DOI: 10.7641/CTA.2016.50910

三参数区间数多属性决策的后悔理论方法

陈志旺[1,2], 王小飞[1†], 邵玉杰[1], 张子振[1], 李国强[1]

(1. 燕山大学 工业计算机控制工程河北省重点实验室, 河北 秦皇岛 066004;

2. 燕山大学 国家冷轧板带装备及工艺工程技术研究中心, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 本文将后悔理论方法用于解决三参数区间数多属性决策问题. 首先, 提出一种将三参数区间数转换为两参数区间数的方法, 避免了传统三参数区间数在大小比较方面不确定信息的遗失. 其次, 依据两参数区间数决策信息计算不同状态下备选方案及正理想方案各属性的效用值, 从而可得各备选方案的后悔–欣喜值及综合感知效用值. 然后, 针对权重范围已知的情况, 通过构建备选方案综合感知效用最大化优化模型求得属性权重; 针对权重信息完全未知的情况, 提出一种基于注水原理的属性权重求解方法. 最后, 利用属性权重加权求和方法得到备选方案综合效用值, 从而通过比较综合效用值得到方案的排序结果.

关键词: 决策; 多属性决策; 三参数区间数; 后悔理论; 注水原理

中图分类号: N945　　　**文献标识码**: A

Regret theory approach to multiple attribute decision making with three-parameter interval number

CHEN Zhi-wang[1,2], WANG Xiao-fei[1†], SHAO Yu-jie[1], ZHANG Zi-zhen[1], LI Guo-qiang[1]

(1. Key Lab of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China;
2. National Engineering Research Center for Equipment and Technology of Cold Strip Rolling,
Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

Abstract: A kind of regret theory approach is developed for multiple attribute decision making with three-parameter interval number. Firstly, three-parameter interval number is converted into two-parameter interval number before comparison between two three-parameter interval numbers for avoiding loss of uncertain information. Secondly, regret-rejoice value and overall perceived utility value of alternatives are obtained by the utility value of each attribute for alternatives and the positive ideal alternative according to the decision information with two-parameter interval number under different states. Thirdly, if the scope of attribute weights is known，the attribute weights are achieved by constructing a programming model which satisfies the maximum overall perceived utility values of alternatives；if weight information is completely unknown,the attribute weights are got by water-filling theory. Finally overall utility values of alternatives are calculated with weighted sum method, therefore, a ranking of alternatives can be determined by comparison of overall utility value of alternatives.

Key words: decision making; multiple attribute decision making; three-parameter interval number; regret theory; water-filling theory

1 引言(Introduction)

多属性决策在诸多领域中有着广泛的应用, 如工业设计、经济规划、设备检修与维护等. 在实际工程中, 由于工作环境复杂多变、部分数据缺失等客观因素的影响以及决策者知识不足、心理活动等主观因素的作用, 多属性决策研究常常存在以下问题: 1) 决策信息往往具有不确定性, 用精确值来描述决策信息不符合实际, 也难以实现; 2) 随着决策理论研究的不断深入, 选择适合的决策策略对提高解决问题的准确性和效率尤为关键.

收稿日期: 2015−11−16; 录用日期: 2016−06−15.
†通信作者. E-mail: wangxiaofei558@163.com; Tel.: +86 18713513069.
本文责任编委: 贾英民.
国家自然科学基金项目(61403331, 61573305), 河北省自然科学基金青年基金项目(F2014203099), 燕山大学青年教师自主研究计划课题(13LGA006)资助.
Supported by National Natural Science Foundation of China (61403331, 61573305), National Natural Science Foundation for Young Scientist of Hebei Province, China (F2014203099) and Independent Research Program for Young Teachers of Yanshan University, China (13LGA006).

针对问题1), 文献[1]提出三参数区间数的概念, 三参数区间数较两参数区间数不仅保持了区间范围, 而且突出了取值可能性最大的重心, 因此, 许多学者利用三参数区间数理论解决多属性决策问题. 与确定数相比, 三参数区间理论的重难点集中在三参数区间数的大小比较和距离计算.

现有的三参数区间数比较主要有两种类型: 1) 三参数区间数的比较结果是确定数. 文献[2]在确定三参数区间数的正负理想解时, 以三参数区间数的3个参数之和为指标对三参数区间数进行比较. 文献[3]利用三参数区间数的重心和中心两个特征量之和对三参数区间数进行比较. 2) 三参数区间数的比较结果是可能度的形式. 文献[1]出了三参数区间数的排序方法, 通过假设三参数区间数的分布函数来计算两个三参数区间数比较的可能度. 文献[4]综合考虑三参数的重心、中心和不确定度, 提出了一种三参数区间数可能度排序方法. 文献[5]在文献[4]的三参数区间数可能度公式基础上, 提出精确记分函数的概念, 利用精确记分函数对三参数区间数进行比较. 由于只考虑三参数区间数中心及重心, 并没有考虑三参数区间数的不确定度, 得到的结果丢失不确定信息, 因此精确记分函数不能对三参数区间数作出客观、全面的评价. 三参数区间数的距离表达一般有2种类型: 1) 用与距离相关的参量间接代替距离度量. 文献[6]研究三参数区间数决策方法, 提出灰色区间影响度的概念来表示两个三参数区间数的相对关系. 文献[7]提出犹豫三参数区间灰数的概念, 并且给出犹豫三参数区间灰数的相关系数公式, 两个犹豫三参数区间灰数的相关系数越大, 表示其距离越小. 2) 直接用3个参数表示三参数区间数距离, 使其满足距离范数公式的3个性质[4]. 文献[4]在三参数区间数距离公式中, 直接将3个参数对应相减, 并对上、下限和重心赋予不同的权重后求和, 然后证明了满足距离范数公式的性质. 文献[7]在欧式空间距离公式的基础上, 考虑各参数的平均权重, 提出了平均赋权的三参数区间数距离公式. 文献[3, 5]同样在欧式空间距离表达式的基础上, 根据决策者经验、风险偏好来确定上、下限和重心的权重且保证重心的权重最大, 其中文献[3]利用柯西不等式证明了三参数区间数的三角不等式性质.

为了解决问题2), 考虑决策者行为的决策方法主要有两类: 1) 认为决策者的行为是完全理性的, 如期望效用理论; 2) 认为决策者的行为是有限理性的, 如前景理论和后悔理论等. 由于期望效用理论假设人的行为完全理性不符合实际, 在实际决策中有局限性, 因此近年来, 有限理性的研究成为主流, 后悔理论是其中的研究热点. 文献[8–11]在决策过程中均考虑了后悔规避, 文献[8]指出后悔规避是效用函数的类型. 文献[9]将备选方案两两比较后得到后悔值和欣喜值. 文献[10]提出决策者对每个方案存在感知效用的概念, 感知效用包括效用值和后悔值. 文献[11]提出感知效用包括选择当前方案的效用值和与正理想方案比较得到的后悔–欣喜值. 文献[12]分别使用期望效用理论、前景理论和后悔理论的模型描述旅行者决策行为, 3种理论主要区别为: 1) 参数的数目. 期望效用理论没有额外增加参数, 后悔理论根据属性类型最多涉及3个参数, 而前景理论涉及5个参数; 2) 计算方法的简便性. 期望效用理论、后悔理论计算方法简单, 而前景理论计算方法相对复杂; 3) 基本假设. 期望效用理论假设人的行为是完全理性的, 以效用最大化为目标, 而前景理论以参考点信息衡量决策的收益或损失, 后悔理论以后悔最小化为标准, 综合考虑所有方案, 倾向选择欣喜方案而避免选择后悔方案; 4) 捕捉现实行为的能力. 前景理论的预测能力最高, 捕捉现实行为的能力最强, 但是受参考点信息的影响, 相比之下, 后悔理论的预测能力较低. 基于上述对3种决策理论的比较发现, 前景理论虽然可以在决策结果中反映决策者的心理行为, 捕捉现实行为的能力最强, 但是要求较高, 在实际决策中遇到很多困难: 1) 前景理论中的损失和收益都是相对的, 事先选择合适的参考点是问题的关键, 文献[5]应用前景理论时选取不同的参考点, 其决策结果不同; 2) 前景理论涉及的参数多, 在具体应用中需要考虑参数的选择. 文献[13]指出不同类型决策者在建立前景理论模型时, 其中表示受益和损失区域价值幂函数凹凸程度的参数不同, 因此, 在实际决策中需要具体问题具体分析, 设置适合不同类型决策者的参数. 相比之下, 后悔理论不但能解释Kahnem和Tversky[14]所发现的违背期望效用理论现象, 还比前景理论简单、直观, 可操作性强.

针对问题1)–2), 本文在解决三参数区间数多属性决策问题时, 提出将三参数区间数转化为两参数区间数的公式, 利用两参数区间数可能度公式解决三参数区间数的大小比较问题; 根据实际需要提出两种属性权重的解决方法; 利用后悔理论得到的备选方案综合区间效用值, 并对其进行大小比较得到备选方案排序, 实现三参数区间数多属性决策问题的求解.

2　三参数区间数(Three-parameter interval number)

2.1　两参数区间数的基本概念(Basic concept of two-parameter interval number)

定义 1　设$a=[a^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{R}}]$为两参数区间数, 则$a^{\mathrm{c}}=\dfrac{a^{\mathrm{L}}+a^{\mathrm{R}}}{2}$, $a^{\mathrm{r}}=\dfrac{a^{\mathrm{R}}-a^{\mathrm{L}}}{2}$分别为$a$的中点和不确定度(半径).

设$a=[a^{\mathrm{L}},a^{\mathrm{R}}]$和$b=[b^{\mathrm{L}},b^{\mathrm{R}}]$为两个两参数区间数, 且$0\leqslant a^{\mathrm{L}}\leqslant a^{\mathrm{R}}$, $0\leqslant b^{\mathrm{L}}\leqslant b^{\mathrm{R}}$, 则其运算法则详见

文献[15]. 根据文献[16]两参数区间数6种位置关系可得区间可能度公式, 如式(1):

$$p(a \leqslant b)=\begin{cases}0, & b^{\mathrm{R}} \leqslant a^{\mathrm{L}}, \\ \dfrac{(b^{\mathrm{R}}-a^{\mathrm{L}})^{2}}{8 a^{\mathrm{r}} b^{\mathrm{r}}}, & b^{\mathrm{L}}<a^{\mathrm{L}}<b^{\mathrm{R}}<a^{\mathrm{R}}, \\ \dfrac{b^{\mathrm{c}}-a^{\mathrm{L}}}{2 a^{\mathrm{r}}}, & a^{\mathrm{L}}<b^{\mathrm{L}}<b^{\mathrm{R}} \leqslant a^{\mathrm{R}}, \\ 1-\dfrac{(a^{\mathrm{R}}-b^{\mathrm{L}})^{2}}{8 a^{\mathrm{r}} b^{\mathrm{r}}}, & a^{\mathrm{L}} \leqslant b^{\mathrm{L}}<a^{\mathrm{R}}<b^{\mathrm{R}}, \\ \dfrac{b^{\mathrm{R}}-a^{\mathrm{c}}}{2 b^{\mathrm{r}}}, & b^{\mathrm{L}} \leqslant a^{\mathrm{L}}<a^{\mathrm{R}} \leqslant b^{\mathrm{R}}, \\ 1, & a^{\mathrm{R}} \leqslant b^{\mathrm{L}},\end{cases} \tag{1}$$

当$p(a \leqslant b) \geqslant 0.5$, 说明两参数区间数$a \leqslant b$, 否则$a>b$.

2.2 三参数区间数的排序(Ranking of three-parameter interval number)

定义 2 设a为一个三参数区间数, 记为$a=[a^{\mathrm{L}}, a^{*}, a^{\mathrm{R}}]$, 其中$a^{\mathrm{L}}, a^{\mathrm{R}}$分别表示三参数区间数的上、下限, a^{*}表示三参数区间数中取值可能性最大的数, 称之为重心或理想值.

三参数区间数研究的重点、难点在于三参数区间数的排序方法. 现有的三参数区间数排序方法考虑情况不全面, 只是单纯考虑三参数区间数的3个参数, 并没有考虑其不确定度. 按照两参数区间数比较思路(式(1)), 三参数区间数的大小比较也应该基于两个三参数区间数的相对位置关系, 但是由于引入了重心, 全面考虑三参数区间数所有的位置关系比较复杂. 因此, 本文将三参数区间数转换成两参数区间数, 然后应用两参数区间数可能度方法进行比较.

由定义1可知, 两参数区间数$a=[a^{\mathrm{L}}, a^{\mathrm{R}}]$可以写成中点、半径的形式: $a=\langle a^{\mathrm{c}}, a^{\mathrm{r}}\rangle$, 其中: a^{c} 为两参数区间数a的中点, a^{r}为两参数区间数a的半径. 因此, 两参数区间数在实数运算的基础上又可以写成

$$a=[a^{\mathrm{L}}, a^{\mathrm{R}}]=[a^{\mathrm{c}}-a^{\mathrm{r}}, a^{\mathrm{c}}+a^{\mathrm{r}}].$$

针对两参数区间数, 区间数中点反映了数据的集中程度, 区间数半径反映了数据的离散程度, 区间数半径越大, 其不确定性越大. 三参数区间数相比于两参数区间数, 增加了最可能发生的重心信息. 因此, 在三参数区间数转换为两参数区间数的过程中需要综合考虑三参数区间数的重心和中心信息, 将重心信息添加到区间数中点信息中, 如式(2)所示:

$$a=[(a^{*}+a^{\mathrm{c}})-a^{\mathrm{r}},(a^{*}+a^{\mathrm{c}})+a^{\mathrm{r}}]. \tag{2}$$

在实际决策过程中, 决策者既然能给出最可能发生点的信息, 必然会对重心发生可能度作出定性或定量的预估, 因此需要对重心和中点信息进行调整, 在式(2)中设计一个权系数τ($\tau \in[0,1]$), 如式(3)所示:

$$a=[\{a^{*}+\tau(a^{\mathrm{c}})\}-a^{\mathrm{r}},\{a^{*}+\tau(a^{\mathrm{c}})\}+a^{\mathrm{r}}]. \tag{3}$$

式(3)说明如下:

1) 权系数τ与a^{*}发生的可能度有关, a^{*}发生的可能度大, 则重心对三参数区间数影响的权重大, τ较小; 反之τ较大.

2) 三参数区间数转换为两参数区间数过程中, 不确定度保持不变, 依然为$\dfrac{a^{\mathrm{R}}-a^{\mathrm{L}}}{2}$, 转换过程中重心信息没有缺失, 体现在两参数区间数的上下界中.

3) 当三参数区间数重心和中心重合, 即$a^{*}=\dfrac{a^{\mathrm{R}}+a^{\mathrm{L}}}{2}$且$\tau=0$, 三参数区间数和两参数区间数等价, 可将$\tau=0$和$a^{*}=\dfrac{a^{\mathrm{R}}+a^{\mathrm{L}}}{2}$代入式(3), 可得$a=[a^{\mathrm{L}}, a^{\mathrm{R}}]$. 因此, 式(3)在上述特殊情况下能够推得三参数区间数和两参数区间数等价.

三参数区间数利用式(3)转换成两参数区间数后, 可利用式(1)比较大小, 本文将此方法与文献[5]方法进行对比, 结果如表1所示, 得到的结果与原文完全一致. 为进一步验证本文方法在具体决策问题中的可行性, 对文献[4–5, 17]中实例进行实验仿真, 只替换其中的三参数区间数比较公式, 其它决策算法不变, 得到的结果与原文完全一致.

表 1 本文与文献[5]中方法所得的结果

Table 1 The result comparison of this paper and [5]

三参数区间数a, b	依据式(3)调整的两参数区间数比较结果	文献[5]中比较结果
$[10,35,45]$ $[40,60,70]$	$p([45,80]<[100,130])=$ $1>0.5$	$a<b$
$[20,40,60]$ $[20,35,60]$	$p([60,100]<[55,95])=$ $0.3828<0.5$	$a>b$
$[20,35,50]$ $[15,40,45]$	$p([55,85]=[55,85])=$ 0.5	$a=b$

分析表1数据可知: 1) 本文算法不但给出大小比较结果, 还给出了这种结果的可能度信息. 例如第2组数据比较两个三参数区间数a, b, 将三参数区间数转换为两参数区间数后比较结果为$p([60,100]<[55,95])=0.3828<0.5$, 即三参数区间数$a>b$; 2) 由定义2 可知三参数区间数信息主要包括概率最大的重心和上下限表示的不确定度, 由第3组数据$a=[20,35,50]$和$b=[15,40,45]$ 可知, 三参数区间数的相等不是上、下限(不确定度)和重心的完全相等, 而是不确定度和重心的综合信息相等, 并且不确定度和重心紧密相关, 即式(3)中转换后的两参数区间数上、下限不仅包含重心信息, 也有不确定度信息. 文献[5]中的大小比较方法没有包含不确定度信息, 例如$a=[1,2,3]$ 和$b=[1.5,2,2.5]$ 进行比较, 按照文献 [5]的方法$G(a)=G(b)=2$, 但明显看出a和b的重心信息相等,

不确定度不等, 因此a和b是不相等的, 利用本文的方法就能避免此缺陷.

基于上述理论分析和实例验证, 说明本文对三参数区间数处理方法具有一定的可行性. 需要说明的是, 本文将重心在区间数端点考虑, 而不是忽略重心, 转换后的两参数区间数方法处理的仍是三参数区间数问题.

3　后悔理论(Regret theory)

后悔理论的基本思想是决策者在决策过程中选择一个方案的前提下, 如果发现选择其他备选方案可以获得更好的结果, 会感到后悔, 反之, 则会感到欣喜. 因此, 决策者在决策过程中会对决策可能产生的后悔或欣喜有所预期, 并试图避免选择产生后悔的方案, 而趋向于选择产生欣喜的方案. 后悔理论是一种效用函数类型的理论, 决策者的感知效用由当前选择方案的效用函数和后悔–欣喜函数两部分组成.

针对备选方案的不同类型属性, 其效用函数不同, 若属性为效益型, 其效用函数为

$$v(x)=\frac{1-\exp(-\alpha x)}{\alpha},\ 0<\alpha<1, \tag{4}$$

式中: α为决策者风险规避系数, α越大, 则相同属性x的效用值越大, 表现为决策者偏好效益型属性的程度越大 [9]. 若属性为成本型, 其效用函数为

$$v(x)=1-\exp(\beta x),\ 0<\beta<1, \tag{5}$$

式中: β为决策者风险规避系数, β越大, 则相同属性x的效用值越小, 表现为决策者厌恶成本型属性的程度越大[9]. 假设备选方案A_1, A_2的决策信息分别为x_1, x_2, 那么决策者选择方案A_1而未选择A_2产生的后悔–欣喜函数为

$$R\left(x_1,x_2\right)=1-\exp(-\delta(v(x_1)-v(x_2))), \tag{6}$$

式中: $v(x_1)$和$v(x_2)$分别表示备选方案A_1, A_2的效用函数, δ为决策者的后悔规避系数, $\delta(\delta>0)$越大, 效用差相等情况下, 决策者的后悔–欣喜值越大. 当$R(x_1,x_2)>0$时, $R(x_1,x_2)$是欣喜值, 表示决策者对选择方案A_1 而放弃方案A_2感到欣喜; 当$R(x_1,x_2)<0$ 时, $R(x_1,x_2)$是后悔值, 表示决策者对选择方案A_1而放弃方案A_2感到后悔[9].

因此, 以方案A_2为标准, 决策者对方案A_1的感知效用函数为

$$u\left(x_1,x_2\right)=v(x_1)+R\left(x_1,x_2\right). \tag{7}$$

4　三参数区间数多属性决策问题(Multiple attribute decision making with three-parameter interval number)

4.1　决策问题描述(Decision making statement)

设$\boldsymbol{D}_l(l=1,2,\cdots,t)$为第$l$种状态下的决策矩阵, 状态$l$发生的概率为$\bar{\boldsymbol{P}}_l$, 不同状态决策信息中, $\boldsymbol{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$为方案集, $\boldsymbol{C}=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$为属性集, 则第$l$ 种状态关于方案集$\boldsymbol{A}$在属性集$\boldsymbol{C}$下的决策矩阵为

$$\boldsymbol{D}_l=\begin{bmatrix}\xi_{11}^l & \xi_{12}^l & \cdots & \xi_{1n}^l\\ \xi_{21}^l & \xi_{22}^l & \cdots & \xi_{2n}^l\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \xi_{m1}^l & \xi_{m2}^l & \cdots & \xi_{mn}^l\end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中: $\xi_{ij}^l=[a_{ij}^{\rm L},a_{ij}^*,a_{ij}^{\rm R}](l=1,2,\cdots,T;i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 是第l种状态方案$\boldsymbol{A}_i$在属性$\boldsymbol{C}_j$下的三参数区间数决策信息.

4.2　三参数区间数多属性决策方法 (Approach to multiple attribute decision making with three-parameter interval number)

对于第l种状态, 方案$\boldsymbol{A}_i$在属性$\boldsymbol{C}_j$下的决策信息$\xi_{ij}^l=[a^{\rm L},a^*,a^{\rm R}]$, 利用式(3)将三参数区间数转换为两参数区间数, 得到两参数区间信息决策矩阵$\boldsymbol{T}_l$:

$$\boldsymbol{T}_l=\begin{bmatrix}\varsigma_{11}^l & \varsigma_{12}^l & \cdots & \varsigma_{1n}^l\\ \varsigma_{21}^l & \varsigma_{22}^l & \cdots & \varsigma_{2n}^l\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \varsigma_{m1}^l & \varsigma_{m2}^l & \cdots & \varsigma_{mn}^l\end{bmatrix}, \tag{9}$$

其中$\varsigma_{ij}^l=[b_{ij}^{\rm L},b_{ij}^{\rm R}]$为方案$\boldsymbol{A}_i$在属性$\boldsymbol{C}_j$下的两参数区间数决策信息.

根据属性决策信息$\varsigma_{ij}^l=[b_{ij}^{\rm L},b_{ij}^{\rm R}]$类型的不同, 对两参数区间决策矩阵进行归一化处理 [9], 对于效益型属性:

$$\begin{cases} r_{ij}^{\rm L}=\dfrac{b_{ij}^{\rm L}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{b_{ij}^{\rm L}\}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{b_{ij}^{\rm R}\}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{b_{ij}^{\rm L}\}},\\ r_{ij}^{\rm R}=\dfrac{b_{ij}^{\rm R}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{b_{ij}^{\rm L}\}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{b_{ij}^{\rm R}\}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{b_{ij}^{\rm L}\}}. \end{cases} \tag{10}$$

对于成本型属性:

$$\begin{cases} r_{ij}^{\rm L}=\dfrac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{b_{ij}^{\rm R}\}-b_{ij}^{\rm R}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{b_{ij}^{\rm R}\}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{b_{ij}^{\rm L}\}},\\ r_{ij}^{\rm R}=\dfrac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{b_{ij}^{\rm R}\}-b_{ij}^{\rm L}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{b_{ij}^{\rm R}\}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{b_{ij}^{\rm L}\}}. \end{cases} \tag{11}$$

得到归一化的区间决策矩阵$\boldsymbol{R}_l$:

$$\boldsymbol{R}_l=\begin{bmatrix}\zeta_{11}^l & \zeta_{12}^l & \cdots & \zeta_{1n}^l\\ \zeta_{21}^l & \zeta_{22}^l & \cdots & \zeta_{2n}^l\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \zeta_{m1}^l & \zeta_{m2}^l & \cdots & \zeta_{mn}^l\end{bmatrix}, \tag{12}$$

其中$\zeta_{ij}^l=\left[r_{ij}^{\rm L},r_{ij}^{\rm R}\right]$为方案$\boldsymbol{A}_i$在属性$\boldsymbol{C}_j$下的两参数区

间决策信息的归一化决策信息. 利用式(1)对第l种状态在不同属性下对各备选方案的区间属性值进行可能度比较得到各属性的正理想方案矩阵为

$$\boldsymbol{A}_l^+=\left[\zeta_1^{l+},\zeta_2^{l+},\cdots,\zeta_n^{l+}\right]. \tag{13}$$

特别地, 利用式(10)–(11)对两参数区间决策矩阵进行归一化处理, 不仅将区间信息映射到0–1之间的两参数区间数, 而且将数据属性统一转化为效益型属性, 则各属性的正理想解为最大值, 即$\zeta_j^{l+}=[r_j^{\mathrm{L}+},r_j^{\mathrm{R}+}]=\max_i([r_{ij}^{\mathrm{L}},r_{ij}^{\mathrm{R}}])$表示属性$\boldsymbol{C}_j$下的正理想解.

依据式(12)中的数据利用式(4)求属性的效用矩阵:

$$\boldsymbol{V}_l=\begin{bmatrix}\chi_{11}^l & \chi_{12}^l & \cdots & \chi_{1n}^l\\ \chi_{21}^l & \chi_{22}^l & \cdots & \chi_{2n}^l\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \chi_{m1}^l & \chi_{m2}^l & \cdots & \chi_{mn}^l\end{bmatrix}, \tag{14}$$

其中$\chi_{ij}^l=[c_{ij}^{\mathrm{L}},c_{ij}^{\mathrm{R}}]$为方案$\boldsymbol{A}_i$在属性$\boldsymbol{C}_j$下的两参数区间效用值.

依据式(13)中的数据利用式(4)得到正理想方案的效用矩阵:

$$\boldsymbol{V}_l^+=\left[\chi_1^{l+},\chi_2^{l+},\cdots,\chi_n^{l+}\right], \tag{15}$$

其中$\chi_j^{l+}=[c_j^{\mathrm{L}},c_j^{\mathrm{R}}]$为正理想方案在属性$\boldsymbol{C}_j$下的两参数区间效用值.

一般来说, 对备选方案两两比较更符合决策者的正常思维, 但是在多属性决策问题中, 两两比较备选方案属性信息会增大工作量, 增加算法的复杂性. 而选择将备选方案和正理想方案作比较, 不仅能满足决策要求, 而且简化了算法, 提高了效率, 因此本文采用与正理想方案相比较的思路. 根据式(6)针对第l种状态属性$\boldsymbol{C}_j$, 决策者选择方案$\boldsymbol{A}_i$而未选择正理想方案$\boldsymbol{A}^+$的后悔–欣喜函数为

$$R(x_{ij}^l,x_j^{l+})=1-\exp(-\delta(v(x_{ij}^l)-v(x_j^{l+}))), \tag{16}$$

其中: x_{ij}^l为第l种状态方案$\boldsymbol{A}_i$在属性$\boldsymbol{C}_j$下的决策信息; x_j^{l+}为第l种状态正理想方案$\boldsymbol{A}^+$在属性$\boldsymbol{C}_j$下的决策信息, 则$v(x_{ij}^l)$为决策者对方案$\boldsymbol{A}_i$在属性$\boldsymbol{C}_j$下的效用值; $v(x_j^{l+})$为决策者对正理想方案$\boldsymbol{A}^+$下的属性$\boldsymbol{C}_j$的效用值.

同理, 根据式(7)可得决策者对第l种状态, 方案$\boldsymbol{A}_i$在属性$\boldsymbol{C}_j$下的感知效用函数为

$$u(x_{ij}^l)=v(x_{ij}^l)+R(x_{ij}^l,x_j^{l+}). \tag{17}$$

依据式(14)–(15)的数据利用式(17)求得第l种状态下决策者的感知效用矩阵:

$$\boldsymbol{U}_l=\begin{bmatrix}u_{11}^l & u_{12}^l & \cdots & u_{1n}^l\\ u_{21}^l & u_{22}^l & \cdots & u_{2n}^l\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ u_{m1}^l & u_{m2}^l & \cdots & u_{mn}^l\end{bmatrix}, \tag{18}$$

其中$u_{ij}^l=[d_{ij}^{\mathrm{L}},d_{ij}^{\mathrm{R}}]$为第$l$种状态决策者针对方案$\boldsymbol{A}_i$属性$\boldsymbol{C}_j$的感知效用值.

由效用理论求得综合感知效用矩阵:

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \varphi_{m1} & \varphi_{m2} & \cdots & \varphi_{mn}\end{bmatrix}, \tag{19}$$

其中:

$$\varphi_{ij}=[\varphi_{ij}^{\mathrm{L}},\varphi_{ij}^{\mathrm{R}}]=\sum_{l=1}^{t}u_{ij}^l\times\bar{P}_l=\sum_{l=1}^{t}([d_{ij}^{\mathrm{L}},d_{ij}^{\mathrm{R}}]\times\bar{P}_l)$$

为方案$\boldsymbol{A}_i$在属性$\boldsymbol{C}_j$下的综合感知效用值, $\bar{P}_l$为第l种状态发生的概率, 若$\bar{P}_l$为三参数区间数, 则需利用式(3) 转换为两参数区间数, 若$\bar{P}_l$为实数, 则$\bar{P}_l^{\mathrm{L}}=\bar{P}_l^{\mathrm{R}}$.

再利用属性权重对备选方案$\boldsymbol{A}_i$在属性$\boldsymbol{C}_j$下的综合感知效用值进行加权求和, 得到备选方案$\boldsymbol{A}_i$的综合效用矩阵:

$$\boldsymbol{U}'=\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_m\end{bmatrix}, \tag{20}$$

其中:

$$\gamma_i=[\gamma_i^{\mathrm{L}},\gamma_i^{\mathrm{R}}]=\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}\omega_j=\sum_{j=1}^{n}([\varphi_{ij}^{\mathrm{L}},\varphi_{ij}^{\mathrm{R}}]\times\omega_j)$$

为方案$\boldsymbol{A}_i$的综合效用值, ω_j为属性$\boldsymbol{C}_j$的权重, 通常情况下属性的权重信息并不已知.

利用式(1)对各备选方案的区间综合效用$[\gamma_i^{\mathrm{L}},\gamma_i^{\mathrm{R}}]$(式(20))两两比较, 得到可能度矩阵$\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm}\end{bmatrix}, \tag{21}$$

其中: $p_{ik}(\gamma_i\leqslant\gamma_k,\ i=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,m)$表示方案$\boldsymbol{A}_k$优于方案$\boldsymbol{A}_i$的可能度, 若$p_{ik}\geqslant 0.5$, 说明$\boldsymbol{A}_k$优于$\boldsymbol{A}_i$. 可能度矩阵$\boldsymbol{P}=(p_{ik})_{m\times m}$是一个互补判断矩阵(满足$p_{ik}\geqslant 0,\ p_{ik}+p_{ki}=1, p_{ii}=0.5$).

利用文献[16]给出的排序公

$$\theta_i=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}p_{ik}+\dfrac{m}{2}-1}{m(m-1)}(i=1,2,\cdots,m) \tag{22}$$

得到可能度矩阵$\boldsymbol{P}$排序向量$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)^{\mathrm{T}}$, 并对各方案的排序向量$\boldsymbol{\theta}_i$进行比较排序, 最终确定最优方案.

5 求解多属性决策属性权重 (Solving attribute weights of multiple attribute decision making)

5.1 属性权重范围已知的情况(Scope of attribute weights known)

由文献[19]算法, 针对方案$\boldsymbol{A}_i$在属性$\boldsymbol{C}_j$下的综合感知效用值(式(19)), 设最优属性权重矩阵:

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1n}\\ \omega_{21} & \omega_{22} & \ldots & \omega_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \omega_{m1} & \omega_{m2} & \ldots & \omega_{mn}\end{bmatrix}, \tag{23}$$

其中$\omega_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$表示方案$\boldsymbol{A}_i$中属性$\boldsymbol{C}_j$的权重.

令$\boldsymbol{\varGamma}=(UW^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(UW^{\mathrm{T}})=(WU^{\mathrm{T}})(UW^{\mathrm{T}})$, 得到$\boldsymbol{\varGamma}$的归一化特征向量$\boldsymbol{\rho}=[\rho_1\ \ \rho_2\ \ \cdots\ \ \rho_m]^{\mathrm{T}}$, 该特征向量可以作为备选方案的离散投影因子, 表示备选方案的客观权重, 最后计算式(20)中属性权重为

$$\boldsymbol{\omega}=W^{\mathrm{T}}\rho=\begin{bmatrix}\omega_{11} & \omega_{21} & \cdots & \omega_{m1}\\ \omega_{12} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{m2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \omega_{1n} & \omega_{2n} & \cdots & \omega_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \vdots\\ \rho_m\end{bmatrix}. \tag{24}$$

在实际决策过程中, 决策者只能根据掌握的有限信息和个人主观偏好给出属性权重的合理范围, 往往不能精确到具体的数, 即式(23)中的ω_{ij}只知道大概范围, 而不知其精确值. 为求解最优属性权重, 本文以备选方案的综合感知效用值最大化为原则建立优化模型, 即

$$\begin{aligned}&\max\ U_i=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\varphi_{ij},\ i=1,2,\cdots,m,\\ &\text{s.t. }\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}=1,\ \omega_{ij}\geqslant 0,\\ &\qquad \underline{\omega}_{ij}\leqslant\omega_{ij}\leqslant\bar{\omega}_{ij},\end{aligned} \tag{25}$$

其中$[\underline{\omega}_{ij},\bar{\omega}_{ij}]$为权重信息$\omega_{ij}$ 的大致范围. 将式(19)中的$\varphi_{ij}=[\varphi_{ij}^{\mathrm{L}},\varphi_{ij}^{\mathrm{R}}]$代入式(25)中得:

$$\begin{aligned}&\max\ U_i=[\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\varphi_{ij}^{\mathrm{L}},\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\varphi_{ij}^{\mathrm{R}}],\\ &\text{s.t. }\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}=1,\ \ \omega_{ij}\geqslant 0,\\ &\qquad \underline{\omega}_{ij}\leqslant\omega_{ij}\leqslant\bar{\omega}_{ij},\end{aligned} \tag{26}$$

式(26)为有2个目标的多目标优化问题. 为此, 采用线性加权法将区间多目标优化问题转换为确定性单目标优化问题:

$$\begin{aligned}&\max\ F_i=(1-\varepsilon)\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_{ij}\varphi_{ij}^{\mathrm{R}}+\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_{ij}\varphi_{ij}^{\mathrm{L}}}{2}+\\ &\qquad\varepsilon\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_{ij}\varphi_{ij}^{\mathrm{R}}-\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_{ij}\varphi_{ij}^{\mathrm{L}}}{2},\\ &\text{s.t. }\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}=1,\ \omega_{ij}\geqslant 0,\\ &\qquad \underline{\omega}_{ij}\leqslant\omega_{ij}\leqslant\bar{\omega}_{ij},\end{aligned} \tag{27}$$

式中: F_i为目标评价函数, $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$为目标权系数. 式(27)可用MATLAB遗传算法工具箱的fmincon函数求解. 依据模型(27)可求得式(23)中属性权重矩阵$\boldsymbol{W}$, 然后由式(24)求得各属性权重.

5.2 属性权重完全未知的情况(Attribute weights completely unknown)

由于无线通信领域的注水原理[20]信道功率分配机制与属性权重的分配机制非常相似, 因此, 本文将注水原理应用到式(20)完全未知的ω_j确定中, 则各属性包含信息总容量的计算式可表示为

$$CW=\sum_{k=1}^{N}\log_2(1+\frac{\mu_j\omega_j}{\sigma_j}). \tag{28}$$

针对不同状态下的两参数区间决策信息(式(9)), 由效用理论得到综合决策信息$\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1n}\\ \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \psi_{m1} & \psi_{m2} & \cdots & \psi_{mn}\end{bmatrix}, \tag{29}$$

其中:

$$\psi_{ij}=[\psi_{ij}^{\mathrm{L}},\psi_{ij}^{\mathrm{R}}]=\sum_{l=1}^{t}\varsigma_{ij}^{l}\times\bar{P}_l=\sum_{l=1}^{t}([b_{ij}^{\mathrm{L}},b_{ij}^{\mathrm{R}}]\times\bar{P}_l)$$

为方案$\boldsymbol{A}_i$ 在属性$\boldsymbol{C}_j$下的两参数区间数综合决策信息; ς_{ij}^{l}为第l种状态方案$\boldsymbol{A}_i$在属性$\boldsymbol{C}_j$下的两参数决策信息, 见式(9), $\bar{P}_l$为第l种状态发生的概率.

因此, 若要得到最优的权重分配方案, 需要属性总容量达到最大值, 建立属性总容量最大化优化模型:

$$\begin{aligned}&\max\ CW=\sum_{j=1}^{n}\log_2(1+\frac{\mu_j\omega_j}{\sigma_j}),\\ &\text{s.t. }\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1,\ \omega_j\geqslant 0,\end{aligned} \tag{30}$$

其中: μ_j为第j个属性值的均值, 即

$$\mu_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\psi_{ij}; \tag{31}$$

σ_j为第j个属性值的标准差, 即

$$\sigma_j=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\psi_{ij}-\mu_j)^2}. \tag{32}$$

由于综合决策信息$\psi_{ij}=[\psi_{ij}^{\mathrm{L}},\psi_{ij}^{\mathrm{R}}]$是区间数, 因此式(31)–(32)中的计算结果也为区间数, 从而将$\mu_j=$

$[\mu_j^{\mathrm{L}}, \mu_j^{\mathrm{R}}]$和$\sigma_j = [\sigma_j^{\mathrm{L}}, \sigma_j^{\mathrm{R}}]$带入式(30)中得

$$\begin{aligned} \max\ CW = [&\sum_{j=1}^{n} \log(1+\frac{\mu_j^{\mathrm{L}}\omega_j}{\sigma_j^{\mathrm{R}}}),\\ &\sum_{j=1}^{n} \log(1+\frac{\mu_j^{\mathrm{R}}\omega_j}{\sigma_j^{\mathrm{L}}})], \end{aligned} \tag{33}$$
$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1, \omega_j \geqslant 0.$$

式(33)为有2个目标的多目标优化问题. 为此, 采用线性加权法将区间多目标优化问题转换为确定性单目标优化问题:

$$\begin{aligned} &\max\ CW' = \\ &(1-\varepsilon)\frac{\sum_{j=1}^{n}\log_2(1+\frac{\mu_j^{\mathrm{R}}\omega_j}{\sigma_j^{\mathrm{L}}})+\sum_{j=1}^{n}\log_2(1+\frac{\mu_j^{\mathrm{L}}\omega_j}{\sigma_j^{\mathrm{R}}})}{2}+\\ &\varepsilon\frac{\sum_{j=1}^{n}\log_2(1+\frac{\mu_j^{\mathrm{R}}\omega_j}{\sigma_j^{\mathrm{L}}})-\sum_{j=1}^{n}\log_2(1+\frac{\mu_j^{\mathrm{L}}\omega_j}{\sigma_j^{\mathrm{R}}})}{2}, \end{aligned} \tag{34}$$
$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1,\ \omega_j \geqslant 0,$$

式中: CW'为目标评价函数, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$为目标权系数. 式(34)可利用MATLAB遗传算法工具箱的fmincon函数求解得到各属性权重.

6 算法步骤(Steps of algorithm)

步骤 1 利用式(3)将三参数区间数转化为两参数区间数, 对不同状态下的三参数区间数决策矩阵转换为两参数区间数决策矩阵(式(9));

步骤 2 针对不同属性, 利用式(10)–(11)对不同状态下两参数区间数决策矩阵进行归一化处理, 得到归一化决策矩阵(式(12)), 并求解不同状态下各属性的正理想方案(式(13));

步骤 3 利用式(4)求解不同状态下各属性的效用值(式(14))及其正理想方案的效用值(式(15));

步骤 4 利用式(16)–(17)分别求解不同状态下备选方案各属性的后悔–欣喜值及感知效用值, 从而利用效用理论求解综合感知效用值(式(19));

步骤 5 通过求解式(27)(34)的优化问题得到属性权重;

步骤 6 利用属性权重对备选方案的综合感知效用值进行属性加权, 得到备选方案的综合效用(式(20)); 利用式(21)–(22)对备选方案的两参数区间综合效用值进行区间可能度比较, 最终确定备选方案的优劣排序.

7 仿真分析(Simulation analysis)

利用文献[5]中三参数区间数多属性决策案例验证本文所提决策方法的有效性. 考虑某地区电网对整个地区供电服务进行整合的决策问题, 有5种组合方案分别记为$\boldsymbol{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, 3个评价属性$\boldsymbol{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$, 评价属性分别是启动所用机组时间、启动机组容量、负荷重要程度. 其中: C_1为成本型属性, C_2, C_3为效益型属性. 由于用户的用电量会随着外界环境和时间发生变化, 各个属性会面临3种可能用电量状态, 发生概率分别为$\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$. 专家根据上述3个评价属性对5个供选择的组合方案进行评估详见文献[5].

步骤 1 利用式(3)将三参数区间数转换为两参数区间数, 得到用电量3种状态下的两参数区间决策信息, 见表2.

表 2 两参数区间数多属性决策表

Table 2 The data of multiple attribute decision making with two-parameter interval number

方案	用电量大时			用电量中等时			用电量小时		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
A_1	$[115,135]$	$[380,410]$	$[60,90]$	$[80,100]$	$[220,245]$	$[50,70]$	$[40,55]$	$[205,235]$	$[40,55]$
A_2	$[105,125]$	$[250,330]$	$[130,160]$	$[50,75]$	$[240,275]$	$[105,125]$	$[35,60]$	$[225,250]$	$[80,115]$
A_3	$[90,105]$	$[260,310]$	$[110,125]$	$[45,70]$	$[240,290]$	$[90,105]$	$[35,45]$	$[180,230]$	$[55,75]$
A_4	$[95,110]$	$[370,400]$	$[160,180]$	$[50,80]$	$[225,265]$	$[125,150]$	$[40,55]$	$[195,220]$	$[65,100]$
A_5	$[85,105]$	$[400,425]$	$[145,165]$	$[70,85]$	$[240,300]$	$[115,135]$	$[50,70]$	$[200,240]$	$[65,90]$

步骤 2 利用式(10)–(11)将两参数区间决策矩阵归一化处理, 得到归一化的区间决策信息, 并且确定不同状态下各属性的正理想方案.

步骤 3 利用式(4)计算不同状态下各属性及其正理想方案的效用值, 见表3–4, 式中$\alpha = 0.02$.

步骤 4 利用式(16)计算不同属性下各备选方案的后悔–欣喜值, 式中$\delta = 0.3$, 进而利用式(17)计算不同属性下各备选方案的感知效用值, 见表5–6.

表 3 不同状态下各属性及其正理想方案效用表I

Table 3 The utility values of each attribute and their positive ideal alternative under different states I

方案	用电量大时			用电量中等时		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
A_1	$[0.0000, 0.3984]$	$[0.7374, 0.9060]$	$[0.0000, 0.2494]$	$[0.0000, 0.3623]$	$[0.0000, 0.3115]$	$[0.0000, 0.1996]$
A_2	$[0.1996, 0.5964]$	$[0.0000, 0.4551]$	$[0.5799, 0.8264]$	$[0.4525, 0.9009]$	$[0.2494, 0.6828]$	$[0.5470, 0.7444]$
A_3	$[0.5964, 0.8919]$	$[0.0571, 0.3417]$	$[0.4149, 0.5387]$	$[0.5425, 0.9901]$	$[0.2494, 0.8674]$	$[0.3984, 0.5470]$
A_4	$[0.4975, 0.7936]$	$[0.6810, 0.8498]$	$[0.8264, 0.9901]$	$[0.3623, 0.9009]$	$[0.0625, 0.5593]$	$[0.7444, 0.9901]$
A_5	$[0.5964, 0.9901]$	$[0.8498, 0.9901]$	$[0.7033, 0.8674]$	$[0.2720, 0.5425]$	$[0.2494, 0.9901]$	$[0.6458, 0.8428]$
A^+	$[0.5964, 0.9901]$	$[0.8498, 0.9901]$	$[0.8264, 0.9901]$	$[0.5425, 0.9901]$	$[0.2494, 0.9901]$	$[0.7444, 0.9901]$

表 4 不同状态下各属性及其正理想方案效用表II

Table 4 The utility values of each attribute and their positive ideal alternative under different states II

方案	用电量小时		
	C_1	C_2	C_3
A_1	$[0.4267, 0.8498]$	$[0.3559, 0.7796]$	$[0.0000, 0.1996]$
A_2	$[0.2849, 0.9901]$	$[0.6387, 0.9901]$	$[0.5305, 0.9901]$
A_3	$[0.7092, 0.9901]$	$[0.0000, 0.7092]$	$[0.1996, 0.4645]$
A_4	$[0.4267, 0.8498]$	$[0.2138, 0.5682]$	$[0.3322, 0.7936]$
A_5	$[0.0000, 0.5682]$	$[0.2849, 0.8498]$	$[0.3322, 0.6622]$
A^+	$[0.7092, 0.9901]$	$[0.6388, 0.9901]$	$[0.5305, 0.9901]$

表 5 感知效用表I

Table 5 The data of perceived utility value I

方案	用电量大时			用电量中等时		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
A_1	$[-0.3458, 0.3372]$	$[0.6586, 0.9227]$	$[-0.3458, 0.0604]$	$[0.5190, 1.1157]$	$[-0.3458, 0.3300]$	$[-0.3458, 0.0220]$
A_2	$[-0.0680, 0.5964]$	$[-0.3458, 0.3293]$	$[0.4490, 0.8264]$	$[-0.2188, 0.5425]$	$[0.0005, 0.8047]$	$[0.4048, 0.7444]$
A_3	$[0.4711, 0.9768]$	$[-0.2659, 0.1770]$	$[0.2266, 0.4486]$	$[-0.3458, 0.4251]$	$[0.0005, 1.0366]$	$[0.2042, 0.4860]$
A_4	$[0.3383, 0.8511]$	$[0.5839, 0.8498]$	$[0.7761, 1.0380]$	$[-0.2188, 0.6589]$	$[-0.2584, 0.6481]$	$[0.6679, 1.0611]$
A_5	$[0.4711, 1.1015]$	$[0.8069, 1.0313]$	$[0.6135, 0.8796]$	$[0.2775, 0.7744]$	$[0.0005, 1.1893]$	$[0.5370, 0.8719]$

表 6 感知效用表II

Table 6 The data of perceived utility value II

方案	用电量小时		
	C_1	C_2	C_3
A_1	$[-0.1468, 0.5250]$	$[0.1463, 0.8209]$	$[-0.3458, 0.0952]$
A_2	$[-0.3458, 0.7092]$	$[0.5276, 1.0901]$	$[0.3827, 1.1189]$
A_3	$[-0.3458, 0.1491]$	$[-0.3458, 0.7301]$	$[-0.0680, 0.4445]$
A_4	$[-0.1468, 0.5250]$	$[-0.0484, 0.5468]$	$[0.1141, 0.8695]$
A_5	$[0.2426, 1.0709]$	$[0.0493, 0.9112]$	$[0.1141, 0.7010]$

根据效用理论计算得到综合效用矩阵:

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}[\ \ 0.0007,2.0069] & [\ \ 0.4019,2.0961] & [-0.6744,0.1647]\\ [-0.3354,1.8330] & [-0.1262,2.0219] & [\ \ 0.8214,2.6205]\\ [\ \ 0.0608,1.8344] & [-0.3599,1.8450] & [\ \ 0.3231,1.4067]\\ [\ \ 0.0999,2.1724] & [\ \ 0.3277,2.1732] & [\ \ 1.2060,3.0818]\\ [\ \ 0.7031,2.9798] & [\ \ 0.7438,3.2412] & [\ \ 0.9680,2.5582]\end{bmatrix}.$$

步骤 5 1) 属性权重范围已知的情况.

为了验证属性权重范围已知方法的有效性, 本文在利用优化模型求最优属性时, 按照第5.1节论述只给出属性权重的范围而不是精确值, 按照文献[5]属性权重约束为$0.2\leqslant\omega_1\leqslant0.29$, $0.25\leqslant\omega_2\leqslant0.38$, $0.28\leqslant\omega_3\leqslant0.4$. 依据模型(27), 式中$\varepsilon$取0.5, 可求得最优属性权重矩阵:

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0.2900 & 0.3100 & 0.4000\\ 0.2200 & 0.3800 & 0.4000\\ 0.2200 & 0.3800 & 0.4000\\ 0.2900 & 0.3800 & 0.3300\\ 0.2900 & 0.3100 & 0.4000\end{bmatrix}.$$

归一化特征向量:

$$\boldsymbol{\rho}=[0.4509\ 0.4441\ 0.4441\ 0.4461\ 0.4509]^{\mathrm{T}}.$$

最终获得属性权重:

$$\boldsymbol{\omega}=[0.2622\ 0.3518\ 0.3860].$$

2) 属性权重完全未知的情况.

不同状态下由三参数区间数转换为两参数区间数的决策信息矩阵, 如下所示:

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}[115,135] & [380,410] & [\ 60,\ \ 90]\\ [105,125] & [250,330] & [130,160]\\ [\ 90,105] & [260,310] & [110,125]\\ [\ 95,110] & [370,400] & [160,180]\\ [\ 85,105] & [400,425] & [145,165]\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix}[80,100] & [220,245] & [\ 50,\ \ 70]\\ [50,\ \ 75] & [240,275] & [105,125]\\ [45,\ \ 70] & [240,290] & [\ 90,105]\\ [50,\ \ 80] & [225,265] & [125,150]\\ [70,\ \ 85] & [240,300] & [115,135]\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{T}_3=\begin{bmatrix}[40,55] & [205,235] & [40,\ \ 55]\\ [35,60] & [225,250] & [80,115]\\ [35,45] & [180,230] & [55,\ \ 75]\\ [40,55] & [195,220] & [65,100]\\ [50,70] & [200,240] & [65,\ \ 90]\end{bmatrix}.$$

由效用理论得到综合决策信息矩阵:

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}[173.5000,321.2500] & [567.7500,955.2500] & [103.0000,229.7500]\\ [141.7500,284.0000] & [471.7500,894.0000] & [218.5000,420.2500]\\ [124.7500,242.7500] & [465.0000,871.5000] & [181.2500,326.7500]\\ [134.5000,266.7500] & [588.7500,954.5000] & [254.2500,464.0000]\\ [143.0000,275.5000] & [598.0000,1038.500] & [233.7500,421.5000]\end{bmatrix},$$

从而得到各个属性值下的均值和标准差:

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}[143.5000,278.0500]\\ [532.2500,942.7500]\\ [198.1500,372.4500]\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}[119.9779,150.7855]\\ [361.3550,461.2156]\\ [122.0214,236.2417]\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

根据式(34), 式中ε取0.5, 计算属性权重为

$$\boldsymbol{\omega}=[0.2903\ 0.3201\ 0.3897].$$

步骤 6 利用步骤5得到的属性权重对备选方案的综合效用属性加权求和得到综合效用值.

1) 针对属性范围已知的情况, 得到备选方案的综合效用值:

$$\boldsymbol{U}'=\begin{bmatrix}[-0.1188,1.3269]\\ [\ \ 0.1849,2.2036]\\ [\ \ 0.0140,1.6730]\\ [\ \ 0.6072,2.5238]\\ [\ \ 0.8172,2.9090]\end{bmatrix}.$$

利用区间可能度公式(式(1))求出方案可能度矩阵$\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.5000 & 0.2235 & 0.3594 & 0.0935 & 0.0426\\ 0.7765 & 0.5000 & 0.6694 & 0.3293 & 0.2270\\ 0.6406 & 0.3306 & 0.5000 & 0.1786 & 0.1050\\ 0.9065 & 0.6707 & 0.8214 & 0.5000 & 0.3626\\ 0.9574 & 0.7730 & 0.8950 & 0.6374 & 0.5000\end{bmatrix}.$$

利用式(22)得到可能度矩阵$\boldsymbol{P}$的排序向量

$$\boldsymbol{\theta}=(0.1359\ \ 0.2001\ \ 0.1627\ \ 0.2381\ \ 0.2631)^{\mathrm{T}},$$

对排序向量进行比较排序, 最终确定备选方案的优劣排序为

$$A_5\succ A_4\succ A_2\succ A_3\succ A_1,$$

与文献[5]中实验结果一致.

2) 针对属性权重完全未知的情况, 得到备选方案的综合效用值:

$$U' = \begin{bmatrix} [-0.2701, 1.1284] \\ [\ \ 0.3233, 2.4155] \\ [\ \ 0.2779, 2.0656] \\ [\ \ 0.7193, 2.7059] \\ [\ \ 0.7096, 2.7221] \end{bmatrix}.$$

利用两参数区间数可能度公式(式(1))求出方案可能度矩阵$\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.1108 & 0.1447 & 0.0301 & 0.0312 \\ 0.8892 & 0.5000 & 0.5942 & 0.3461 & 0.3456 \\ 0.8553 & 0.4058 & 0.5000 & 0.2552 & 0.2555 \\ 0.9699 & 0.6539 & 0.7448 & 0.5000 & 0.4984 \\ 0.9688 & 0.6544 & 0.7445 & 0.5016 & 0.5000 \end{bmatrix}.$$

利用式(22)得到可能度矩阵$\boldsymbol{P}$的排序向量$\boldsymbol{\theta} = (0.1158\ \ 0.2088\ \ 0.1886\ \ 0.2433\ \ 0.2435)^{\mathrm{T}}$, 对排序向量进行比较排序, 最终确定备选方案的优劣排序为$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$, 与文献[5]中实验结果一致, 验证了本文所提方法的有效性. 同时说明在属性权重完全未知的情况下, 由决策信息本身可以得到刻画属性重要性的权重信息, 从另一方面考虑, 决策者对属性权重的认知也是根据对决策信息分析得来的. 因此, 在深入挖掘决策信息的前提下, 可以得到满足决策需求的信息, 从而解决多属性决策问题.

对本文涉及参数α, δ, τ进行分析, 当参数α越大, 则相同属性的效用值越大. 后悔规避参数δ直接影响备选方案的后悔-欣喜值, 进而不同种状态信息集结后影响最终决策结果. 参数τ的变化受三参数区间数中重心发生可能度的影响, τ越大, 三参数区间数中重心的影响权重越小, 反之越大. 进而, 由三参数区间数转化得到的两参数区间数发生变化, 最终影响决策结果. 在具体决策中, 需要根据决策者对重心发生可能度的预估,选择合适权系数τ值.

8 结论(Conclusions)

本文首先提出了一种将三参数区间数转换为两参数区间数的方法, 利用两参数区间理论解决三参数区间数大小比较以及距离计算的问题, 通过与文献[5]的数据对比验证其有效性; 其次在考虑多属性决策属性权重未知的情况下, 提出了两种属性权重求解思路: 1) 在属性权重范围已知的情况下, 建立感知效用最大化的优化模型, 求解出最优属性权重; 2) 在属性权重完全未知的情况下, 利用注水原理求解属性权重, 得到区间属性权重. 最后, 将后悔理论应用于三参数区间数多属性决策问题中, 后悔理论涉及参数少, 算法简单, 可操作性强, 因此在实际应用中范围更广泛.

参考文献(References):

[1] BU Guangzh, ZHANG Yuwen. Grey fuzzy comprehensive evaluation method based on interval numbers of three parameters [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2001, 23(9): 43 – 62.
(卜广志, 张宇文. 基于三参数区间数的灰色模糊综合评判 [J]. 系统工程与电子技术, 2001, 23(9): 43 – 62.)

[2] LUO D. Risk evaluation of ice-jam disasters using gray systems theory: the case of Ningxia-Inner Mongolia reaches of the Yellow River [J]. *Natural Hazards*, 2014, 71(3): 1419 – 1431.

[3] WANG Xia, DANG Yaoguo. Dynamic multi-attribute decision- making methods with three-parameter interval grey number [J]. *Control and Decision*, 2015, 30(9): 1623 – 1629.
(王霞, 党耀国. 三参数区间灰数信息下的动态多属性决策方法 [J]. 控制与决策, 2015, 30(9): 1623 – 1629.)

[4] YAN Shuli, LIU Sifeng, ZHU Jianjun, et al. Topsis decision-making method with three-parameter interval number based on entropy measure [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2013, 21(6): 145 – 151.
(闫书丽, 刘思峰, 朱建军, 等. 基于熵测度的三参数区间数信息下的TOPSIS决策方法 [J]. 中国管理科学, 2013, 21(6): 145 – 151.)

[5] LI Cunbin, ZHAO Kun, QI Zhiqiang. A risky multi-criteria decision-making method with three-parameter interval grey number [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(7): 1306 – 1314.
(李存斌, 赵坤, 祁之强. 三参数区间灰数信息下风险型多准则决策方法 [J]. 自动化学报, 2015, 41(7): 1306 – 1314.)

[6] LUO D. Decision-making methods with three-parameter interval grey number [J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2009, 29(1): 124 – 130.

[7] YANG B, ZHAO J. Correlation coefficients of hesitant three-parameter interval grey number and their applications to clustering analysis [J]. *Journal of Grey System*, 2013, 25(2): 139 – 148.

[8] WONG K P. A regret theory of capital structure [J]. *Finance Research Letters*, 2015, 12: 48 – 57.

[9] ZHANG Xiao, FAN Zhiping, CHEN Fagong. Risky multiple attribute decision making with regret aversion [J]. *Journal of Systems & Management*, 2014, 23(1): 111 – 117.
(张晓, 樊治平, 陈发功. 考虑后悔规避的风险型多属性决策方法 [J]. 系统管理学报, 2014, 23(1): 111 – 117.)

[10] ZHANG Xiao, FAN Zhiping, CHEN Fagong. Method for risky multiple attribute decision making based on regret theory [J]. *Systems Engineering–Theory & Practice*, 2013, 33(9): 2313 – 2320.
(张晓, 樊治平, 陈发功. 基于后悔理论的风险型多属性决策方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(9): 2313 – 2320.)

[11] ZHANG Shitao, ZHU Jianjun, LIU Xiaodi. Group decision-making method based on regret theory under multidimensional preference information of pair-wise alternatives [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2014, 22(S1): 33 – 41.
(张世涛, 朱建军, 刘小弟. 方案对多维偏好信息下基于后悔理论的群决策方法 [J]. 中国管理科学, 2014, 22(S1): 33 – 41.)

[12] RAMOS G M, DAAMEN W, HOOGENDOORN S. A state-of-the-art review: developments in utility theory, prospect theory and regret theory to investigate travellers' behaviour in situations involving travel time uncertainty [J]. *Transport Reviews*, 2014, 34(1): 46 – 67.

[13] ZENG Jianmin. An experimental test on cumulative prospect theory [J]. *Journal-Jinan University (Natural Science and Medicine Edition)*, 2007, 28(1): 44 – 47, 65.
(曾建敏. 实验检验累积前景理论 [J]. 暨南大学学报(自然科学版), 2007, 28(1): 44 – 47, 65.)

[14] KAHNEMAN D, TVERSKY A. Prospect theory: an analysis of decision under risk [J]. *Econometrica*, 1979, 47(2): 263 – 291.

[15] MOORE R, LODWICK W. Interval analysis and fuzzy set theory [J]. *Fuzzy Sets & Systems*, 2003, 135(1): 5 – 9.

[16] CHEN Zhiwang, CHEN Lin, YANG Qi, et al. Interval-valued intuitionistic fuzzy set method for group multi-attribute decision-making with unknown attribute weights [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(8): 1025 – 1033.

(陈志旺, 陈林, 杨七, 等. 用区间直觉模糊集方法对属性权重未知的群求解其多属性决策 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(8): 1025 – 1033.)

[17] YAN Shuli, LIU Sifeng, WU Lifeng. A group grey target decision making method with three parameter interval grey number based on prospect theory [J]. *Control and Decision*, 2015, 30(1): 105 – 109.
(闫书丽, 刘思峰, 吴利丰. 一种基于前景理论的三参数区间灰数型群体灰靶决策方法 [J]. 控制与决策, 2015, 30(1): 105 – 109.)

[18] WANG Y M, LUO Y. Integration of correlations with standard deviations for determining attribute weights in multiple attribute decision making [J]. *Mathematical & Computer Modelling*, 2010, 51(1/2): 1 – 12.

[19] ZHANG Yingjun, MA Peijun, SU Xiaohong, et al. Multi-attribute decision making with uncertain attribute weight information in the framework of interval-valued intuitionistic fuzzy set [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(2): 220 – 228.
(张英俊, 马培军, 苏小红, 等. 属性权重不确定条件下的区间直觉模糊多属性决策 [J]. 自动化学报, 2012, 38(2): 220 – 228.)

[20] ZHAO Hui, YAN Aijun, WANG Pu. Feature reduction method based on threshold optimization for case-based reasoning classifier [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(4): 533 – 539.
(赵辉, 严爱军, 王普. 基于权重阈值寻优的案例推理分类器特征约简 [J]. 控制理论与应用, 2015, 32(4): 533 – 539.)

作者简介:

陈志旺 (1978–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为多属性决策、区间数优化, E-mail: czwaaron@ysu.edu.cn;

王小飞 (1990–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为区间多属性决策, E-mail: wangxiaofei558@163.com;

邵玉杰 (1992–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为嵌入式软件开发, E-mail: 1935380180@qq.com;

张子振 (1991–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为嵌入式软件开发, E-mail: 592281147@qq.com;

李国强 (1984–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为复杂工业系统的建模与控制, E-mail: zhihuiyuang@163.com.