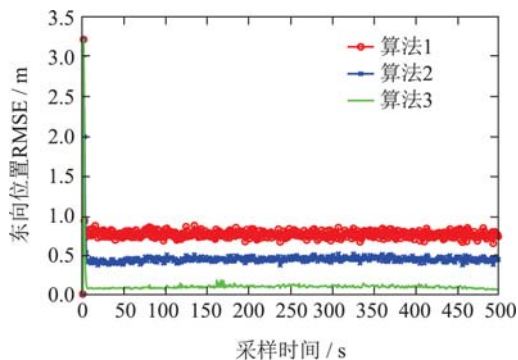


图 2 东向位置估计均方根误差  
Fig. 2 RMSE of east position estimation

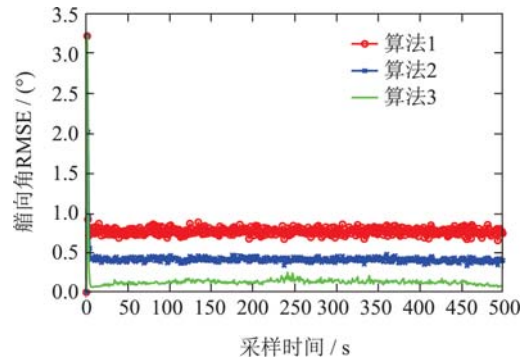


图 3 艏向位置估计均方根误差  
Fig. 3 RMSE of heading position estimation

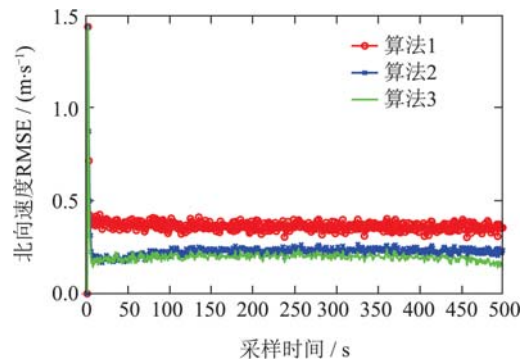


图 4 北向速度估计均方根误差  
Fig. 4 RMSE of north velocity estimation

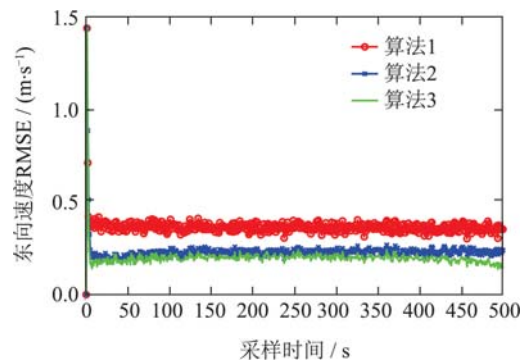


图 5 东向速度估计均方根误差  
Fig. 5 RMSE of east velocity estimation

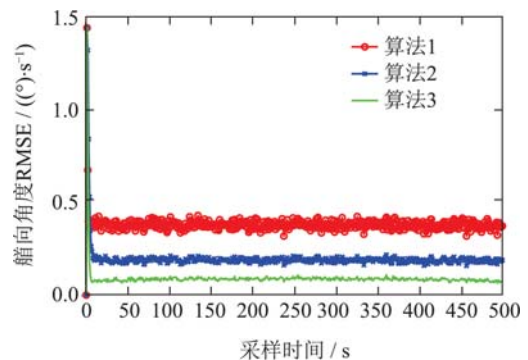


图 6 艏向角速度估计均方根误差  
Fig. 6 RMSE of heading velocity estimation



从图1-6可以看出,在动力定位船状态估计中,对于船舶的北/东位置,艏向,北/东向速度和艏向角速度,算法1, 2, 3分别具有不同的均方根误差.表3给出了3种算法对应的均方根误差的平均值,从表3中可以看出,对于3自由度船舶的6个状态变量的均方根误差的平均值,算法1, 2, 3依次降低,即估计精度依次提高,说明了本文估计算法具有较高的估计精度.

表3 3种算法的RMSE均值

Table 3 RMSE mean of three algorithms

	算法1RMSE	算法2RMSE	算法3RMSE
$x'$	0.7582	0.4473	0.0965
$y'$	0.7587	0.4469	0.0977
$\psi'$	0.7676	0.4185	0.1335
$u$	0.3652	0.2291	0.1984
$v$	0.3644	0.2312	0.1980
$r$	0.3787	0.1946	0.0889

综上,当系统存在一步自相关和两步互相关时,本文的考虑相关噪声的CKF-CNN算法具有较高的估计精度.是由于同时考虑了一步自相关和两步互相关噪声的影响,因而均方根误差最小.当无相关噪声存在时CKF-CNN算法和SCKF-CN算法,可分别简化为通常的CKF与SCKF算法.同时,由于算法1(SCKF)未考虑相关噪声的影响,因而,均方根估计误差最大.而文献[14]中提出的一步互相关下的平方根容积卡尔曼滤波算法2(SCKF-CN),由于考虑了一步互相关噪声的影响,因而,其均方根误差小于算法1,但由于未考虑二步互相关和一步自相关的影响,因而其均方根误差又大于本文提出的算法3.

## 6 结论(Conclusions)

本文首先基于贝叶斯估计框架推导出具有一步自相关和两步互相关噪声的贝叶斯估计算法,进而结合容积规则由以上贝叶斯估计公式得到容积卡尔曼滤波(CKF)算法和具有相关噪声的容积卡尔曼滤波算法(CKF-CNN).然后与CKF的平方根形式SCKF,相关噪声下的SCKF-CN进行对比,进一步说明了本文算法和已有算法的区别和联系.最后针对船舶动力定位系统,对无相关噪声下的SCKF,以及一步互相关噪声下的SCKF-CN和本文的CKF-CNN算法进行了仿真对比,结果表明提出的相关噪声下的CKF-CNN算法具有较高的估计精度.原因是SCKF-CN算法仅考虑一步互相关,但未考虑一步自相关和两步互相关.因而其估计精度较本文的CKF-CNN算法要低一些,然而又比不考虑任何相关的SCKF算法高一些,仿真结果与上面的理论分析相一致.

## 参考文献(References):

[1] FOSSEN T I. *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control* [M]. Norway: John Wiley, 2012: 241 - 278.

- [2] XU Shusheng, LIN Xiaogong. Strong tracking SRCKF and its application in vessel dynamic positioning [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2013, 34(6): 1266 - 1272.  
(徐树生, 林孝工. 强跟踪SRCKF及其在船舶动力定位中的应用 [J]. 仪器仪表学报, 2013, 34(6): 1266 - 1272.)
- [3] ANTON J H. *Bayesian Estimation and Tracking: A Practical Guide* [M]. New Jersey: John Wiley, 2012: 33 - 43.
- [4] ITO K, XIONG K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(5): 910 - 927.
- [5] KALMAN R E. A new approach to linear filtering and prediction problems [J]. *Journal of Basic Engineering Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 2015, 82D(1): 35 - 45.
- [6] MAHALANABIS A K, FAROOQ M. A second-order method for state estimation of non-linear dynamical systems [J]. *International Journal of Control*, 1971, 14(4): 631 - 639.
- [7] JULIER S J, UHLMANN J K, DURRANT-WHYTE H F. A new approach for filtering nonlinear systems [C] // *American Control Conference*. New York: IEEE, 1995, 3: 1628 - 1632.
- [8] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman filters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1254 - 1269.
- [9] WANG X X, LIANG Y, PAN Q, et al. A gaussian approximation recursive filter for nonlinear systems with correlated noises [J]. *Automatica*, 2012, 48(6): 2290 - 2297.
- [10] YU Han. Improved Gaussian filter algorithm for nonlinear system with random delay and asynchronously correlated noises [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2015, 23(2): 238 - 247.  
(于涵. 有随机时滞和异步相关噪声的非线性系统的高斯滤波器设计 [J]. 中国惯性技术学报, 2015, 23(2): 238 - 247.)
- [11] YU Han, ZHANG Xiujie. An improved Gaussian filter with randomly delayed measurements and synchronously correlated noises [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(2): 133 - 145.  
(于涵, 张秀杰. 考虑随机量测时滞和同步相关噪声的改进高斯滤波算法 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(2): 133 - 145.)
- [12] QIAN Huaming, GE Le, HUANG Wei, et al. Design of CKF with correlative noises based on Bayesian estimation [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2012, 34(11): 2214 - 2218.  
(钱华明, 葛磊, 黄蔚, 等. 基于贝叶斯估计噪声相关下的CKF设计 [J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(11): 2214 - 2218.)
- [13] WANG Sisi, QI Guoqing. Improved cubature Kalman filters with colored measurement noise [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(1): 1 - 10.  
(王思思, 齐国清. 有色量测噪声下的改进求容积卡尔曼滤波器 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(1): 1 - 10.)
- [14] GE Q, XU D, WEN C. Cubature information filters with correlated noises and their applications in decentralized fusion [J]. *Signal Processing*, 2014, 94(1): 434 - 444.
- [15] FENG J, WANG Z, ZENG M. Distributed weighted robust Kalman filter fusion for uncertain systems with autocorrelated and cross-correlated noises [J]. *Information Fusion*, 2013, 14(1): 78 - 86.
- [16] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Square-root quadrature Kalman filtering [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(6): 2589 - 2593.

## 作者简介:

林孝工 (1962-), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为检测技术与自动化装置, E-mail: linxiaogong@hrbeu.edu.cn;

焦玉召 (1990-), 男, 博士研究生, 研究方向为控制理论与控制工程、非线性滤波和多传感器信息融合, E-mail: jiaoyuzhao@hrbeu.edu.cn;

梁坤 (1988-), 男, 博士研究生, 研究方向为控制理论与控制工程、模糊时滞系统控制理论, E-mail: drliangkun@126.com;

李恒 (1991-), 男, 博士研究生, 研究方向为控制理论与控制工程、切换控制理论, E-mail: this\_li@hrbeu.edu.cn.