

## 双层自适应快速super twisting控制算法

杨雅君<sup>1†</sup>, 廖 瑛<sup>1</sup>, 尹大伟<sup>2</sup>, 郑宇昕<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073; 2. 海军装备研究院, 上海 200436)

**摘要:** 为提高super twisting算法的收敛速度, 解决现有算法存在的增益过估计问题, 提出了两种自适应增益快速super twisting算法. 分别通过快速终端滑模趋近律和增加线性项加快收敛速度. 利用基于等效控制的双层自适应律调节增益, 保证滑模存在条件的成立, 同时使增益尽量的小. 采用Lyapunov方法证明了新算法具有更优良的收敛特性, 根据有界实引理和Schur补定理分别给出了两种算法的参数整定策略. 仿真算例表明, 在相同控制参数下, 新算法的能耗与原算法接近, 并具有更快的收敛速度和更强的鲁棒性.

**关键词:** super twisting算法; 收敛性; 等效控制; 自适应控制; 滑模控制; 观测器

中图分类号: TP273.2 文献标识码: A

## Adaptive dual layer fast super twisting control algorithm

YANG Ya-jun<sup>1†</sup>, LIAO Ying<sup>1</sup>, YIN Da-wei<sup>2</sup>, ZHENG Yu-xin<sup>1</sup>

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China;  
2. Naval Academy of Armament, Shanghai 200436, China)

**Abstract:** Two modified super twisting algorithms with adaptive gains are proposed for improving the convergence rate and averting the overestimation of gains which is often occur in present algorithm. One proposed algorithm is obtained by adding an additional linear term, and another algorithm is modified by using the fast terminal slide mode trending law. All variable gains in proposed algorithms are adaptively adjusted by using the dual layer adaptation schema which has exploited the concept of equivalent control; therefore, the gains are adjusted as small as possible. The proposed algorithms and dual layer adaptation are formally analyzed by using the Lyapunov methods to prove that the convergence properties are improved. The parameters setting strategies are proposed base on the bounded-real lemma and Schur complement lemma for both algorithms, respectively. Simulation results show that the convergence rate and robustness of proposed algorithms are superior to the original one when the total energy consumption is practically unchanged.

**Key words:** super twisting algorithm; convergence; equivalent control; adaptive control; sliding mode control; observers

### 1 引言(Introduction)

Super twisting (ST)二阶滑模有限时间收敛算法自提出以来<sup>[1]</sup>获得了广泛的应用与研究. 该算法可以作为二阶滑模控制器, 对相对阶为1的系统, 生成无抖振的连续控制信号; 也可用作鲁棒微分器, 对连续光滑的有界信号进行精确估计. 传统ST算法中包含两个固定增益(一个为幂次项增益, 另一个为开关函数项增益), 决定着算法的性能. 较早的文献中, 算法的稳定性和增益的选择, 需要通过对状态轨迹在相平面上的分段几何讨论, 加以分析和证明<sup>[2]</sup>, 此外也有利用同质性原理(Homogeneity)进行研究的例子<sup>[3-4]</sup>. 随着一类Lyapunov函数的发现<sup>[5-7]</sup>, 稳定性证明的难度和复杂度得到显著的简化, 促进了该领域的进一步发展, 尤其在增益的自适应调节问题上, 获得了极大的关注.

现有的自适应ST算法可以粗略的分为两类. 第1类根据滑模变量偏离滑模面的“距离”调节增益<sup>[8-11]</sup>, 若滑模变量不为零, 即系统尚未进入滑模动态时, 持续调高增益以确保滑模可达条件成立, 直到系统处于滑模动态后, 停止调节并保持增益为常值. 这类方法可用于干扰上界未知的情况, 其自适应增益是关于时间的递增函数, 显然该方法会带来“过估计”问题, 当干扰上界减小后仍保持不必要的过高的增益. 部分学者通过引入“真滑模”(real sliding mode)概念, 在滑模变量和增益大小满足一定条件时降低增益, 在解决“过估计”问题的同时却损害了算法的收敛精度, 仅能使滑模变量在有限时间进入到包含滑模面的邻域内<sup>[12-13]</sup>. 另一类算法则尝试获取“任意时刻保持滑模动态的最小增益”, Utikin<sup>[14-15]</sup>通过

收稿日期: 2015-11-10; 录用日期: 2016-05-13.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: yajunsand@163.com; Tel.: +86 731-84574137.

本文责任编辑: 高会军.

航天科技创新基金项目(CASC201502)资助.

Supported by Innovation Foundation of China Aerospace Science and Technology Corporation (CASC201502).

在自适应律中引入等效控制信号实现了这个目标. Edwards基于相同的思想,提出了双层自适应律来获取保持滑模的最小增益,先后构造了具有单个自适应增益参数<sup>[16]</sup>和两个自适应增益参数<sup>[17]</sup>的类ST算法,对上界未知且时变的干扰,实现了二阶理想滑模,即滑模变量及其导数在有限时间收敛为0.

本文在Edwards提出的算法结构<sup>[17]</sup>基础上,探索加快收敛速度的有效方案.提出两种不同的变增益快速ST算法,两种算法分别通过快速终端滑模趋近律和引入线性项加快收敛速度,对原算法中的附加时变增益项和双层自适应律进行了相应的修正,利用二次型Lyapunov函数证明了算法的稳定性并给出了固定参数取值方法.通过仿真算例验证了新算法良好的收敛特性,还对存在有限个不连续点的时变干扰具有更强的鲁棒性,具有广泛的工程应用前景.

## 2 问题的表述(Problem formulation)

文献[17]中的变增益super twisting结构如下:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= -\alpha(t)|s(t)|^{1/2} \operatorname{sgn} s(t) + z(t) + \phi(s, L), \\ \dot{z}(t) &= -\beta(t) \operatorname{sgn} s(t) + f(t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $s, z \in \mathbb{R}$ , 不确定扰动项  $f(t)$  未知并有界, 且  $|f(t)| < a_0$ , 增益  $\alpha(t) > 0, \beta(t) > 0$  为时变标量  $L(t) > l_0 > 0$  的函数:

$$\alpha(t) = \sqrt{L(t)}\alpha_0, \quad (2)$$

$$\beta(t) = L(t)\beta_0, \quad (3)$$

式中  $\alpha_0$  和  $\beta_0$  为正定标量, 通过选择不同的值可调节系统(1)的动态品质.  $L(t)$  的取值由自适应律决定, 将在第4部分进行说明. 与传统的super twisting结构相比, 结构(1)中增加了一项

$$\phi(s, L) = -\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}s, \quad (4)$$

若  $L(t)$  保持不变,  $\dot{L}(t) = 0$ , 则有  $\phi(s, L) = 0$ , 变增益super twisting结构退化为传统的固定增益形式.

假设  $L(t) > a_0$ , 并选择  $\beta_0 > 1, \alpha_0 = 2\sqrt{2\beta_0}$ , 可以证明: 式(1)所示的结构在有限时间  $T_r$  内使得  $s(t) = \dot{s}(t) = 0$ , 若选择Lyapunov函数为

$$V = x^T P x, \quad (5)$$

其中:  $x = [\sqrt{L(t)}|s(t)|^{1/2} \operatorname{sgn} s(t) \quad z]^T$ ,  $P$  为正定对称矩阵, 收敛时间满足不等式

$$T_r \leq \frac{2}{\gamma_1} V^{1/2}(0), \quad (6)$$

式中:  $\gamma_1 = \varepsilon_0 l_0 \sqrt{\lambda_{\min}(P)}$ ,  $\varepsilon_0$  是一个正定标量, 由  $\alpha_0$  和  $\beta_0$  决定,  $\lambda_{\min}(P)$  是矩阵  $P$  的最小特征值.

下一节将给出本文最重要的结果: 参考式(1)所示的结构给出两种改进型变增益super twisting算法, 与

原结构相比, 改进算法具有更小的收敛时间. 为便于分析收敛时间, 先给出一个引理.

**引理 1**<sup>[18-19]</sup> 如果存在正定Lyapunov函数  $V(t)$  及参数  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  和  $0 < \theta < 1$  满足不等式

$$\dot{V}(t) + \lambda_1 V(t) + \lambda_2 V^\theta(t) \leq 0,$$

则系统状态能够在有限时间内收敛到原点, 且收敛时间满足

$$T_r \leq \frac{1}{\lambda_1(1-\theta)} \ln\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} V^{1-\theta}(0)\right).$$

## 3 变增益快速ST算法(Fast super twisting algorithm with variable gain)

### 3.1 第1类快速ST算法(Fast super twisting algorithm: version 1)

考虑改进型的super twisting结构为

$$\begin{cases} \dot{s} = -\alpha(t)(|s|^{1/2} \operatorname{sgn} s + ks) + z + \phi(s, L), \\ \dot{z} = -\beta(t)(\operatorname{sgn} s + 3k|s|^{1/2} \operatorname{sgn} s + 2k^2s) + f(t), \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $k > 0$  为常值控制参数, 时变增益  $\alpha(t)$  和  $\beta(t)$  与原结构相同, 分别取式(2)和式(3).  $\phi(s, L)$  变为

$$\phi(s, L) = -\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\left(1 - \frac{k|s(t)|^{1/2}}{1 + 2k|s(t)|^{1/2}}\right)s. \quad (8)$$

**注 1** 结构(7)与原结构(1)的不同是从趋近律技术<sup>[20]</sup>的视角出发, 用特殊的快速终端滑模型趋近律  $|s|^{1/2} \operatorname{sgn} s + ks$  取代了原来的幂次趋近律  $|s|^{1/2} \operatorname{sgn} s$ , 以此加快滑模变量的收敛速度.

为便于分析系统的稳定性, 进行坐标变换

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L}(|s|^{1/2} \operatorname{sgn} s + ks) \\ z \end{bmatrix}, \quad (9)$$

因为  $\frac{d}{dt}|s| = \dot{s} \operatorname{sgn} s$ , 则有

$$\dot{x}_1 = \left(\frac{1}{2|s|^{1/2}} + k\right)(-\alpha(t)x_1 + \sqrt{L}z). \quad (10)$$

上式的推导中应用了下列等式, 代入  $\phi$  的定义式(8), 可验算该等式成立:

$$\frac{\dot{L}}{2\sqrt{L}}(|s|^{1/2} \operatorname{sgn} s + ks) + \sqrt{L}\left(\frac{1}{2|s|^{1/2}} + k\right)\phi = 0.$$

根据式(7), 有

$$\dot{x}_2 = \dot{z} = -\left(\frac{1}{|s|^{1/2}} + 2k\right)\frac{\beta(t)}{\sqrt{L}}x_1 + f(t). \quad (11)$$

综合式(10)–(11), 在新坐标下系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sqrt{L}\left(\frac{1}{|s|^{1/2}} + 2k\right)\left(-\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{L}}x_1 + \frac{1}{2}z\right), \\ \dot{x}_2 &= \sqrt{L}\left(\frac{1}{|s|^{1/2}} + 2k\right)\left(-\frac{\beta(t)}{L}x_1 + \tilde{f}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\tilde{f}(t)$  定义为

$$\tilde{f}(t) = \frac{|s|^{1/2}f(t)}{\sqrt{L}(1+2k|s|^{1/2})}. \quad (13)$$

注意到

$$|x_1| = \sqrt{L}|s|^{1/2}(1+k|s|^{1/2}), \quad (14)$$

则 $\tilde{f}(t)$ 的绝对值满足

$$|\tilde{f}(t)| = \frac{|s|^{1/2}}{\sqrt{L}(1+2k|s|^{1/2})}|f(t)| \leq \frac{|f(t)|}{L}|x_1|. \quad (15)$$

考虑时变参数 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 的具体形式, 系统方程(12)的矩阵形式为

$$\dot{x} = D(s)(A_0x + B_0\tilde{f}), \quad (16)$$

其中:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\alpha_0 & 1 \\ -\beta_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$D(s) = \sqrt{L}\left(\frac{1}{|s|^{1/2}} + 2k\right).$$

**定理 1** 假设 $L(t)$ 满足 $L(t) > a_0 \geq |f(t)|$ , 如果式(2)–(3)中的增益 $\alpha_0$ 和 $\beta_0$ 的取值, 使得满足不等式(17)的正定对称矩阵 $P$ 存在

$$PA_0 + A_0^T P + PB_0B_0^T P + C_0^T C_0 < -\varepsilon_0 P, \quad (17)$$

其中:  $C_0 = [1, 0]$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ . 则结构(7)在有限时间 $T_r$ 内实现2阶滑模运动,  $s(t) = \dot{s}(t) = 0$ , 收敛时间满足

$$T_r \leq \frac{2}{\gamma_2} \ln\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} V^{1/2}(0)\right), \quad (18)$$

其中:  $\gamma_1 = \varepsilon_0 l_0 \lambda_{\min}^{1/2}(P)$ ,  $\gamma_2 = 2\varepsilon_0 l_0^{1/2} k$ .

**证** 选择Lyapunov函数为 $V = \frac{1}{2}x^T P x$ , 沿系统轨线求得

$$\dot{V} = D(s)(x^T(A_0^T P + PA_0)x + 2x^T PB_0\tilde{f}) \leq D(s)(x^T(A_0^T P + PA_0 + PB_0B_0^T P)x + \tilde{f}^2).$$

根据不等式(15), 结合假设条件 $L(t) > a_0 \geq |f(t)|$ , 可知 $|\tilde{f}(t)| \leq \frac{|f(t)|}{L(t)}|x_1| \leq |x_1|$ , 因此

$$\dot{V} \leq D(s)(x^T(A_0^T P + PA_0 + PB_0B_0^T P)x + x_1^2) = D(s)x^T(A_0^T P + PA_0 + PB_0B_0^T P + C_0^T C_0)x.$$

当增益 $\alpha_0$ 和 $\beta_0$ 的取值满足不等式(17)时, 有

$$\dot{V} \leq -\frac{\varepsilon_0 \sqrt{L}}{|s|^{1/2}} V - 2\varepsilon_0 \sqrt{L} k V$$

成立. 注意到根据

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|_2^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|_2^2,$$

$$\sqrt{L}|s|^{1/2} < |x_1| < \|x\|,$$

可以推出 $|s|^{1/2} \leq \sqrt{\frac{V}{\lambda_{\min}(P)L}}$ , 进一步有

$$\dot{V} \leq -\varepsilon_0 L \lambda_{\min}^{1/2}(P) V^{1/2} - 2\varepsilon_0 L^{1/2} k V \leq -\gamma_1 V^{1/2} - \gamma_2 V. \quad (19)$$

式(19)中参数 $\gamma_1, \gamma_2$ 均大于0, 根据引理1可知: 有限时间 $T_r$ 内有 $x(t) = 0$ 成立,  $T_r$ 满足式(18). 根据 $x(t)$ 的定义(9), 进一步可知, 此时有 $s(t) = 0$ 和 $z(t) = 0$ 成立, 再根据式(7),  $\dot{s}(t) = 0$ 也成立.

### 3.2 第2类快速ST算法(Fast super twisting algorithm: version 2)

现在考虑另一种改进型的super twisting结构

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -\alpha(t)|s|^{1/2} \operatorname{sgn} s - \eta(t)s + z + \phi(s, z, L), \\ \dot{z} &= -\beta(t) \operatorname{sgn} s - \kappa(t)s + f(t), \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\alpha(t), \beta(t)$ 与原结构相同, 分别取式(2)和(3).  $\eta(t), \kappa(t)$ 和 $\phi(s, z, L)$ 分别为

$$\eta(t) = L^n(t)\eta_0, \quad (21)$$

$$\kappa(t) = L^{2n}(t)\kappa_0, \quad (22)$$

$$\phi(s, z, L) = -\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\left(1 - \frac{\varpi_{\text{num}}(s, z, L)}{\varpi_{\text{den}}(s, z, L)}\right)s. \quad (23)$$

式(23)中,  $\varpi_{\text{num}}$ 和 $\varpi_{\text{den}}$ 分别定义为

$$\begin{aligned} \varpi_{\text{num}} &= (1-n)L^{2n-1}(2\kappa_0 + \eta_0^2)|s|^{3/2} \operatorname{sgn} s + \\ &\quad (1-n)L^{n-0.5}\alpha_0\eta_0 s + \\ &\quad (n-1)L^{n-1}\eta_0 z |s|^{1/2}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \varpi_{\text{den}} &= (2\beta_0 + \frac{\alpha_0^2}{2})|s|^{1/2} \operatorname{sgn} s + \\ &\quad L^{2n-1}(2\kappa_0 + \eta_0^2)|s|^{3/2} \operatorname{sgn} s + \\ &\quad \frac{3}{2}L^{n-0.5}\alpha_0\eta_0 s - \frac{\alpha_0}{2\sqrt{L}}z - L^{n-1}\eta_0 z |s|^{1/2}. \end{aligned} \quad (25)$$

**注 2** 结构(20)与结构(7)的相比, 在 $\dot{z}$ 的微分等式中, 取消了幂次项 $|s(t)|^{1/2} \operatorname{sgn} s(t)$ , 相当于只在原结构(1)中通过增加线性项来加快收敛速度. 当式(21)–(22)中 $n = 1$ 时, 有 $\varpi_{\text{num}} = 0$ , 此时 $\phi(s, z, L)$ 为比较简单的形式, 与式(4)相同.

关于变增益快速ST算法(20), 有如下定理成立.

**定理 2** 假设 $L(t)$ 满足 $L(t) > a_0 \geq |f(t)|$ , 若式(2)–(3)和式(21)–(25)中的常参数 $\alpha_0, \beta_0, \eta_0$ 和 $\kappa_0$ 取值能使矩阵 $Q, B$ 和 $P$ 正定, 其中 $Q, B$ 和 $P$ 分别定义为

$$Q = A - C, \quad (26)$$

$$B = \eta_0 \begin{bmatrix} \beta_0 + 2\alpha_0^2 & 0 & 0 \\ * & \kappa_0 + \eta_0^2 & -\eta_0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4\beta_0 + \alpha_0^2 & \alpha_0\eta_0 & -\alpha_0 \\ * & 2\kappa_0 + \eta_0^2 & -\eta_0 \\ * & * & 2 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

式(26)中 $A$ 和 $C$ 分别为

$$A = \frac{\alpha_0}{2} \begin{bmatrix} 2\beta_0 + \alpha_0^2 & 0 & -\alpha_0 \\ * & 2\kappa_0 + 5\eta_0^2 & -3\eta_0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$C = \begin{bmatrix} -\alpha_0\vartheta & -\frac{1}{2}\eta_0\vartheta & \vartheta \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}, \vartheta = \frac{f(t)\text{sgn } s}{L(t)}, \quad (30)$$

则变增益快速ST算法(20)在有限时间 $T_r$ 内实现2阶滑模运动,  $s(t) = \dot{s}(t) = 0$ . 并且收敛时间满足式(18), 式中:  $\gamma_1 = l_0 \frac{\lambda_{\min}(A-C)\lambda_{\min}^{1/2}(P)}{\lambda_{\max}(P)}$ ,  $\gamma_2 = l_0^n \frac{\lambda_{\min}(B)}{\lambda_{\min}(P)}$ .

证 选择Lyapunov函数为

$$V = 2L(t)\beta_0|s| + L^{2n}(t)\kappa_0s^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{L(t)\alpha_0}|s|^{1/2}\text{sgn } s + L^n(t)\eta_0s - z)^2. \quad (31)$$

式(31)也可写成如下二次型形式:

$$V = \xi^T P \xi, \quad (32)$$

其中:  $\xi = [\sqrt{L}|s|^{1/2}\text{sgn } s \ L^n s \ z]^T$ , 矩阵 $P$ 如式(28)所示. 对Lyapunov函数求导并结合 $\phi(s, z, L)$ 的定义可简化得:

$$\dot{V} = 2\beta\text{sgn } s\dot{s}_1 + 2\kappa s\dot{s}_1 + z\dot{z} + (\alpha|s|^{1/2}\text{sgn } s + \eta s - z)\left(\frac{\alpha}{2|s|^{1/2}}\dot{s}_1 + \eta\dot{s}_1 - \dot{z}\right),$$

其中 $\dot{s}_1 = -\alpha|s|^{1/2}\text{sgn } s - \eta s + z$ , 上式可写为二次型形式

$$\dot{V} = -\frac{\sqrt{L}}{|s|^{1/2}}\xi^T A \xi - L^n \xi^T B \xi - \alpha|s|^{1/2}\text{sgn } s f(t) - \eta s f(t) + 2z f(t), \quad (33)$$

矩阵 $A$ 和 $B$ 分别为式(29)和式(27)所示, 注意到

$$\frac{\sqrt{L}}{|s|^{1/2}}\xi^T C \xi = -\alpha|s|^{1/2}\text{sgn } s f(t) - \eta s f(t) + 2z f(t), \quad (34)$$

式中矩阵 $C$ 如式(30)所示. 由式(33)–(34)可得

$$\dot{V} = -\frac{\sqrt{L}}{|s|^{1/2}}\xi^T (A - C) \xi - L^n \xi^T B \xi, \quad (35)$$

如果 $\alpha_0, \beta_0, \eta_0, \kappa_0$ 选择合适的取值使矩阵 $A - C$ 和 $B$ 正定, 则由式(35)可得

$$\dot{V} \leq -\frac{\sqrt{L}}{|s|^{1/2}}\lambda_{\min}(A - C)\|\xi\|^2 - L^n \lambda_{\min}(B)\|\xi\|^2, \quad (36)$$

其中:  $\lambda_{\min}(A - C) > 0$ ,  $\lambda_{\min}(B) > 0$ 分别为矩阵 $A - C$ 和 $B$ 的最小特征值. 考虑到Lyapunov函数值 $V$ 和

矢量 $\xi$ 满足如下关系:

$$\|\xi\|^2 \geq \frac{V}{\lambda_{\max}(P)}, \quad (37)$$

$$\sqrt{L}|s|^{1/2} = |\xi_1| \leq \|\xi\| \leq \frac{V^{1/2}}{\lambda_{\min}^{1/2}(P)}, \quad (38)$$

则由式(36)–(38)得

$$\dot{V} \leq -L \frac{\lambda_{\min}(A - C)\lambda_{\min}^{1/2}(P)}{\lambda_{\max}(P)} V^{1/2} - L^n \frac{\lambda_{\min}(B)}{\lambda_{\min}(P)} V \leq -\gamma_1 V^{1/2} - \gamma_2 V. \quad (39)$$

式(39)中参数 $\gamma_1, \gamma_2$ 均大于0, 由引理1可知, 有限时间 $T_r$ 内有 $\xi(t) = 0$ 成立,  $T_r$ 满足式(18). 根据 $\xi(t)$ 的定义, 进一步可知, 此时有 $s(t) = 0$ 和 $z(t) = 0$ 成立, 再根据式(20),  $\dot{s}(t)$ 也成立.

**注3** 两种变增益快速ST算法收敛时间上限均为  $T_{\text{sup}}^F = \frac{2}{\gamma_2} \ln(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} V^{1/2}(0))$ , 而原算法收敛时间上限为  $T_{\text{sup}}^O = \frac{2}{\gamma_1} V^{1/2}(0)$ , 因此, 有:  $T_{\text{sup}}^F = T_{\text{sup}}^O \frac{\ln(1 + \mu)}{\mu}$ , 其中  $\mu = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} V^{1/2}(0)$ , 注意到 $\mu > 0$ 恒成立, 因此  $\frac{\ln(1 + \mu)}{\mu} < 1$ , 进而  $T_{\text{sup}}^F \leq T_{\text{sup}}^O$ . 通过以上分析可见, 新算法的收敛时间小于原算法, 且初始状态偏离平衡点越远, 新算法对收敛时间的改善越明显.

### 3.3 控制参数整定(Control parameters setting)

定理1和定理2说明: 在时变参数满足假设的前提下, 选择合适的常值控制参数, 可以使算法(7)与算法(20)在有限时间内实现二阶滑模. 接下来详述常值控制参数的整定方法.

对于算法(7), 参数 $k \geq 0$ 时具备有限时间收敛特性,  $k$ 越大收敛时间越短,  $k = 0$ 时算法退化为原算法(1). 再根据有界实引理(The bounded-real lemma)<sup>[21]</sup>, 若 $A_0$ 为Hurwize矩阵,  $[A_0, B_0, C_0]$ 为最小实现, 不等式条件(17)等价于频域约束 $\|H(p)\|_{\infty} < 1$ , 其中 $p \in \mathbb{C}$ 为复变量, 传递函数

$$H(p) = C_0 (pI - A_0)^{-1} B_0 = \frac{1}{2p^2 + \alpha_0 p + \beta_0}, \quad (40)$$

显然, 当 $\beta_0 > 1$ 时频域约束条件恒成立. 不妨取 $\alpha_0 = 2\sqrt{2\beta_0}$ , 这样传递函数有两个相同的极点:  $-\sqrt{\beta_0/2}$ , 能保证 $A_0$ 稳定.

对于算法(20), 根据Schur补引理, 矩阵 $Q, B$ 和 $P$ 正定等价于9个不等式约束条件. 当 $|\vartheta| \leq 1$ 时, 通过推导简化得

$$\begin{aligned} \alpha_0 &> 5^{1/4}, \eta_0 > 0, \beta_0 > 1, \\ \kappa_0 &> \frac{8\eta_0^2\beta_0 + 22\eta_0^2 + 9\alpha_0^2\eta_0^2}{4(\beta_0 - 1)}, \end{aligned} \quad (41)$$

当控制参数满足式(41)时, 定理2的条件成立.

#### 4 双层自适应增益(Adaptive dual layer gain)

定理1和2中均含有假设条件:  $L(t) > a_0 \geq |f(t)|$ , 即时变控制参数 $L(t)$ 必须大于时变扰动项 $f(t)$ 的上界, 问题归结为如何设计 $L(t)$ 的自适应律以满足这一条件. 文献[16–17]借助等效控制<sup>[22–23]</sup>的概念, 提出了一种双层自适应律, 使增益 $L(t)$ 随未知干扰 $f(t)$ 的变化而适度地调节大小, 确保任意时刻有 $L(t) > |f(t)|$ 的同时 $L(t)$ 是有界的. 本文在此基础上对该双层自适应律进行适当修正, 以适用于上节提出的变增益快速ST算法.

当系统(7)或(20)进入理想滑模运动阶段时,  $\dot{z} \equiv 0$ , 进而开关项 $\beta(t) \operatorname{sgn} s$ 的平均值满足下列等式:

$$u_{\text{eq}} = \beta(t) [\operatorname{sgn} s(t)]_{\text{eq}} + y(s) = f(t). \quad (42)$$

对于算法(7)和(20),  $y(s)$ 分别为

$$y(s) = \begin{cases} \beta(t) (3k|s(t)|^{1/2} \operatorname{sgn} s(t) + 2k^2 s), \\ \kappa(t) s(t). \end{cases} \quad (43)$$

$[\operatorname{sgn} s(t)]_{\text{eq}}$ 为保持系统轨迹在滑模面上的开关函数 $\operatorname{sgn} s(t)$ 的平均值, 显然 $[\operatorname{sgn} s(t)]_{\text{eq}} \in (0, 1]$ . 将 $u_{\text{eq}}$ 理解为等效控制, 有助于分析滑模面上降阶系统的运动特性, 虽然等效控制 $u_{\text{eq}}$ 只是理论上抽象出来的, 但可以利用低通滤波器进行在线估计:

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{1}{\tau} (\operatorname{sgn} s(t) - \sigma(t)), \quad (44)$$

$$\hat{u}_{\text{eq}}(t) = \beta(t) \sigma(t) + y(s),$$

其中滤波器时间常数 $0 < \tau \ll 1$ ,  $\sigma$ 为 $[\operatorname{sgn} s]_{\text{eq}}$ 的估计值,  $\tau$ 越小, 估计就越准确, 定义估计误差为

$$\varsigma(\tau) = [\operatorname{sgn} s]_{\text{eq}} - \sigma. \quad (45)$$

当 $\tau \rightarrow 0$ 时,  $\varsigma(\tau) \rightarrow 0$ , 也就是说至少在理论上 $\sigma$ 与 $[\operatorname{sgn} s]_{\text{eq}}$ 间的误差可以任意小. 结合式(42)与式(44), 通过对开关函数 $\operatorname{sgn} s$ 滤波, 可以获得未知干扰 $f(t)$ 的实时估计. 下面给出的双层自适应律就利用该信息调节增益 $L(t)$ , 在确保 $L(t) > |f(t)|$ 的同时使其尽量小.

设时变增益 $L(t)$ 为

$$L(t) = l_0 + l(t), \quad (46)$$

其中:  $l_0$ 为常值参数;  $l(t)$ 为时变参数, 其导数定义为

$$\dot{l}(t) = -\rho(t) \operatorname{sgn} \delta(t). \quad (47)$$

时变增益 $\rho(t)$ 定义为

$$\rho(t) = r_0 + r(t), \quad (48)$$

$r_0$ 为常值参数; 时变部分 $r(t)$ 的导数为

$$\dot{r}(t) = \gamma |\delta(t)|, \quad (49)$$

$\gamma > 0$ 为常值参数; 式(47)和式(49)中的时变量 $\delta(t)$ 定义为

$$\delta(t) = L(t) - \frac{1}{a\beta_0} |\hat{u}_{\text{eq}}(t)| - \epsilon, \quad (50)$$

其中 $a > 0$ 为常值参数, 同时满足 $0 < a\beta_0 < 1$ ,  $\beta_0$ 即是式(3)中的控制参数;  $\epsilon > 0$ 为非常小的常值标量. 在之后的分析中可以看到,  $\epsilon$ 和 $a$ 选择合适的值是保证 $L(t)$ 满足控制算法要求的关键.

**定理3** 假设不确定干扰项 $f(t)$ 满足约束

$$|f(t)| \leq a_0 < +\infty,$$

$$|\dot{f}(t)| \leq a_1 < +\infty,$$

$a_0$ 和 $a_1$ 为未知标量, 低通滤波器(44)理想工作, 即 $\varsigma(\tau) = 0$ ; 则式(46)–(50)所示的双层自适应律可以在有限时间内使得 $L(t) > |f(t)|$ 成立.

**证** 根据式(42)–(45), 当时,  $\delta(t)$ 可重写为

$$\delta(t) = L(t) - \frac{1}{a\beta_0} |f(t)| - \epsilon, \quad (51)$$

求其导数并乘以 $\delta(t)$ , 结合公式(47)–(48)可推导出

$$\begin{aligned} \delta(t) \dot{\delta}(t) &= \delta(t) \dot{l}(t) - \frac{\delta(t)}{a\beta_0} \frac{d}{dt} |f(t)| \leq \\ &= -r_0 |\delta(t)| - r(t) |\delta(t)| + \frac{a_1}{a\beta_0} |\delta(t)|. \end{aligned} \quad (52)$$

定义变量

$$e(t) = \frac{a_1}{a\beta_0} - r(t), \quad (53)$$

根据式(49), 有

$$\dot{e}(t) = -\dot{r}(t) = -\gamma |\delta(t)|. \quad (54)$$

分析 $\delta(t)$ 和 $e(t)$ 的动态过程, 选择Lyapunov函数

$$V = \frac{1}{2} \delta^2 + \frac{1}{2\gamma} e^2, \quad (55)$$

沿 $\delta$ 和 $e$ 的轨线求导得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \left( \frac{a_1}{a\beta_0} - r_0 - r(t) - e(t) \right) |\delta(t)| = \\ &= -r_0 |\delta(t)|. \end{aligned} \quad (56)$$

根据 LaSalle 不变原理, 由式(56)可知, 对 $\forall t > 0$ , 有 $|e(t)| \leq \sup_{t>0} (e(t)) < +\infty$ . 因此, 一定存在时刻 $t_0$ , 当 $t > t_0$ 时, 有 $|\delta(t)| < \epsilon/2$ , 结合式(51)有

$$L(t) > \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{a\beta_0} |f(t)| > |f(t)|, \quad (57)$$

注意上式成立的前提是 $0 < a\beta_0 < 1$ .

**注4** 定理3指出在理想情况下( $\varsigma = 0$ ), 自适应律在有限时间内使 $L(t) > |f(t)|$ . 但在实际工程(或数值计算)中, 低通滤波器必然存在估计误差( $\varsigma \neq 0$ ), 此时式(57)变为

$$L(t) > |f(t) - L(t)\beta_0\varsigma| + m(a, \epsilon), \quad (58)$$

其中 $m(a, \epsilon) = \frac{1 - a\beta_0}{a\beta_0} |\hat{u}_{\text{eq}}(t)| + \frac{\epsilon}{2} > 0$ 为安全裕量, 随 $a$ 的减小和 $\epsilon$ 的增大而增大. 由于

$$|f(t) - L(t)\beta_0\varsigma| \leq |f(t)| + \beta_0 |L(t)\varsigma|,$$

一定存在函数 $|\zeta(t)| \leq |L(t)\varsigma|$ ,

$$L(t) > |f(t)| + \beta_0 \zeta(t) + m(a, \varepsilon), \quad (59)$$

选择足够大的 $\varepsilon$ 和足够小的 $a$ , 使得 $m(a, \varepsilon) > |\beta_0 \zeta(t)|$ , 就可以在低通滤波有误差的情况下还确保 $L(t) > |f(t)|$ .

**注5** 定理3的证明中, 根据LaSalle不变原理, 还可以推论, 自适应律的时变增益 $r(t)$ 和 $l(t)$ 是有界的, 进而可知 $L(t)$ 也是有界的.

### 5 仿真算例(Simulation example)

#### 5.1 干扰观测器(Disturbance observer)

下面将本文提出的变增益快速ST算法用于干扰估计问题<sup>[22]</sup>. 考虑作为执行机构的卫星控制力矩陀螺系统, 陀螺转子在驱动力矩和干扰力矩的作用下转速发生变化, 转速的变化规律可用如下微分方程描述:

$$J\dot{\Omega} = u(t) + g(t), \quad (60)$$

其中: 加载到转子上的驱动力矩 $u(t)$ 和转子绕转轴的惯量 $J$ 是精确已知的; 干扰力矩 $g(t)$ 是未知的;  $\Omega(t)$ 表示转子的转速, 可利用高精度传感器进行测量, 测量值为

$$\omega(t) = \Omega(t) + \Delta\Omega(t), \quad (61)$$

其中 $\Delta\Omega$ 表示测量误差.

干扰估计就是利用测量信号 $\omega(t)$ 和已知的驱动力矩 $u(t)$ 构造一个干扰估计器, 对未知干扰力矩 $g(t)$ 进行在线估计, 在仿真中, 设干扰力矩 $g(t)$ 的变化规律为

$$g(t) = \begin{cases} -\cos t - 0.5 \cos(3t), & t \in [0, 5), \\ -3 \cos(t + 0.78) - 1.5 \sin(3t), & t \in [5, +\infty). \end{cases} \quad (62)$$

为此, 构造辅助滑模变量 $s = J(\omega - \hat{\omega})$ . 结合式(60)–(61), 辅助滑模变量的导数为

$$\dot{s} = u + g + J\Delta\dot{\Omega} - J\dot{\hat{\omega}}, \quad (63)$$

其中 $\hat{\omega}(t)$ 被设计成

$$\dot{\hat{\omega}}(t) = \frac{1}{J}(u + \hat{f}(s, Z)), \quad (64)$$

式中 $\hat{f}(s, Z)$ 根据不同的ST算法进行设计. 例如, 根据本文提出的两种自适应ST算法—式(7)和式(20)— $\hat{f}(s, Z)$ 分别被设计为

$$\begin{cases} \dot{\hat{f}} = \alpha(t) [|s|^{1/2} \text{sgn } s + ks] - Z - \phi, \\ \dot{Z} = -\beta(t) [\text{sgn } s + 3k|s|^{1/2} \text{sgn } s + 2k^2s] \end{cases} \quad (65)$$

和

$$\begin{cases} \dot{\hat{f}} = \alpha(t) |s|^{1/2} \text{sgn } s + \eta(t)s - Z - \phi, \\ \dot{Z} = -\beta(t) \text{sgn } s - \kappa(t)s. \end{cases} \quad (66)$$

若组合扰动 $g + \Delta\dot{\Omega}$ 一阶可微, 则式(63)–(64)可整理成相应的super twisting结构, 根据前文的分析可知, 选取合适的参数并结合双层自适应律(46)–(50), 在有限时间内可以使得 $s = \dot{s} = 0$ 成立. 因此,  $\hat{f}(s, Z)$ 可以

作为组合扰动项 $g + \Delta\dot{\Omega}$ 的精确估计. 如果以 $\hat{f}(s, Z)$ 作为干扰力矩 $g(t)$ 的估计, 则只有当测量误差 $\Delta\Omega$ 为0或常数时才能获得精确的估计结果.

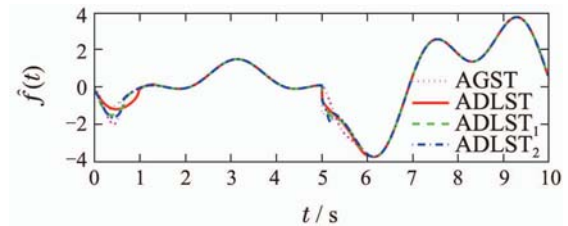
分别利用式(1)(7)(20)以及文献[13]提出的算法设计干扰估计器 $\hat{f}(s, Z)$ . 为叙述方便, 这些算法依次分别命名为: ADLST, ADLST<sub>1</sub>, ADLST<sub>2</sub>和AGST算法.

仿真中, 设置控制参数和自适应参数的取值如表1所示, AGST算法中自适应参数设为10. 为了能较好的求解非连续微分方程, 采用欧拉数值积分, 固定积分步长为 $10^{-5}$  s. 仿真结果如图1–3所示.

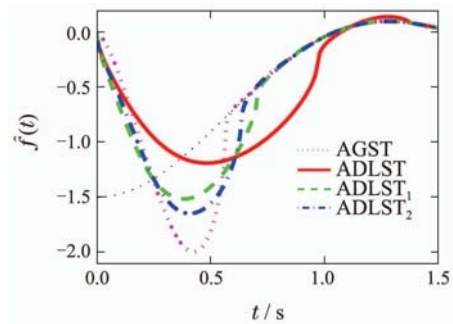
表1 仿真中的参数取值

Table 1 The parameters in simulation

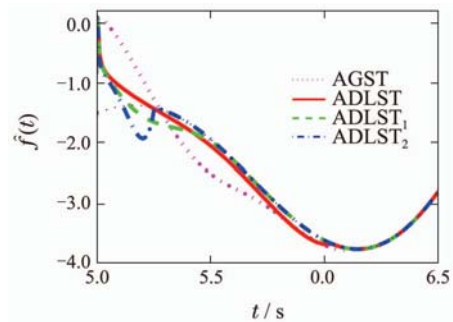
控制参数		自适应参数	
$\beta_0$	1.1	$a$	0.86
$\alpha_0$	2.97	$\epsilon$	0.05
$k$	1	$\gamma$	10
$\eta_0$	0.5	$\tau$	$10^{-3}$
$\kappa_0$	68.75	$r_0$	0.1



(a)



(b)



(c)

图1 干扰与干扰估计曲线

Fig. 1 Trajectories of uncertainty and its estimation



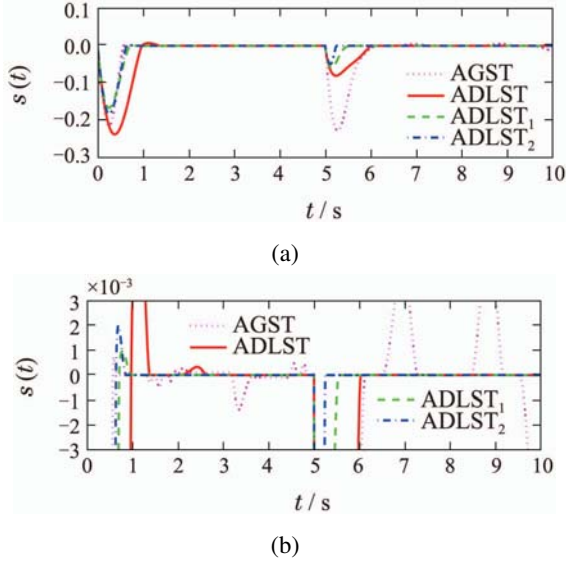


图 2 滑模辅助变量响应曲线

Fig. 2 Response curves of sliding variable

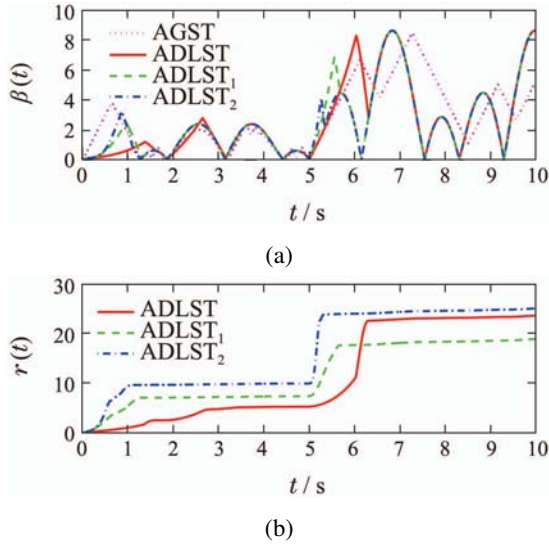


图 3 增益 $\beta(t)$ 和 $r(t)$ 变化曲线

Fig. 3 Curves of variable gain

图1显示了不同算法对不确定干扰的实时估计情况: 图(a)为整个仿真时间(0~10 s)内的干扰估值变化曲线, 4种算法均能在有限时间内实现对未知干扰的跟踪, 干扰发生不连续跳变后, 也能在有限时间内重新获得准确的估值; 图(b)为仿真初始时刻(0 s)干扰估计过程细节, AGST算法在0.58 s内实现对干扰的跟踪, ADLST<sub>1</sub>, ADLST<sub>2</sub>和ADLST分别在0.75 s, 0.69 s和1.38 s实现跟踪; 图(c)为干扰发生不连续变化(5 s)后估计曲线的细节, 可以看出ADLST<sub>2</sub>算法在0.25 s内恢复对干扰的跟踪, ADLST<sub>1</sub>, ADLST和AGST恢复跟踪的时间分别为0.55 s, 1.04 s和1.14 s.

图2为滑模辅助变量响应曲线, 可以清楚的看出改进后的快速ST算法(ADLST<sub>1</sub>和ADLST<sub>2</sub>)收敛时间较短. 其中图(b)展现了滑模面附近的变化细节, AGST

算法并未收敛到理想滑模面, 说明该算法仅能实现“真滑动模态”(即滑模变量在有限时间内收敛到原点的一个邻域内).

图3为增益的变化曲线, 其中图(a)为 $\beta(t)$ 的曲线, 可以看出ADLST<sub>2</sub>算法的增益曲线呈连续平滑的时间最长, 与之形成对比的是AGST算法的增益曲线呈锯齿状变化, 显然, 连续平滑的控制增益对干扰具有更好的估计能力. 干扰发生不连续跳变后, 相比其他3种基于等价控制的算法, AGST的增益变化具有明显的滞后性, 说明基于等价控制的双层自适应律具有更强的抗扰能力, 可以快速响应干扰的不连续变化. 图(b)为双层自适应律的自适应增益 $r(t)$ 变化曲线, 根据其定义式(49),  $r(t)$ 为单调递增函数, 从图中可见,  $r(t)$ 的变化是有界的, 说明理论分析的结论(即注释5)是正确的.

### 5.2 二阶滑模控制器(2-SM controller)

本文提出的变增益快速ST算法也可用于设计二阶滑模控制器, 同样以控制力矩陀螺系统为例. 利用控制力矩陀螺对卫星姿态进行控制时, 要求陀螺转子保持匀速转动或跟踪连续有界变化的指令转速. 在工程中, 设计控制器要同时考虑外扰不确定性和参数不确定性, 因此, 修正转速微分方程为

$$(J + \Delta J)\dot{\Omega} = u(t) + g(t), \quad (67)$$

与式(60)相比, 式(67)中增加了转动惯量摄动项 $\Delta J$ . 控制器设计的目标就是设计驱动力矩 $u(t)$ , 抵消不确定项 $\Delta J$ 和 $g(t)$ 的影响, 并使转速 $\Omega$ 跟踪指令转速 $\Omega_C$ 变化. 为此, 取辅助滑模变量为 $s = \Omega - \Omega_C$ , 推导得滑模微分方程为

$$\dot{s} = \frac{u}{J} + G, \quad (68)$$

其中 $G = -\frac{\Delta J}{J(J + \Delta J)}u + \frac{g}{J + \Delta J} - \dot{\Omega}_C$ 为组合扰动.

根据本文提出的算法, 式(7)和式(20), 分别设计控制律为

$$\begin{cases} u = J\{-\alpha(t)[|s|^{1/2}\text{sgn } s + ks] + Z + \phi\}, \\ \dot{Z} = -\beta(t)[\text{sgn } s + 3k|s|^{1/2}\text{sgn } s + 2k^2s] \end{cases} \quad (69)$$

和

$$\begin{cases} u = J\{-\alpha(t)|s|^{1/2}\text{sgn } s - \eta(t)s + Z + \phi\}, \\ \dot{Z} = -\beta(t)\text{sgn } s - \kappa(t)s. \end{cases} \quad (70)$$

如果组合扰动项 $G$ 一阶可微, 则闭环系统方程可以整理成式(7)和式(20)的形式, 根据前文的理论分析可知, 只要选择合适的参数, 可以在有限时间内实现二阶滑模, 此时,  $\Omega = \Omega_C, \dot{\Omega} = \dot{\Omega}_C$ .

通过仿真对比原算法(ADLST)与两种改进算法

(ADLST<sub>1</sub>与ADLST<sub>2</sub>)的控制效果. 干扰力矩 $g(t)$ 按照式(62)产生, 转动惯量标称值 $J = 1$ , 参数摄动 $\Delta J = 0.5$ , 控制参数取值如表1所列, 仿真结果见图4至图6.

图4显示了不同算法的控制效果. 其中, 图(a)为陀螺转子实际转速曲线, 可以看出改进后的算法能够使实际转速更快的收敛到目标转速. 图(b)为控制误差曲线(根据定义即为滑模变量曲线), 可以看出新的改进型算法不仅收敛速度更快, 应对干扰的不连续跳变还有更强的鲁棒性.

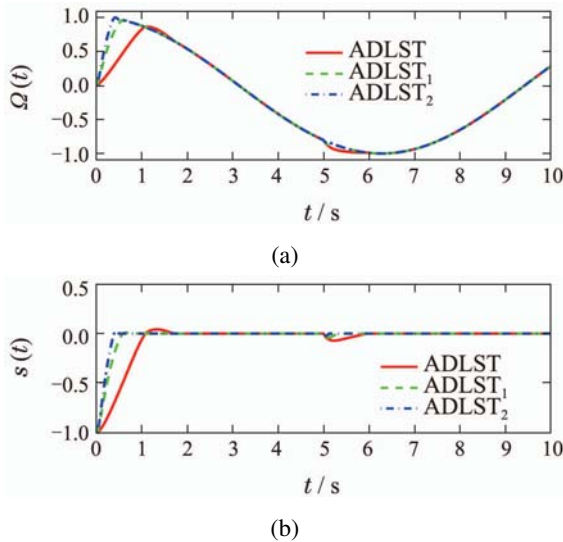


图4 实际转速与控制误差曲线

Fig. 4 Trajectories of actual rotation speed and control error

图5对比了不同算法产生的控制量. 其中, 图(a)为控制量幅值曲线, 显然改进型算法的控制量峰值要高于原算法, 而且第2种改进型算法(ADLST<sub>2</sub>)的峰值最高. 但从图(b)控制量幅值的时间积分来看, 改进型算法的控制能耗与原算法基本相同.

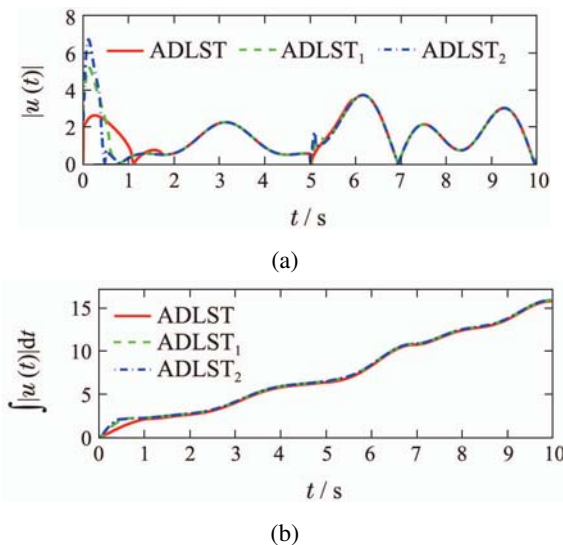


图5 控制量幅值及能耗曲线

Fig. 5 The amplitude of control torque and total energy consumption

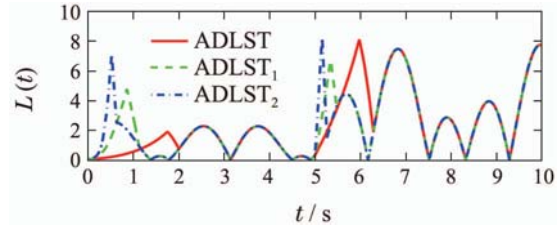


图6 增益变化曲线

Fig. 6 Curves of variable gain

图6为式(46)中自适应增益 $L(t)$ 的变化曲线.  $L(t)$ 代表了“保持滑动模态存在的最小增益”, 当该时变增益连续平滑变化时, 说明系统进入了滑模动态. 从图中可以看出, 第2类改进算法(ADLST<sub>2</sub>)能够以最短的时间实现滑模运动.

## 6 结论(Conclusions)

本文提出了两种具有自适应增益的改进型快速super twisting算法, 第1种算法从趋近律技术的视角出发, 用快速终端滑模趋近律替代原算法的幂次趋近律, 第2种算法通过引入线性项加快收敛速度. 与传统super twisting算法相比, 新算法中还包含一个特有的时变线性项. 通过构造Lyapunov函数, 证明两种算法具有二阶滑模特性, 能在有限时间内收敛, 并且在控制参数相同的条件下收敛时间比原算法更短. 结合双层自适应律方案, 实现了增益自适应调节, 避免增益的过估计问题, 借助Lyapunov分析, 证明在有限时间内可以使控制增益满足super twisting算法的收敛条件, 该自适应方案在等效控制信号存在估计误差的情况下, 仍然可以确保算法收敛条件的成立. 所提出的算法具有广泛的工程应用前景, 既可以用于干扰估计器, 也可以作为2阶滑模控制器. 仿真结果验证了改进的算法具有良好性能, 与原算法相比, 不仅收敛速度更快, 还具有更强的抗干扰跳变的鲁棒性, 同时也没有明显地增加控制所需的能耗.

## 参考文献(References):

- [1] LEVANT A. Robust exact differentiation via sliding mode technique [J]. *Automatica*, 1998, 34(3): 379 – 384.
- [2] LEVANT A. Principles of 2-sliding mode design [J]. *Automatica*, 2007, 43(4): 576 – 586.
- [3] LEVANT A. Homogeneity approach to high-order sliding mode design [J]. *Automatica*, 2005, 41(5): 823 – 830.
- [4] LEVANT A, PAVLOV Y. Generalized homogeneous quasi-continuous controllers [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2008, 18(4): 385 – 398.
- [5] MORENO J A, OSORIO M. A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers [C] // *The 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008. New York: IEEE, 2008: 2856 – 2861.
- [6] DÁVILA A, MORENO J A, FRIDMAN L. Optimal Lyapunov function selection for reaching time estimation of super twisting algorithm [C] // *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision*



- and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. New York: IEEE, 2009: 8405 – 8410.
- [7] MORENO J A, OSORIO M. Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(4): 1035 – 1040.
- [8] ALWI H, EDWARDS C. An adaptive sliding mode differentiator for actuator oscillatory failure case reconstruction [J]. *Automatica*, 2013, 49(2): 642 – 651.
- [9] BANDYOPADHYAY B, JANARDHANAN S, SPURGEON S K. *Advances in Sliding Mode Control* [M]. New York: Springer-Verlag, 2013.
- [10] BARTOLINI G, LEVANT A, PLESTAN F, et al. Adaptation of sliding modes [J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2013, 30(3): 285 – 300.
- [11] TALEB M, LEVANT A, PLESTAN F. Pneumatic actuator control: Solution based on adaptive twisting and experimentation [J]. *Control Engineering Practice*, 2013, 21(5): 727 – 736.
- [12] LU K, XIA Y. Finite-time attitude control for rigid spacecraft-based on adaptive super-twisting algorithm [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(15): 1465 – 1477.
- [13] SHTESSEL Y, TALEB M, PLESTAN F. A novel adaptive-gain super-twisting sliding mode controller: methodology and application [J]. *Automatica*, 2012, 48(5): 759 – 769.
- [14] UTKIN V I, POZNYAK A S. Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: equivalent control method [J]. *Automatica*, 2013, 49(1): 39 – 47.
- [15] UTKIN V I, POZNYAK A S, ORDAZ P. Adaptive super-twist control with minimal chattering effect [C] //2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC). New York: IEEE, 2011: 7009 – 7014.
- [16] EDWARDS C, SHTESSEL Y. Dual-layer adaptive sliding mode control [C] //2014 American Control Conference (ACC). New York: IEEE, 2014: 4524 – 4529.
- [17] EDWARDS C, SHTESSEL Y. Adaptive dual layer second-order sliding mode control and observation [C] //2015 American Control Conference (ACC). New York: IEEE, 2015: 5853 – 5858.
- [18] YU S, YU X, SHIRINZADEH B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode [J]. *Automatica*, 2005, 41(11): 1957 – 1964.
- [19] LU K, XIA Y, ZHU Z, et al. Sliding mode attitude tracking of rigid spacecraft with disturbances [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(2): 413 – 440.
- [20] GAO Weibing. *Theory and Design Method of Variable Structure Control* [M]. Beijing: Science Press, 1996.  
(高为炳. 变结构控制的理论及设计方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1996.)
- [21] EL GHAOU I, FERON E, BALAKRISHNAN V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 1994.
- [22] EDWARDS C, FRIDMAN L, LEVANT A. *Sliding Mode Control and Observation* [M]. New York: Birkhauser, 2014.
- [23] UTKIN V, GULDNER J, SHI J. *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems* [M]. New York: CRC Press, 2009.
- [24] TAN Jian, ZHOU Zhou, ZHU Xiaoping, et al. Attitude control for flying wing unmanned aerial vehicles based on fractional order integral sliding-mode [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(5): 607 – 614.  
(谭健, 周洲, 祝小平, 等. 飞翼布局无人机分数阶积分滑模姿态控制 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(5): 607 – 614.)

#### 作者简介:

**杨雅君** (1987-), 男, 博士研究生, 研究方向为航天器在轨辨识与姿态控制, E-mail: yajusand@163.com;

**廖 瑛** (1961-), 女, 教授, 博士生导师, 研究方向为飞行器系统建模、控制与仿真, E-mail: liaoying1104@163.com;

**尹大伟** (1981-), 男, 工程师, 博士, 研究方向为飞行器系统建模与仿真, E-mail: hjhy\_dw@163.com;

**郑宇昕** (1989-), 男, 博士研究生, 研究方向为飞行器系统参数辨识与故障诊断, E-mail: xyz100826@163.com.