第 33 卷第 5 期
2016 年 5 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 33 No. 5
May. 2016

DOI: 10.7641/CTA.2016.15016

模糊关系不等式$A \circ X \circ B \leqslant C$的解

范洪彪[1,2], 冯俊娥[1†], 孟 敏[1]

(1. 山东大学 数学学院, 山东 济南 250100; 2. 德州学院 数学科学学院, 山东 德州 253023)

摘要: 对于普通的矩阵乘积, 当一个方程或者不等式有解时, 有可能存在无数多个解, 而直接求解它们又是很困难的. 同样, 对于有限论域上采用最大–最小合成算子的模糊关系方程或者不等式也存在着类似的问题. 不幸的是, 研究此类问题的文献相对较少. 本文致力于研究模糊关系不等式$A \circ X \circ B \leqslant C$的一种新求解方法. 首先, 利用两个重要的公式, 将所考虑的模糊关系不等式转化成较简单的形式. 对于模糊关系不等式的可解性给出一个充分必要条件. 它表明模糊关系不等式$A \circ X \circ B \leqslant C$的解可以由有限个节点解来刻画. 然后, 利用矩阵的半张量积, 给出具体的求解算法. 最后, 介绍了具有模糊关系不等式限制的格化线性规划, 来说明本文所提出方法的有效性.

关键词: 模糊关系不等式; 全部解; 半张量积; 格化线性规划

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Solutions to fuzzy relation inequality $A \circ X \circ B \leqslant C$

FAN Hong-biao[1,2], FENG Jun-e[1†], MENG Min[1]

(1. School of Mathematics, Shandong University, Jinan Shandong 250100, China;
2. School of Mathematics Sciences, Dezhou University, Dezhou Shandong 253023, China)

Abstract: For traditional matrix product, there may exist infinite solutions, in a sense that some matrix equations or inequalities can be solved. Furthermore, it is very difficult to solve them directly. Similarly, for max-min composition in finite course, fuzzy relational equations or inequalities may also have the same trouble. Unfortunately, there are few papers referring to the problem. This paper devotes to deriving a new method of solving fuzzy relation inequality (FRI) in terms of $A \circ X \circ B \leqslant C$. First of all, two important formulas are proved. Then, the considered FRIs are converted into simplified ones taking use of the two transformations. While for solvability of FRIs, a necessary and sufficient condition is obtained. It illustrates that the solutions of considered FRIs can be depicted by finite ones. Via semi-tensor product (STP) of matrices, a concrete algorithm is derived. Finally, with FRIs constraints latticized linear programming is presented to demonstrate effectiveness of the proposed methods.

Key words: fuzzy relation inequalities; all solutions; semi-tensor product; latticized linear programming

1 引言(Introduction)

在描述某个目标变量时, 使用模糊量要比使用精确的量更加合适. 原因之一就是模糊量能包含更多的信息. 1965年, L. A. Zadeh首次提出了模糊概念[1]. 自此, 为了促进模糊理论的发展[2–5]及其应用[6–8], 又有很多相关学术著作相继发表. 模糊关系是模糊理论中的重要内容之一, 故而, 越来越多的学者致力于模糊关系的方程. 此外, 例如影像压缩[9]、医疗诊断[10]等诸多实际应用领域也与模糊关系方程密切相关. 因此, 很多求解模糊关系方程的算法被提出. 例如, 文献[11]研究了一系列相容模糊关系方程的解集, 该文献还指出此类模糊关系方程的全部解是由几个最小解和一个最大解所刻画的. 当然, 对于如何求解, 该文献提出了一种多项式时间算法. 文献[12]考虑了由最大–T模合成的区间值模糊关系方程, 并讨论了这类模糊关系方程的三类解. 值得一提的是文献[12]还涉及了一类模糊关系不等式的体系.

事实上, 模糊关系不等式也是模糊理论中至关重要的一部分内容. 因而, 从理论上说研究一系列模糊关系不等式的求解是很有意义的. 通过最大–最小模糊合成算子, 文献[13]定义了一个线性目标函数. 然后, 研究了具有多个模糊关系不等式限制的线性目标函数的最优化问题, 并提出一个关于此类问题的充分必要条件. 此外, 对于具有模糊关系不等式限制的最优化问题, 基于一个给定的最优化必要条件, 文献[14]提出了一种新方法. 这种全新的思路能明显地缩小研

收稿日期: 2015−01−22; 录用日期: 2016−01−29.
†通信作者. E-mail: fengjune@sdu.edu.cn; Tel.: +86 15966683065.
本文责任编委: 王玉振.
本文的部分内容发表在10th World Congress on Intelligent Control and Automation, Beijing, China, July 6-8, 2012.
国家自然科学基金项目(61374025)资助.
Supported by National Natural Science Foundation of China (61374025).

究范围. 有一种线性规划问题叫做格化线性规划问题, 它是一种定义在模糊格上的逻辑线性规划问题. 文献[15]便研究了其求解方法, 并给出数值算例来表明其求解步骤. 然而, 在现有的方法中, 很少能得出模糊关系不等式的全部解. 本文的主要工作就是提出一种能够得到模糊关系不等式整个解集的方法.

另一方面, 程代展教授提出了一种叫矩阵的半张量积(STP)的有用工具[16], 而且STP已被用于很多领域[17–21]. 基于矩阵的STP, 本文致力于推导出求解模糊关系不等式的一种新的代数求解方法, 且能得到整个解集. 事实上, 利用STP求解模糊关系方程的思想已经在文献[19]中被提出. 为方便阅读, 将在本文中简单介绍STP的概念.

本文剩余内容的框架如下: 第2节给出了一些预备知识和所研究问题的简单描述. 在第3节中, 运用代数的一些技巧, 将求解模糊关系不等式的问题转化为较简单的形式. 并进一步揭示一般解与节点解之间的关系, 它表明有限个节点解是足以刻画全体解集的. 第4节介绍了模糊关系不等式在模糊规划中的应用. 此外, 本节还给出了一个具体的数值算例来说明本文所提方法的有效性. 最后, 第5节是对本文的一个简单概括.

记号: $\mathcal{D}_k$代表集合$\{0,\dfrac{1}{k-1},\dfrac{2}{k-1},\cdots,\dfrac{k-2}{k-1},1\}$ $(k\geqslant 2)$; $\mathcal{D}_\infty\triangleq\{a|0\leqslant a\leqslant 1\}$且$\mathcal{D}^k_{m\times n}$是元素都在集合$\mathcal{D}_k$中的$m\times n$阶矩阵的集合; $\mathcal{D}^\infty_{m\times n}$是元素均属于集合$\mathcal{D}_\infty$的$m\times n$阶矩阵的集合; $\mathcal{F}(U\times V)$表示定义在$U\times V$上的模糊关系集合; $\mathcal{M}_{m\times n}$是$m\times n$阶的实矩阵集; 单位矩阵 I_n 的第 i 列被记为 δ^i_n, 并且 $\varDelta_n:=\{\delta^i_n|i=1,\cdots,n\}$; 若一个矩阵$L\in\mathcal{M}_{n\times r}$的形式为$L=[\delta^{i_1}_n\ \delta^{i_2}_n\ \cdots\ \delta^{i_r}_n]$, 则称矩阵$L$为逻辑矩阵, 简记为$L=\delta_n[i_1\ i_2\ \cdots\ i_r]$; $n\times r$ 阶逻辑矩阵集记为$\mathcal{L}_{n\times r}$; $V_{\rm c}(A)$表示矩阵A的列展开形式; $V_{\rm r}(A)$表示矩阵A的行展开形式.

2　预备知识(Preliminaries)

在本节中, 将介绍一些必要的预备知识和所要研究的模糊关系不等式. 整篇文章中, 仅考虑有限论域上的情形, 且假设

$$U=\{u_1,\cdots,u_m\},\ V=\{\nu_1,\cdots,\nu_n\},$$
$$W=\{\omega_1,\cdots,\omega_q\},\ H=\{h_1,\cdots,h_p\}.$$

此外, 如果令$R\in\mathcal{F}(U\times V)$, 那么为方便叙述, 仍然用$R$来表示相应的模糊关系矩阵. 为了描述所要考虑的问题, 首先给出如下常用于比较矩阵大小的定义.

定义 1[19]　设$A=(a_{i,j}),\ B=(b_{i,j})\in\mathcal{D}^\infty_{m\times n}$. 如果$a_{i,j}\geqslant b_{i,j}, i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n$, 则称$A\geqslant B$. 进而, 如果$A\geqslant B$且$A\neq B$, 则称$A>B$.

从以上定义, 容易得到下面的结论.

引理 1[19]　设$A,B\in\mathcal{D}^\infty_{m\times n}$且$C,D\in\mathcal{D}^\infty_{n\times p}$. 若$A\geqslant B,\ C\geqslant D$, 那么

$$A\circ C\geqslant B\circ D,$$

其中符号“$\circ$” 表示布尔乘积[19].

现在, 可以介绍本文所要考虑的问题了. 假设已知$A\in\mathcal{F}(U\times V),\ B\in\mathcal{F}(H\times W),\ C\in\mathcal{F}(U\times W)$. 笔者希望找到一个模糊关系$X\in\mathcal{F}(V\times H)$, 使其满足模糊关系不等式

$$A\circ X\circ B\leqslant C.\tag{1}$$

本文的目的就是推导出一种能够得到模糊关系不等式(1)的所有解的代数方法. 除了矩阵的STP外, 本文的思想还涉及到多值逻辑的向量表达[18]. 为方便读者, 下面, 给出STP的一些性质. 首先, 回顾一下STP的定义.

定 义 2[16]　设$A\in\mathcal{M}_{m\times n}$且$B\in\mathcal{M}_{p\times q}$. n和p的最小公倍数记为$s={\rm lcm}(n,p)$. 那么矩阵A和矩阵B的STP定义为

$$A\ltimes B:=(A\otimes I_{\frac{s}{n}})(B\otimes I_{\frac{s}{p}}),$$

其中“$\otimes$”是矩阵的克罗内克积[22].

注 1　通常, 矩阵的STP被认为是普通矩阵乘积的扩展. 下文中若无异议, 将省略符号“$\ltimes$”.

在用代数形式表达逻辑关系时, 矩阵的STP起着非常重要的作用. 而在逻辑关系的代数表达中, 一个逻辑变量的向量表示是最简单的情形. 事实上, 设一个逻辑变量$x\in\mathcal{D}_k$, 可以将$\dfrac{i}{k-1}$与δ^{k-i}_k认为是等价的, 即$\dfrac{i}{\kappa-1}\sim\delta^{\kappa-i}_\kappa,\ i=0,1,\cdots,\kappa-1$. 如果仍用符符号$x$表示相应的代数形式, 那么有$x\in\varDelta_\kappa$, 这就是$x$的向量表达形式. 而对于一个逻辑函数的代数形式, 有下面的引理.

引理 2[18]　设f是一个r维κ–值的逻辑函数. 那么存在唯一一个逻辑矩阵$M_{\rm f}\in\mathcal{L}_{k\times k^r}$, 使得逻辑函数$f$的向量表达形式为

$$f(x_1,\cdots,x_r)=M_{\rm f}\ltimes x_1\ltimes\cdots\ltimes x_r.\tag{2}$$

等式(2)被称为逻辑函数f的代数形式. 矩阵$M_{\rm f}$称为逻辑函数f的结构矩阵, 关于如何得到结构矩阵$M_{\rm f}$, 读者可参考文献[18]. 注意到等式(2)左边的$x_i(1\leqslant i\leqslant r)$是逻辑变量, 而等式的右边则是相应的向量形式. 在整篇文章中, 对于逻辑变量和其向量表达, 采用相同的符号.

交换矩阵是STP理论中最为常见的矩阵之一, 它满足$W_{[p,q]}\ltimes x\ltimes y=y\ltimes x,\ x\in\varDelta_p,\ y\in\varDelta_q$, 其中$W_{[p,q]}$ 表示相关的交换矩阵. 关于交换矩阵的详细描述, 读者可参考文献[23]. 在本文中, 除了矩阵的 STP外, 以“$*$”所标记的矩阵的Khatri-Rao乘积[24]也将被

使用. 它的定义为

$$A * B = [\mathrm{Col}_1(A) \ltimes \mathrm{Col}_1(B), \mathrm{Col}_2(A) \ltimes \mathrm{Col}_2(B), \cdots, \mathrm{Col}_r(A) \ltimes \mathrm{Col}_r(B)],$$

其中: $A \in \mathcal{M}_{m\times r},\ B \in \mathcal{M}_{n\times r}$.

显然, 模糊关系不等式(1)的解是和模糊矩阵A, B, C相关的. 类似于文献[19], 挑选出模糊矩阵A, B, C中的不同元素, 可以构造一个集合Ω. 然后, 有序集Ξ就可以被定义为

$$\Xi = \{0 = \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_r = 1,\ \xi_i \in \Omega,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}, \tag{3}$$

其中r为集合Ω的元素个数. 需要注意的是, 如果集合Ω中不包含数字0或者1, 就将其加入到集合Ω中. 现在, 给出求解模糊关系不等式(1)所必需的两个映射.

定义 3[19] 设$x \in [0, 1]$. 定义

1) $\pi_* : [0, 1] \to \Xi$为

$$\pi_*(x) = \max_i\{\xi_i \in \Xi \mid \xi_i \leqslant x\};$$

2) $\pi^* : [0, 1] \to \Xi$为

$$\pi^*(x) = \min_i\{\xi_i \in \Xi \mid \xi_i \geqslant x\}.$$

注意到如果$x \leqslant y$, 那么$\pi_*(x) \leqslant \pi_*(y)$, $\pi^*(x) \leqslant \pi^*(y)$. 若将上述中的"$\leqslant$"换成"$\geqslant$", 那么叙述仍是正确的. 假设$r = [r_1\ r_2\ \cdots\ r_n] \in \mathcal{D}^{\infty}_{1\times n}$, 定义$r_* \triangleq \pi_*(r) = (\pi_*(r_j))_{1\times n}$, $r^* \triangleq \pi^*(r) = (\pi^*(r_j))_{1\times n}$. 由定义, 易得以上两个映射的如下所示的一些性质:

性质 1 设$0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$且$0 \leqslant x_i,\ y_i \leqslant 1 (1 \leqslant i \leqslant n)$, 则

1) $\pi_*(x) \wedge \pi_*(y) = \pi_*(x \wedge y)$,
$\pi^*(x) \wedge \pi^*(y) = \pi^*(x \wedge y)$;

2) $\pi_*(x) \vee \pi_*(y) = \pi_*(x \vee y)$,
$\pi^*(x) \vee \pi^*(y) = \pi^*(x \vee y)$;

3) $[\pi_*(x_1) \wedge \pi_*(y_1)] \vee [\pi_*(x_2) \wedge \pi_*(y_2)] = \pi_*[(x_1 \wedge y_1) \vee (x_2 \wedge y_2)]$;

4) $[\pi^*(x_1) \wedge \pi^*(y_1)] \vee [\pi^*(x_2) \wedge \pi^*(y_2)] = \pi^*[(x_1 \wedge y_1) \vee (x_2 \wedge y_2)]$;

5) $\bigvee\limits_{i=1}^{n}[\pi_*(x_i) \wedge \pi_*(y_i)] = \pi_*[\bigvee\limits_{i=1}^{n}(x_i \wedge y_i)]$;

6) $\bigvee\limits_{i=1}^{n}[\pi^*(x_i) \wedge \pi^*(y_i)] = \pi^*[\bigvee\limits_{i=1}^{n}(x_i \wedge y_i)]$.

那么, 由性质1便可得到下面的性质:

性质 2 假设矩阵$A \in \mathcal{D}^{\infty}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{D}^{\infty}_{n\times p}$, 那么

$$\pi_*(A \circ B) = \pi_*(A) \circ \pi_*(B),$$
$$\pi^*(A \circ B) = \pi^*(A) \circ \pi^*(B).$$

3 主要结果(Main results)

基于矩阵的STP, 本节将研究模糊关系不等式(1)的解集. 为简化问题, 先将模糊关系不等式(1)转化为较简单的形式, 再讨论其可解性和求解方法.

3.1 模糊关系不等式的可解性(Solvability of FRIs)

本小节将讨论模糊关系不等式(1)的可解性. 为此, 需要推导出模糊关系不等式(1)的等价形式. 而在此之前, 先介绍一种算子.

定义 4[16] 设$\alpha \in [0, 1]$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{D}^{\infty}_{m\times n}$, $B = (b_{th}) \in \mathcal{D}^{\infty}_{p\times q}$. 定义

$$\alpha \otimes_{\mathcal{B}} A = (\alpha \wedge a_{ij}) \in \mathcal{D}^{\infty}_{m\times n},$$
$$A \otimes_{\mathcal{B}} B = (a_{ij} \otimes_{\mathcal{B}} B) \in \mathcal{D}^{\infty}_{mp\times nq}.$$

利用定义4, 便可证明出下面的公式, 它对于变换模糊关系不等式(1)起着重要作用.

引理 3 设$A \in \mathcal{D}^{\infty}_{m\times n}, B \in \mathcal{D}^{\infty}_{p\times q}$, 那么

$$(B^{\mathrm{T}} \otimes_{\mathcal{B}} I_m) \circ (I_p \otimes_{\mathcal{B}} A) = B^{\mathrm{T}} \otimes_{\mathcal{B}} A. \tag{4}$$

证 设$A = (a_{ij}) \in \mathcal{D}^{\infty}_{m\times n}$, $B = (b_{th}) \in \mathcal{D}^{\infty}_{p\times q}$, 那么由定义4有

$$B^{\mathrm{T}} \otimes_{\mathcal{B}} I_m = \begin{bmatrix} b_{11} \otimes_{\mathcal{B}} I_m \cdots b_{p1} \otimes_{\mathcal{B}} I_m \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_{1q} \otimes_{\mathcal{B}} I_m \cdots b_{pq} \otimes_{\mathcal{B}} I_m \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}
b_{11} & 0 & \cdots & 0 & & b_{p1} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_{11} & \cdots & 0 & & 0 & b_{p1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & b_{11} & & 0 & 0 & \cdots & b_{p1} \\
 & \vdots & & & & & \vdots & & \\
b_{1q} & 0 & \cdots & 0 & & b_{pq} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_{1q} & \cdots & 0 & & 0 & b_{pq} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & b_{1q} & & 0 & 0 & \cdots & b_{pq}
\end{bmatrix}.$$

同理, 还可得到

$$I_p \otimes_{\mathcal{B}} A = \begin{bmatrix} A & \cdots & \mathbf{0}_{m\times n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{m\times n} & \cdots & A \end{bmatrix}.$$

通过直接计算, 就可以知道

$$(B^{\mathrm{T}} \otimes_{\mathcal{B}} I_m) \circ (I_p \otimes_{\mathcal{B}} A) = \begin{bmatrix} b_{11} \otimes_{\mathcal{B}} A \cdots b_{p1} \otimes_{\mathcal{B}} A \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_{1q} \otimes_{\mathcal{B}} A \cdots b_{pq} \otimes_{\mathcal{B}} A \end{bmatrix} = B^{\mathrm{T}} \otimes_{\mathcal{B}} A.$$

综上所述, 等式(4)是正确的.

为了得到模糊关系不等式(1)的等价转换形式, 除了引理3之外, 还需要证明另外一个重要的公式, 也就是下面引理所述内容.

引理 4　设$A\in\mathcal{D}^{\infty}_{m\times n}, X\in\mathcal{D}^{\infty}_{n\times p}, B\in\mathcal{D}^{\infty}_{p\times q}$, 那么

$$V_{\rm c}(A\circ X\circ B)=(B^{\rm T}\otimes_{\mathcal{B}}A)\circ V_{\rm c}(X). \tag{5}$$

证　由$X=[{\rm Col}_1(X)\ \cdots\ {\rm Col}_p(X)]$容易推导出

$$\begin{aligned}&V_{\rm c}(A\circ X)=\\&V_{\rm c}(A\circ{\rm Col}_1(X)\cdots A\circ{\rm Col}_p(X))=\\&\begin{bmatrix}A\circ{\rm Col}_1(X)\\ \vdots\\ A\circ{\rm Col}_p(X)\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}A&&&\\&A&&\\&&\ddots&\\&&&A\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}{\rm Col}_1(X)\\{\rm Col}_2(X)\\ \vdots\\{\rm Col}_p(X)\end{bmatrix}=\\&(I_p\otimes_{\mathcal{B}}A)\circ V_{\rm c}(X).\end{aligned} \tag{6}$$

利用交换矩阵, 有

$$\begin{aligned}&V_{\rm c}(X\circ B)=V_r(B^{\rm T}\circ X^{\rm T})=\\&W_{[n,q]}\ltimes V_{\rm c}(B^{\rm T}\circ X^{\rm T})=\\&W_{[n,q]}\circ V_{\rm c}(B^{\rm T}\circ X^{\rm T})\overset{(6)}{=}\\&W_{[n,q]}\circ[(I_n\otimes_{\mathcal{B}}B^{\rm T})\circ V_{\rm c}(X^{\rm T})]=\\&W_{[n,q]}\circ[(I_n\otimes_{\mathcal{B}}B^{\rm T})\circ V_r(X)]=\\&W_{[n,q]}\circ(I_n\otimes_{\mathcal{B}}B^{\rm T})\circ[W_{[p,n]}\ltimes V_{\rm c}(X)]=\\&W_{[n,q]}\circ(I_n\otimes_{\mathcal{B}}B^{\rm T})\circ[W_{[p,n]}\circ V_{\rm c}(X)]=\\&W_{[n,q]}\circ(I_n\otimes_{\mathcal{B}}B^{\rm T})\circ W_{[p,n]}\circ V_{\rm c}(X)=\\&(B^{\rm T}\otimes_{\mathcal{B}}I_n)\circ V_{\rm c}(X),\end{aligned} \tag{7}$$

其中最后一个 "=" 运用了公式$W_{[n,q]}\circ(I_n\otimes_{\mathcal{B}}B^{\rm T})\circ W_{[p,n]}=B^{\rm T}\otimes_{\mathcal{B}}I_n$. 利用文献[18]中的技巧, 便可很容易得出这个公式. 因而在此省略其证明过程. 接下来, 利用上面所得等式, 可得

$$\begin{aligned}&V_{\rm c}(A\circ X\circ B)\overset{(7)}{=}\\&(B^{\rm T}\otimes_{\mathcal{B}}I_m)\circ V_{\rm c}(A\circ X)\overset{(6)}{=}\\&(B^{\rm T}\otimes_{\mathcal{B}}I_m)\circ(I_p\otimes_{\mathcal{B}}A)\circ V_{\rm c}(X)\overset{(4)}{=}\\&(B^{\rm T}\otimes_{\mathcal{B}}A)\circ V_{\rm c}(X).\end{aligned}$$

到此, 整个证明过程结束.

根据式(5), 模糊关系不等式(1)可以转化为

$$(B^{\rm T}\otimes_{\mathcal{B}}A)\circ V_{\rm c}(X)\leqslant V_{\rm c}(C). \tag{8}$$

那么, 求解模糊关系不等式(1)等价于求解模糊关系不等式(8), 它也可以表示为

$$D\circ z\leqslant b, \tag{9}$$

其中: $D=B^{\rm T}\otimes_{\mathcal{B}}A\in\mathcal{D}^{\infty}_{mq\times np}$, $z=V_{\rm c}(X)\in\mathcal{D}^{\infty}_{np\times 1}$, $b=V_{\rm c}(C)\in\mathcal{D}^{\infty}_{mq\times 1}$. 因此, 只需要考虑不等式(9)即可. 下面, 模糊关系不等式(9)的可解性将被研究.

使用定义3中的映射, 模糊关系不等式(9)的解的结构可由下面的定理来刻画.

定理 1　矩阵$r=(z_h)\in\mathcal{D}^{\infty}_{np\times 1}$是模糊关系不等式(9)的一个解, 当且仅当$r^*$也是模糊关系不等式(9)的一个解.

证　必要性. 根据假设, 矩阵r是模糊关系不等式(9)的一个解. 因此

$$D\circ r\leqslant b. \tag{10}$$

运用定义1和3, 由不等式(10)易得

$$\pi^*(D\circ r)\leqslant b^*. \tag{11}$$

根据性质2, 从不等式(11)可推导出

$$D^*\circ r^*\leqslant b^*. \tag{12}$$

注意到$D^*=D,\ b^*=b$. 故不等式(12)等价于

$$D\circ r^*\leqslant b.$$

上述不等式表明矩阵r^*也是模糊关系不等式(9)的一个解.

充分性. 因为$r\leqslant r^*$, 根据引理1, 知$D\circ r\leqslant D\circ r^*\leqslant b$. 因此, 结论是正确的.

注 2　关于定理1, 文献[25]给出了详细的证明过程. 与之相比, 本文所给出的证明过程更加简洁明了. 另一方面, 因为模糊关系不等式(1)和(9) 是相互等价的, 故模糊关系不等式(1)有解当且仅当模糊关系不等式(9)有解.

如果将模糊关系不等式(9)中 "$\leqslant$" 替换成 "$\geqslant$", 便可得到如下所示的结论.

定理 2　矩阵$r=(z_h)_{np\times 1}\in\mathcal{D}^{\infty}_{np\times 1}$是模糊关系不等式

$$D\circ z\geqslant b \tag{13}$$

的解, 当且仅当r_*是模糊关系不等式(13)的解.

注 3　定理2的证明与定理1类似, 故在此将其省略. 定理1和2分别展示了模糊关系不等式(9)和(13)的解结构. 而且, 对于模糊关系不等式(9)(或(1))的解集, 只需要知道所有的节点解(即定理1(或2)中所提及的r^*(或r_*))即可.

3.2　求解模糊关系不等式(Solving FRIs)

本小节将给出求解模糊关系不等式的具体算法, 进而得到整个解集. 通过定理1可知所有的节点解足以刻画整个解集, 故下面将研究如何得到所有的节点解. 为此, 设$\xi_i\sim\dfrac{i-1}{r-1}\sim\delta_r^{r+1-i}$, 那么$\varXi\sim\mathcal{D}^{\rm r}\sim\varDelta_r$.

接下来, 介绍一种求解模糊关系不等式(9)所需的偏序.

定义 5 如果$i \geqslant j$, 定义一种序 $\delta_r^i \preccurlyeq \delta_r^j$, 对应于 $\xi_{r+1-i} \leqslant \xi_{r+1-j}$.

明显地, 定义5中的序"$\preccurlyeq$"是一个偏序, 而且它具有如下所示的一些特殊性质.

引理 5 对于序"$\preccurlyeq$", 下面所述是成立的:

1) $\delta_r^i \preccurlyeq \delta_r^i$, 其中$i = 1, 2, \cdots, r$.

2) 若$\delta_r^i \preccurlyeq \delta_r^j$且$\delta_r^j \preccurlyeq \delta_r^i$, 则$\delta_r^i = \delta_r^j$, 其中$i, j = 1, 2, 3, \cdots, r$.

3) 若$\delta_r^i \preccurlyeq \delta_r^j$且$\delta_r^j \preccurlyeq \delta_r^k$, 则$\delta_r^i \preccurlyeq \delta_r^k$, 其中$i, j, k = 1, 2, \cdots, r$.

4) Δ_r满足佐恩引理[26]的条件.

5) 若$\delta_r^i \preccurlyeq \delta_r^j$且$\delta_r^h \preccurlyeq \delta_r^k$, 则$(\delta_r^i \ltimes \delta_r^h) \preccurlyeq (\delta_r^j \ltimes \delta_r^k)$, 其中$i, j, k, h = 1, 2, \cdots, r$.

假设$D = (d_{ij}) \in \mathcal{D}^{\infty}_{mq\times np}$, $z = (z_i) \in \mathcal{D}^{\infty}_{np\times 1}$, $b = (b_i) \in \mathcal{D}^{\infty}_{mq\times 1}$. 那么, 模糊关系不等式(9)等价于

$$\mathrm{Row}_i(D) \circ z \leqslant b_i, \tag{14}$$

其中$1 \leqslant i \leqslant mq$. 前面曾提到, 对于向量形式和对应的逻辑表达, 本文使用相同的符号. 对于不等式(14)(即模糊关系不等式(9)的第i个不等式)的左边(LHS), 相应的代数形式可以表示为

$$\begin{aligned}&\mathrm{LHS} = \\ &(M_{\mathrm{d}}^{\mathrm{r}})^{np-1}(M_{\mathrm{c}}^{\mathrm{r}} d_{i1} z_1) \cdots (M_{\mathrm{c}}^{\mathrm{r}} d_{i,np} z_{np}) = \\ &(M_{\mathrm{d}}^{\mathrm{r}})^{np-1}(M_{\mathrm{c}}^{\mathrm{r}} d_{i1}) \ltimes_{k=1}^{np-1} [I_{r^k} \otimes (M_{\mathrm{c}}^{\mathrm{r}} d_{j,k+1})] \\ &\ltimes_{t=1}^{np} z_t := L_i x,\end{aligned}$$

其中矩阵$M_{\mathrm{d}}^{\mathrm{r}}$和$M_{\mathrm{c}}^{\mathrm{r}}$分别是"$\vee$"和"$\wedge$"的结构矩阵. 而矩阵

$$\begin{aligned}&L_i = \\ &(M_{\mathrm{d}}^{\mathrm{r}})^{np-1}(M_{\mathrm{c}}^{\mathrm{r}} d_{i1}) \ltimes_{k=1}^{np-1} [I_{r^k} \otimes (M_{\mathrm{c}}^{\mathrm{r}} d_{j,k+1})] \in \\ &\mathcal{L}_{r\times r^{np}}, \\ &x = \ltimes_{t=1}^{n} z_t \in \Delta_{r^{np}}.\end{aligned}$$

那么, 可以将不等式(14)重写为

$$L_i \ltimes x \preccurlyeq b_i,\ i = 1, \cdots, mq. \tag{15}$$

将不等式(15)中mq个不等式的两边同时乘起来, 就可得到模糊关系不等式(9)的代数形式:

$$L \ltimes x \preccurlyeq \bar{b}, \tag{16}$$

其中

$$L = L_1 * L_2 * \cdots * L_{mq} \in \mathcal{L}_{r^{mq}\times r^{np}},$$

且$\bar{b} = \ltimes_{i=1}^{mq} b_i \in \Delta_{r^{mq}}$.

注意到, 矩阵L是一个逻辑矩阵, 且$\bar{b} \in \Delta_{r^{mq}}$, $x \in \Delta_{r^{np}}$, 故不等式(16)的可解性便可由下面的定理来刻画, 在定理中$\mathrm{Col}(L)$表示矩阵L的某一列.

定理 3 不等式(16)有解, 当且仅当$\bar{b} \succcurlyeq \mathrm{Col}(L)$.

令$\Lambda' = \{\lambda \mid \bar{b} \succcurlyeq \mathrm{Col}_{\lambda}(L)\}$. 根据定理3, 不等式(16)的节点解集为$\{x = \delta_{r^{np}}^{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda'\}$. 当然, 还要将所得到的$x$转化回相应的逻辑形式. 这样, 就得到模糊关系不等式(9)的全部节点解.

综上所述, 给出求解模糊关系不等式(9)的全部解的一个算法.

算法 1 下面的步骤用以确定模糊关系不等式(9)的整个解集.

1) 构造如式(3)所示的有序集Ξ, 并给出有序集Ξ中所有元素的向量形式;

2) 将不等式(14)中的每一个不等式转换成相应的代数表达式(15);

3) 将不等式(15)中mq个不等式的两边同时乘起来, 推导出不等式(16);

4) 求解不等式(16), 得到定理1中所述的所有节点解r^*;

5) 对于每一个节点解r^*, 找出所有相应的r, 也就得到了模糊关系不等式(9)的整个解集.

为了进一步说明算法1, 将在下一节中给出一个具体的算例. 类似于求解模糊关系不等式(9)的方法, 也可以考虑模糊关系不等式(13)的求解.

假设 1 模糊关系不等式(13)的代数形式为

$$L^1 \ltimes z \succcurlyeq b^1. \tag{17}$$

在此假设下, 容易推导出下面的结论.

推论 1 不等式(17)有解, 当且仅当

$$b^1 \preccurlyeq \mathrm{Col}(L^1).$$

注 4 对于如$D \circ z = b$所示的模糊关系方程, 文献[14]提出了一种有效的代数求解方法. 结合这种方法, 模糊关系不等式$D \circ z > b$和$D \circ z < b$的解集便可得到. 事实上, 仅需要分别从模糊关系不等式(13)和式(9)的解集中去除满足$D \circ z = b$的解即可.

4 应用(Applications)

本节中, 将介绍具有模糊关系不等式限制的格化线性规划, 并运用第3节中所述方法处理一个具体的数值算例. 为方便阅读, 首先给出格化线性规划的定义.

定义 6[27] 一个具有模糊不等式限制的格化线性规划问题被描述为

$$\begin{cases}\max f = C \circ X, \\ \text{s.t. } S \leqslant R \circ X \leqslant T,\end{cases} \tag{18}$$

其中:

$$R=(r_{ij})\in\mathcal{D}^{\infty}_{m\times n},$$
$$C^{\mathrm{T}}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}^{\infty}_{n\times 1},$$
$$S=(s_i)\in\mathcal{D}^{\infty}_{m\times 1},$$
$$T=(t_i)\in\mathcal{D}^{\infty}_{m\times 1}$$

是给定的, 且$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}^{\infty}_{n\times 1}$是未知的.

对于上述所说的格化线性规划的最优解问题, 首先要得到满足模糊关系不等式限制的全部解. 此时, 上节中所给方法正好可以用于解决这一问题. 下面, 给出一个数值算例来说明求解过程.

例 1 考虑如式(19)所示的格化线性规划问题, 其中的参数为

$$R=\begin{bmatrix}0.3&0.1\\0.2&0.5\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}0.1\\0.1\end{bmatrix},$$
$$S=\begin{bmatrix}0.1\\0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0.03\\0.04\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

记$X=[\,x_1\ \ x_2\,]^{\mathrm{T}}$. 首先, 构造有序集$\varXi$. 根据式(3)中有关集合$\varXi$的描述, 可知$\varXi=\{0,0.1,0.2,0.3,0.5,1\}$且

$$1\sim\delta_6^1,\ 0.5\sim\delta_6^2,\ 0.3\sim\delta_6^3,$$
$$0.2\sim\delta_6^4,\ 0.1\sim\delta_6^5,\ 0\sim\delta_6^6.$$

那么, 模糊关系不等式

$$R\circ X\leqslant T \tag{19}$$

的代数形式就可以表示为

$$\begin{cases}M_{\mathrm{d}}^6(M_{\mathrm{c}}^6\delta_6^3x_1)(M_{\mathrm{c}}^6\delta_6^5x_2)\preccurlyeq\delta_6^5\,,\\ M_{\mathrm{d}}^6(M_{\mathrm{c}}^6\delta_6^4x_1)(M_{\mathrm{c}}^6\delta_6^2x_2)\preccurlyeq\delta_6^5\,,\end{cases}$$

它也等价于

$$\begin{cases}M_{\mathrm{d}}^6M_{\mathrm{c}}^6\delta_6^3[I_6\otimes(M_{\mathrm{c}}^6\delta_6^5)]x\preccurlyeq\delta_6^5\,,\\ M_{\mathrm{d}}^6M_{\mathrm{c}}^6\delta_6^4[I_6\otimes(M_{\mathrm{c}}^6\delta_6^2)]x\preccurlyeq\delta_6^5\,,\end{cases}$$

其中$x=x_1\ltimes x_2$.

因此, 有

$$\begin{cases}G_1\ltimes x\preccurlyeq\delta_6^5\,,\\ G_2\ltimes x\preccurlyeq\delta_6^5\,,\end{cases}$$

其中:

$$G_1=\delta_6[\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\ 4\,4\,4\,4\,4\,4\,5\,5\,5\,5\,5\,5\,5\,5\,5\,5\,5\,5\,5\,6],$$
$$G_2=\delta_6[\,2\,2\,3\,4\,4\,4\,2\,2\,3\,4\,4\,4\,2\,2\,3\,4\,4\,4\ 2\,2\,3\,4\,4\,4\,2\,2\,3\,4\,5\,5\,2\,2\,3\,4\,5\,6].$$

最后, 模糊关系不等式(19)被转化为代数形式

$$L\ltimes x\preccurlyeq\bar b, \tag{20}$$

其中

$$L=G_1*G_2=\delta_{36}[14\,14\,15\,16\,16\,16\,14\,14\,15\,16\,16\,16\ 14\,14\,15\,16\,16\,16\,20\,20\,21\,22\,22\,22\ 26\,26\,27\,28\,29\,29\,26\,26\,27\,28\,29\,36],$$

且$\bar b=\delta_6^5\ltimes\delta_6^5=\delta_{36}^{29}$. 求解不等式(20), 得到

$$x=\delta_{36}^i,\ i=29,30,35,36.$$

故模糊关系不等式(19)所有节点解为

$$\delta_{36}^{29}\sim X_1^*=[0.1\ \ 0.1]^{\mathrm{T}},\ \delta_{36}^{30}\sim X_2^*=[0.1\ \ 0]^{\mathrm{T}},$$
$$\delta_{36}^{35}\sim X_3^*=[\,0\ \ 0.1]^{\mathrm{T}},\ \delta_{36}^{36}\sim X_4^*=[\,0\ \ \ 0\,]^{\mathrm{T}}.$$

再根据定义3, 就可得到

$$X_1=[\,\alpha\ \ \beta\,]^{\mathrm{T}},\ X_2=[\,\alpha\ \ 0\,]^{\mathrm{T}},$$
$$X_3=[\,0\ \ \beta\,]^{\mathrm{T}},\ X_4=[\,0\ \ 0\,]^{\mathrm{T}},$$

其中: $0<\alpha\leqslant 0.1, 0<\beta\leqslant 0.1$. 因此, 模糊关系不等式(19)的整个解集是

$$X=[\,\alpha\ \ \beta\,]^{\mathrm{T}},\ 0\leqslant\alpha\leqslant 0.1,\ 0\leqslant\beta\leqslant 0.1.$$

同理, 模糊关系不等式$R\circ X\geqslant S$的节点解为

$$x=\delta_{36}^j,\ j=1,2,\cdots,35.$$

将其转化回逻辑形式, 得到

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\0.5\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0.3\\0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2\\0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2\\0.3\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0.2\\0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2\\0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1\\0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1\\0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1\\0.2\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0.1\\0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0.1\end{bmatrix}.$$

那么, $R\circ X\geqslant S$的解集可以表示为

$$X_1=[\alpha\ \ \beta]^{\mathrm{T}},\ 0.1\leqslant\alpha\leqslant 1,\ 0\leqslant\beta\leqslant 1$$

和

$$X_2=[\gamma\ \ \eta]^{\mathrm{T}},\ 0\leqslant\gamma<0.1,\ 0.1\leqslant\eta\leqslant 1.$$

最后, 选出同时满足模糊关系不等式

$$R\circ X\leqslant T,$$
$$R\circ X\geqslant S$$

的解, 即式(18)中满足模糊关系不等式限制的解. 它们是

$$X=[\,0.1\ \ \alpha\,]^{\mathrm{T}},\ 0\leqslant\alpha\leqslant 0.1$$

和

$$X = [\ \beta\ \ 0.1\ ]^{\mathrm{T}},\ 0 \leqslant \beta < 0.1.$$

现在计算$C \circ X$, 发现当

$$X = [\ 0.1\ \ \alpha\ ]^{\mathrm{T}},\ 0.04 \leqslant \alpha \leqslant 0.1$$

或者

$$X = [\ \beta\ \ 0.1\ ]^{\mathrm{T}},\ 0 \leqslant \beta < 0.1$$

时, 得到目标函数的最大值$f = 0.04$.

5 总结(Conclusions)

本文研究了如何求解模糊关系不等式$A \circ X \circ B \leqslant C$. 先通过两个重要的公式将所考虑的模糊关系不等式等价转化为简单形式. 然后, 对于所得出的简单形式的不等式, 研究了其解的存在性, 并推导出一个解存在的充分必要条件. 接下来, 基于矩阵的半张量积和代数技巧, 给出求解模糊关系不等式$D \circ z \leqslant b$的具体算法. 最后, 介绍了一个具有模糊关系不等式限制的格化线性规划问题的数值算例, 它也说明了在处理类似模糊关系不等式时, 本文所提方法的有效性.

参考文献(References):

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338 – 353.

[2] DARDERY M, ZHANG J. On L-fuzzy proximity spaces [J]. *International Journal of Hybird Intelligent Systems*, 2014, 11(2): 137 – 144.

[3] ZHANG Biao, ZHOU Shaosheng. Stability analysis and control design for interval type-2 stochastic fuzzy systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(7): 985 – 992.
(张彪, 周绍生. 区间二型随机模糊系统的稳定性分析和控制设计 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(7): 985 – 992.)

[4] KLIR G J, YUAN B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications* [M]. USA: Professional Tennis Registry, 1995.

[5] WU H, CHEN Y. Coalgebras for fuzzy transition systems [J]. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 2014, 301: 91 – 101.

[6] ABDULLAH L. Poverty lines based on fuzzy sets theory and its application to malaysian data [J]. *Social Indicators Research*, 2011, 104(1): 117 – 127.

[7] GONG Z, ZHANG X. Variable precision intuitionistic fuzzy rough sets model and its application [J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2014, 5(2): 263 – 280.

[8] ZHEN Shengchao, ZHAO Han, HUANG Kang, et al. Optimal robust control design of uncertain mechanical systems: a fuzzy approach [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(5): 654 – 664.
(甄圣超, 赵韩, 黄康, 等. 不确定性机械系统的最优鲁棒控制设计: 模糊法 [J], 控制理论与应用, 2014, 31(5): 654 – 664.)

[9] NOBUHARA H, PEDRYCZ W, HIROTA K. Fast solving method of fuzzy relational equation and its application to lossy image compression/reconstruction [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 8(3): 325 – 334.

[10] SANCHEZ E. Truth-qualification and fuzzy relations in natural languages, application to medical diagnosis [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 84(2): 155 – 167.

[11] PINGKE L, FANG S. On the unique solvability of fuzzy relational equations [J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2011, 10(2): 115 – 124.

[12] PINGKE L, FANG S. A note on solution sets of interval-valued fuzzy relational equations [J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2009, 8(1): 115 – 121.

[13] MASHAYEKHI Z, KHORRAM E. On optimizing a linear objective function subjected to fuzzy relation inequalities [J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2010, 161(24): 3081 – 3113.

[14] GUO F, XIA Z. An algorithm for solving optimization problems with one linear objective function and finitely many constraints of fuzzy relation inequalities [J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2006, 5(1): 33 – 47.

[15] LI H, WANG Y. A matrix approach to latticized linear programming with fuzzy-relation inequality constraints [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2013, 21(4): 781 – 788.

[16] CHENG D, QI H. *Semi-tensor of Matrix* [M]. Beijing: Science Press, 2007.

[17] CHENG D, QI H. A linear representation of dynamics of Boolean networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2251 – 2258.

[18] CHENG D, QI H, LI Z. *Analysis and Control of Boolean Networks - A Semi-tensor Product Approach* [M]. London: Springer, 2011.

[19] CHENG D, FENG J, LV H. Solving fuzzy relational equations via semi-tensor product [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(2): 390 – 396.

[20] FENG J, LV H, CHENG D. Multiple fuzzy relation and its application to coupled fuzzy control [J]. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(5): 1313 – 1324.

[21] LI H, WANG Y, LIU Z. A semi-tensor product approach to pseudo-boolean functions with application to boolean control networks [J]. *Asian Journal of Control*, 2014, 16(4): 1073 – 1081.

[22] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[23] CHENG D, QI H, XUE A. A survey on semi-tensor product of matrices [J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2007, 20(2): 304 – 322.

[24] LJUNG L, ŠODERRSTRÖM T. *Theory and Practice of Recursive Identification* [M]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology Press, 1983.

[25] FAN H, FENG J, ZHANG L. Solving a class of fuzzy relation inequalities via semi-tensor product [C] //*The 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Beijing: IEEE, 2012: 1465 – 1470.

[26] RENTELN P, DUNDES A. Foolproof: a sampling of mathematical folk humor [J]. *Notices of the American Mathematical Society*, 2005, 52(1): 24 – 34.

[27] WANG P Z, ZHANG D Z, SANCHEZ E, et al. Latticized linear programming and fuzzy relation inequalities [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1991, 159(1): 72 – 87.

作者简介:

范洪彪 (1987–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为模糊控制理论及其应用, E-mail: fanhongbiao1987@126.com;

冯俊娥 (1971–), 女, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为控制理论及应用, E-mail: fengjune@sdu.edu.cn;

孟 敏 (1987–), 女, 博士, 在香港城市大学作博士后研究工作, 目前研究方向为矩阵的半张量积理论及其在布尔网络和超图中的应用, E-mail: mengminmath@gmail.com.