

# 多输入多输出非线性不确定系统连续高阶滑模控制

刘向杰<sup>1</sup>, 韩耀振<sup>1,2†</sup>

(1. 华北电力大学 新能源电力系统国家重点实验室, 北京 102206; 2. 山东交通学院 信息科学与电气工程学院, 山东 济南 250357)

**摘要:** 针对一类MIMO非线性不确定系统, 提出一种新的连续高阶滑模控制算法. 引入状态反馈使得系统高阶滑模控制问题等效转换为多变量不确定积分链的有限时间稳定问题, 首先针对标称系统设计有限时间到达连续控制律, 实现系统状态快速收敛, 然后采用多变量非解耦形式超螺旋算法克服系统不确定性, 实现鲁棒性, 最终使得系统控制作用连续、滑模抖振得以大大抑制. 基于二次型Lyapunov函数证明系统的有限时间稳定性. 针对三阶不确定系统有限时间稳定和气垫船圆形航迹跟踪问题分别进行了仿真, 验证了所提算法的有效性、鲁棒性.

**关键词:** 连续高阶滑模; 多输入多输出不确定系统; 多变量超螺旋; 气垫船

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Continuous higher-order sliding mode control for multi-input multi-output nonlinear uncertain system

LIU Xiang-jie<sup>1</sup>, HAN Yao-zhen<sup>1,2†</sup>

(1. State Key Laboratory of Alternate Electrical Power System with Renewable Energy Sources, North China Electric Power University, Beijing 102206, China;

2. School of Information Science and Electrical Engineering, Shandong Jiaotong University, Jinan Shandong 250357, China)

**Abstract:** This paper proposes a new continuous higher-order sliding mode control scheme for a class of MIMO nonlinear uncertain system. After implemented state feedback control, higher-order sliding mode control problem of the original uncertain nonlinear system is equivalently transformed into finite time stability problem of multivariable uncertain integrator chains. A finite time continuous control law is firstly employed to guarantee rapid convergence of system states and finite time stabilization of nominal integral chain system, then multivariable non-coupling super-twisting algorithm is designed to overcome system uncertainties and achieve robustness. Finally, the whole control effect is continuous and high frequency chattering phenomenon of sliding mode is greatly weakened. Finite time stability of the closed loop system is proved strictly based on quadratic Lyapunov function. Examples concerning finite-time stabilization of a third order uncertain system and the hovercraft circular trajectory tracking are simulated respectively to verify the effectiveness and the robustness of the proposed approach.

**Key words:** continuous high-order sliding mode; multiple-input multiple-output uncertain system; multivariable super-twisting; hovercraft

### 1 引言(Introduction)

滑模控制具有算法简单, 不依赖于精确系统模型, 对参数摄动、外部扰动具有不变性等优点, 是实现非线性不确定系统鲁棒控制的有效方法<sup>[1]</sup>, 已经在电力系统<sup>[2]</sup>、船舶运动<sup>[3]</sup>、机电装置<sup>[4]</sup>、飞行器<sup>[5]</sup>等控制领域取得广泛应用.

许多被控对象都是具有不确定性的多输入多输出(multiple-input multiple-output, MIMO)非线性系统, 这已经成为滑模控制的主要研究方向之一<sup>[6-8]</sup>. 实

现滑模抖振削弱和系统有限时间稳定是滑模控制领域研究的热点问题, 文[9]提出了微分积分终端滑模控制器, 实现了MIMO非线性系统有限时间稳定, 但控制量抖振明显, 文[10]可以同时实现无抖振控制和有限时间收敛, 但是它仅针对相对阶为 $[1, 1, \dots, 1]^T$ 的MIMO非线性系统.

相对阶限制、滑模抖振、有限时间稳定等问题促进了高阶滑模理论的提出与快速发展<sup>[11-13]</sup>. 现有针对高阶滑模的研究主要集中在单输入单输出(single

收稿日期: 2015-11-17; 录用日期: 2016-06-07.

†通信作者. E-mail: hyz125@163.com; Tel: +86 531-80683266.

本文责任编辑: 陈杰.

国家自然科学基金项目(61273144); 山东省自然科学基金项目(ZR2013EEL014)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61273144, 61273144) and Shandong Provincial Natural Science Foundation (ZR2013 EEL014).

input single output, SISO)非线性系统<sup>[11-16]</sup>, 近年来, 一些学者研究了相对阶向量各元素 $r_i \leq 2$ 的MIMO非线性系统<sup>[17-20]</sup>, 但是, 现实工程控制中许多被控对象都是具有高相对阶特性的MIMO不确定系统<sup>[21-22]</sup>. 由于耦合、高维等问题, 构建相对阶大于2的高阶滑模控制器相当困难. Levant等<sup>[23-24]</sup>设计了控制参数自适应调节的MIMO系统高阶滑模控制律, 控制精度高, 但是其对控制矩阵进行了近似对角化, 需要人为增加相对阶才能使得控制连续. 文[25]在假设系统状态是代数强可观测和干扰充分光滑前提下, 结合未知输入观测器、高阶滑模控制器和动态反馈线性化, 实现了非线性系统的有限时间稳定, 但是其要求系统具有平滑性, 并且可控性、强可观测性、平滑性之间关系不清晰. 文[26]针对MIMO不确定系统, 基于传统一阶滑模和连续齐次控制律实现了高阶滑模控制到有限时间稳定问题的转换, 其提出的高阶滑模控制律采用一阶滑模克服不确定性, 使得控制不连续、抖振现象非常明显. 在文[26]基础上, 结合动态滑模, 文[27]提出了变增益积分高阶滑模控制算法, 但是, 未能规范证明有限时间收敛性, 同时, 由于控制增益只能单向增大, 严重削弱高阶滑模降抖振作用.

高阶滑模控制作用连续能够大大削弱抖振, 增强其工程应用的现实基础, 文[28-31]针对SISO非线性系统的连续高阶滑模控制进行了研究.

本文针对MIMO非线性不确定系统, 提出一种新的连续高阶滑模控制算法, 将高阶滑模控制问题等效为具有有界不确定性的多变量高阶积分链系统的有限时间稳定问题. 控制器结合有限时间连续控制律和二阶滑模算法, 前者可看作给定轨迹发生器, 实现暂态过程时间的调节, 后者基于非解耦超螺旋二阶滑模算法, 削弱控制抖振、克服系统不确定性. 利用二次型Lyapunov函数证明了系统有限时间稳定性. 最后, 分别针对一种三重不确定系统有限时间稳定和气垫船航迹跟踪问题, 设计了连续高阶滑模控制器, 实现了系统状态的快速收敛、控制量抖振削弱和圆形给定轨迹的有限时间跟踪.

## 2 系统描述(System description)

考虑MIMO仿射非线性不确定系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, \\ y = s(x), \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $x \in \mathbb{R}^n$  是系统状态变量,  $f(x), g(x) = [g_1(x) \cdots g_m(x)]^T$  为具有不确定性的光滑函数,  $u = [u_1 \cdots u_m]^T \in \mathbb{R}^m$  是系统控制输入,  $m > 1, n > 1, s(x) = [s_1(x) \cdots s_m(x)]^T \in \mathbb{R}^m$  是光滑可测输出向量, 即系统滑模变量,  $f(x)$  和  $g(x)$  的不确定性包含外部干扰和系统内部未建模动态、参数摄动. 为表述方便, 采

用  $s$  表示  $s(x)$ , 其他变量符号方法类同. 假设系统相对阶向量  $r = [r_1 \cdots r_m]^T$  是已知常数或者可由动态扩展算法求取, 相关零动态是稳定的.

高阶滑模控制目标是: 设计适当的控制律, 使得系统状态在有限时间内到达滑模流形  $s = \dot{s} = \cdots = s^{(r-1)} = 0$ , 具有  $r$  阶滑动模态.

求  $s_i$  的  $r_i$  阶时间微分

$$[s_1^{(r_1)} \cdots s_m^{(r_m)}]^T = A(x) + B(x)u, \quad (2)$$

式中:

$$A(x) = [L_f^{r_1} s_1 \cdots L_f^{r_m} s_m]^T, \\ B(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} s_1 & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} s_1 \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} s_m & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} s_m \end{bmatrix}.$$

**假设 1**  $A(x), B(x)$  可表达为已知标称部分  $\bar{A}, \bar{B}$  和有界不确定项  $\Delta A, \Delta B$ , 并且矩阵  $\bar{B}$  可逆, 即

$$\begin{cases} A(x) = \bar{A} + \Delta A, \\ B(x) = \bar{B} + \Delta B. \end{cases} \quad (3)$$

## 3 连续高阶滑模控制器设计(Continuous higher-order sliding mode controller design)

针对系统(2), 考虑如下状态反馈控制:

$$u = \bar{B}^{-1} [-\bar{A} + \nu], \quad (4)$$

其中  $\nu = [\nu_1 \cdots \nu_m]^T \in \mathbb{R}^m$  是辅助控制输入. 该反馈可实现标称系统解耦, 因此, 由系统式(2)得

$$[s_1^{(r_1)} \cdots s_m^{(r_m)}]^T = [I_m + \Delta B \bar{B}^{-1}] \nu - \Delta B \bar{B}^{-1} \bar{A} + \Delta A, \quad (5)$$

其中  $I_m$  是  $m \times m$  单位矩阵.

则系统(1)关于滑模变量  $s$  的高阶滑模控制问题等价转化为多变量不确定积分链的有限时间稳定问题:

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{z}_{1,i} = z_{2,i}, \\ \vdots \\ \dot{z}_{r_i-1,i} = z_{r_i,i}, \end{cases} & \forall i = 1, \dots, m, \\ [\dot{z}_{r_1,1} \ \dot{z}_{r_2,2} \ \cdots \ \dot{z}_{r_m,m}]^T = [I_m + \Delta B \bar{B}^{-1}] \nu - \Delta B \bar{B}^{-1} \bar{A} + \Delta A, \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $1 \leq i \leq m, z_{j,i} = s_i^{(j-1)}, 1 \leq j \leq r_i, z_i = [z_{1,i} \ z_{2,i} \ \cdots \ z_{r_i,i}]^T, z = [z_1^T \ \cdots \ z_m^T]^T$ .

针对式(6), 辅助控制律  $\nu$  的设计包含两部分, 当不确定项  $\Delta A$  和  $\Delta B$  不存在时, 设计有限时间连续控制律  $\nu_{\text{ftc}}$  实现标称积分链有限时间稳定; 当存在不确定性时, 多变量超螺旋算法  $\nu_{\text{sup}}$  实现鲁棒性. 下面分别介绍  $\nu_{\text{ftc}}$  和  $\nu_{\text{sup}}$  的设计方法并证明整个闭环系统的有限时间稳定性.

**3.1 有限时间连续控制律** $\nu_{\text{ftc}}$  (Finite time continuous control law)

当系统 $\Delta A$ 和 $\Delta B$ 为零时, 则式(6)可以表示为 $m$ 个独立的SISO标称积分链

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,i} = z_{2,i}, \\ \vdots \\ \dot{z}_{r_i-1,i} = z_{r_i,i}, \\ \dot{z}_{r_i,i} = \nu_{\text{ftc},i}. \end{cases} \quad (7)$$

针对任意 $r$ 重标称积分链的有限时间镇定问题, 文[32]提出了一种形式简洁的有限时间连续控制律.

**引理 1**<sup>[32]</sup> 选取适当正常数 $a_{1,i}, \dots, a_{r_i,i}, b_{1,i}, \dots, b_{r_i,i}$ , 使得 $p^{r_i} + a_{r_i,i}p^{r_i-1} + \dots + a_{2,i}p + a_{1,i}, p^{r_i} + b_{r_i,i}p^{r_i-1} + \dots + b_{2,i}p + b_{1,i}$ 是霍尔维茨多项式, 则存在 $c_i \in (0, 1)$ , 对任意 $q_i \in (1 - c_i, 1)$ , 在连续反馈控制律(8)作用下系统(7)实现有限时间镇定.

$$\begin{aligned} \nu_{\text{ftc},i}(z_i) = & -a_{1,i} \text{sgn } z_{1,i} |z_{1,i}|^{q_{1,i}} - \dots - \\ & a_{r_i,i} \text{sgn } z_{r_i,i} |z_{r_i,i}|^{q_{r_i,i}} - b_{1,i} z_{1,i} - \\ & \dots - b_{r_i,i} z_{r_i,i}, \end{aligned} \quad (8)$$

式中:  $q_{j-1,i} = \frac{q_{j,i} q_{j+1,i}}{2q_{j+1,i} - q_{j,i}}, j \in \{2, \dots, r_i\}, q_{r_i+1,i} = 1, q_{r_i,i} = q_i$ .

当 $|z_{j,i}| > 1$ 时, 即系统(7)状态远离原点,  $-b_{1,i} z_{1,i} - \dots - b_{r_i,i} z_{r_i,i}$ 起主要作用, 系统是渐近稳定的, 经过有限时间, 系统状态进入 $|z_{j,i}| < 1$ 范围, 此时的控制项 $-a_{1,i} \text{sgn } z_{1,i} |z_{1,i}|^{q_{1,i}} - \dots - a_{r_i,i} \text{sgn } z_{r_i,i} |z_{r_i,i}|^{q_{r_i,i}}$ 起主导作用, 可使得系统有限时间收敛于平衡原点.

**3.2 系统鲁棒性实现** (System robustness realization)

显然, 当存在不确定项 $\Delta A$ 和 $\Delta B$ , 有限时间连续控制律 $\nu_{\text{ftc}}$ 不能使系统(6)状态稳定在平衡原点, 本节中采用二阶滑模超螺旋控制律 $\nu_{\text{sup}}$ 克服系统不确定性.

设计新的滑模函数

$$\sigma(z) = [z_{r_1,1} \ z_{r_2,2} \ \dots \ z_{r_m,m}]^T - \int_0^t \nu_{\text{ftc}} dt, \quad (9)$$

则

$$\dot{\sigma}(z) = [\dot{z}_{r_1,1} \ \dot{z}_{r_2,2} \ \dots \ \dot{z}_{r_m,m}]^T - \nu_{\text{ftc}}. \quad (10)$$

结合式(6)和式(10)并考虑 $\nu = \nu_{\text{ftc}} + \nu_{\text{sup}}$ , 整理得

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} = & [I_m + \Delta B \bar{B}^{-1}] \nu_{\text{sup}} - \Delta B \bar{B}^{-1} \bar{A} + \\ & \Delta A + \Delta B \bar{B}^{-1} \nu_{\text{ftc}} = \\ & \nu_{\text{sup}} + \hat{\psi}, \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\hat{\psi} = -\Delta B \bar{B}^{-1} \bar{A} + \Delta A + \Delta B \bar{B}^{-1} \nu_{\text{ftc}} + \Delta B \bar{B}^{-1}$

$\nu_{\text{sup}}$ , 假设 $\hat{\psi}$ 满足

$$\|\hat{\psi}\| \leq \varsigma_1 \|\sigma\|, \quad (12)$$

式中 $\varsigma_1 > 0$ .

针对系统(11)采取二阶滑模控制, 适当选取控制参数, 即可使得系统控制量 $u$ 连续、具有鲁棒性.  $\nu_{\text{sup}}$ 采用非解耦形式二阶滑模超螺旋算法

$$\nu_{\text{sup}} = -\lambda_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \lambda_2 \sigma + \nu_v, \quad (13)$$

$$\dot{\nu}_v = -\lambda_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - \lambda_4 \sigma. \quad (14)$$

把式(13)代入式(11)中, 得

$$\dot{\sigma} = -\lambda_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \nu_v - \lambda_2 \sigma + \hat{\psi}. \quad (15)$$

**定理 1** 考虑非线性不确定系统(1), 且前述各假设条件成立, 控制器设计为

$$u = \bar{B}^{-1} [-\bar{A} + \nu_{\text{ftc}} + \nu_{\text{sup}}], \quad (16)$$

其中 $\nu_{\text{ftc}}, \nu_{\text{sup}}$ 由式(8)(13)–(14)表述, 则能确保有限时间内建立关于 $s$ 的高阶滑模.

**证** 选取Lyapunov函数

$$V(\sigma, \nu_v) = \frac{1}{2} \nu_{\text{sup}}^T \nu_{\text{sup}} + \frac{1}{2} \nu_v^T \nu_v + 2\lambda_1 \|\sigma\| + \lambda_2 \sigma^T \sigma. \quad (17)$$

定义子空间

$$\Theta = \{(\sigma, \nu_v) \in \mathbb{R}^{2m} : \sigma = 0\}, \quad (18)$$

那么, 除了在子空间 $\Theta$ 上,  $V(\sigma, \nu_v)$ 处处连续可微.

可以验证 $V(\sigma, \nu_v)$ 是正定且径向无界的, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(\sigma, \nu_v) = & (\lambda_2^2 + 2\lambda_4) \sigma^T \dot{\sigma} + \left(\frac{1}{2} \lambda_1^2 + 2\lambda_3\right) \frac{\sigma^T \dot{\sigma}}{\|\sigma\|} + \\ & \frac{3}{2} \lambda_1 \lambda_2 \frac{\sigma^T \dot{\sigma}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + 2\nu_v^T \dot{\nu}_v - \lambda_2 (\sigma^T \dot{\nu}_v + \dot{\sigma}^T \nu_v) - \\ & \lambda_1 \left( \frac{(\dot{\nu}_v^T \sigma + \nu_v^T \dot{\sigma})}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{(\sigma^T \dot{\sigma})(\nu_v^T \sigma)}{2\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

式(14)–(15)代入式(19), 则对所有 $(\sigma, \nu_v) \notin \Theta$ 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\sigma, \nu_v) = & -(\lambda_2 \lambda_4 + \lambda_2^3) \|\sigma\|^2 - (\lambda_1 \lambda_4 + \\ & \frac{5}{2} \lambda_1 \lambda_2^2) \|\sigma\|^{\frac{3}{2}} - (\lambda_2 \lambda_3 + 2\lambda_1^2 \lambda_2) \|\sigma\| - \\ & (\lambda_1 \lambda_3 + \frac{1}{2} \lambda_1^3) \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} + \frac{\lambda_1 (\sigma^T \nu_v)(\nu_v^T \sigma)}{2\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \\ & \lambda_1^2 \frac{\sigma^T \nu_v}{\|\sigma\|} + 3\lambda_1 \lambda_2 \frac{\sigma^T \nu_v}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \lambda_1 \frac{\nu_v^T \nu_v}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \\ & 2\lambda_2^2 \sigma^T \nu_v - \lambda_2 \|\nu_v\|^2 + \frac{3}{2} \lambda_1 \lambda_2 \frac{\sigma^T \hat{\psi}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1 \sigma^T \hat{\psi} v_v^T \sigma}{2 \|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \left(\frac{1}{2} \lambda_1^2 + 2 \lambda_3\right) \frac{\sigma^T \hat{\psi}}{\|\sigma\|} - \\ & \lambda_1 \frac{v_v^T \hat{\psi}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + (\lambda_2^2 + 2 \lambda_4) \sigma^T \hat{\psi} - \lambda_2 \hat{\psi}^T v_v, \end{aligned} \quad (20)$$

则通过简化边界参数, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\sigma, v_v) \leq & -(\lambda_2 \lambda_4 + \lambda_2^3) \|\sigma\|^2 - (\lambda_1 \lambda_4 + \\ & \frac{5}{2} \lambda_1 \lambda_2^2) \|\sigma\|^{\frac{3}{2}} - (\lambda_2 \lambda_3 + 2 \lambda_1^2 \lambda_2) \|\sigma\| - \\ & (\lambda_1 \lambda_3 + \frac{1}{2} \lambda_1^3) \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} + \frac{\lambda_1 |\sigma^T v_v|^2}{2 \|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \\ & \lambda_1^2 \frac{|\sigma^T v_v|}{\|\sigma\|} + 3 \lambda_1 \lambda_2 \frac{|\sigma^T v_v|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + 2 \lambda_2^2 |\sigma^T v_v| - \\ & \lambda_2 \|v_v\|^2 + \frac{3}{2} \lambda_1 \lambda_2 \frac{|\sigma^T \hat{\psi}|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \\ & \frac{\lambda_1 |\sigma^T \hat{\psi} v_v^T \sigma|}{2 \|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \left(\frac{1}{2} \lambda_1^2 + 2 \lambda_3\right) \frac{|\sigma^T \hat{\psi}|}{\|\sigma\|} + \\ & \lambda_1 \frac{|v_v^T \hat{\psi}|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + (\lambda_2^2 + 2 \lambda_4) |\sigma^T \hat{\psi}| + \lambda_2 |\hat{\psi}^T v_v|. \end{aligned} \quad (21)$$

考虑到柯西-施瓦茨不等式和式(12), 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(\sigma, v_v) \leq & -(\lambda_2 \lambda_4 + \lambda_2^3) \|\sigma\|^2 - (\lambda_1 \lambda_4 + \\ & \frac{5}{2} \lambda_1 \lambda_2^2) \|\sigma\|^{\frac{3}{2}} - (\lambda_2 \lambda_3 + 2 \lambda_1^2 \lambda_2) \|\sigma\| - \\ & (\lambda_1 \lambda_3 + \frac{1}{2} \lambda_1^3) \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} + \lambda_1^2 \|v_v\| + \\ & 2 \lambda_2^2 \|\sigma\| \|v_v\| + 3 \lambda_1 \lambda_2 \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} \|v_v\| - \\ & \lambda_2 \|v_v\|^2 + \frac{\lambda_1 \|v_v\|^2}{2 \|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{1}{2} \lambda_1^2 + 2 \lambda_3\right) \varsigma_1 \cdot \\ & \|\sigma\| + \frac{3}{2} \lambda_1 \lambda_2 \varsigma_1 \|\sigma\|^{\frac{3}{2}} + (\lambda_2^2 + 2 \lambda_4) \varsigma_1 \cdot \\ & \|\sigma\|^2 + \lambda_2 \varsigma_1 \|\sigma\| \|v_v\| + \frac{3}{2} \lambda_1 \varsigma_1 \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} \|v_v\|. \end{aligned} \quad (22)$$

定义  $\tilde{x} = (\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}, \|\sigma\|, \|v_v\|)^T$ , 由式(22)得

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \tilde{x}^T \Pi \tilde{x} - \tilde{x}^T \Lambda \tilde{x}, \quad (23)$$

式中:

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{bmatrix} \Pi_{11} & 0 & -\frac{\lambda_1^2}{2} \\ 0 & \Pi_{22} & -\frac{3\lambda_1\lambda_2}{2} \\ -\frac{\lambda_1^2}{2} & -\frac{3\lambda_1\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1}{2} \end{bmatrix}, \\ \Pi_{11} &= \frac{\lambda_1^3}{2} + \lambda_1 \lambda_3, \end{aligned}$$

$$\Pi_{22} = \lambda_1 \lambda_4 + \frac{5}{2} \lambda_1 \lambda_2^2 - \frac{3}{2} \lambda_1 \lambda_2 \varsigma_1,$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & -\frac{3}{4} \lambda_1 \varsigma_1 \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ -\frac{3}{4} \lambda_1 \varsigma_1 & A_{32} & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = \lambda_2 \lambda_3 + 2 \lambda_1^2 \lambda_2 - \left(\frac{1}{2} \lambda_1^2 + 2 \lambda_3\right) \varsigma_1,$$

$$A_{22} = \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_2^3 - (\lambda_2^2 + 2 \lambda_4) \varsigma_1,$$

$$A_{23} = -\lambda_2^2 - \frac{1}{2} \lambda_2 \varsigma_1, \quad A_{32} = A_{23}.$$

如果  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 > \frac{9\lambda_1^2\lambda_2^2}{4\lambda_3} + 2\lambda_2^2 + \frac{3}{2}\lambda_2\varsigma_1$  成立, 则容易验证对称矩阵  $\Pi > 0$ .

同理, 若  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 2\varsigma_1, \lambda_3 > \lambda_3^A, \lambda_4 > \lambda_4^A$  成立, 其中

$$\lambda_1^A = \frac{(9/16)(\lambda_1\varsigma_1)^2}{\lambda_2(\lambda_2 - 2\varsigma_1)} + \frac{(1/2)\lambda_1^2\varsigma_1 - 2\lambda_1^2\lambda_2}{\lambda_2 - 2\varsigma_1}, \quad (24)$$

$$\lambda_2^A = \frac{k_1}{k_2(\lambda_2 - 2\varsigma_1)} + \frac{2\lambda_2^2\varsigma_1 + \frac{1}{4}\lambda_2\varsigma_1^2}{\lambda_2 - 2\varsigma_1}, \quad (25)$$

$$k_1 = \frac{9}{16}(\lambda_1\varsigma_1)^2(\lambda_2 + \frac{1}{2}\varsigma_1)^2/\lambda_2^2.$$

$$k_2 = \lambda_2(\lambda_3 + 2\lambda_1^2) - (2\lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_1^2)\varsigma_1 - \frac{9}{16}(\lambda_1\varsigma_1)^2/\lambda_2.$$

则容易验证对称矩阵  $\Lambda > 0$ .

为同时满足  $\Pi > 0, \Lambda > 0, \lambda_1, \lambda_2 \lambda_3, \lambda_4$  需选取为

$$\begin{cases} \lambda_1 > 0, \\ \lambda_2 > 2\varsigma_1, \\ \lambda_3 > \lambda_3^A, \\ \lambda_4 > \max\left(\frac{9\lambda_1^2\lambda_2^2}{4\lambda_3} + 2\lambda_2^2 + \frac{3\lambda_2\varsigma_1}{2}, \lambda_4^A\right). \end{cases} \quad (26)$$

因此, 由式(26)和  $\lambda_{\min}(\Pi) \|\tilde{x}\|^2 \leq \tilde{x}^T \Pi \tilde{x} \leq \lambda_{\max}(\Pi) \|\tilde{x}\|^2$  得

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \tilde{x}^T \Pi \tilde{x} \leq -\frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \lambda_{\min}(\Pi) \|\tilde{x}\|^2. \quad (27)$$

定义  $\tilde{X} = \left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}, \sigma, v_v\right)^T$ , 并注意到对状态  $\sigma, v_v$  的一切值都有  $\|\tilde{X}\| = \|\tilde{x}\|$ , 因此式(27)可写成

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \lambda_{\min}(\Pi) \|\tilde{X}\|^2. \quad (28)$$

利用与文[33]相似的参数, 对于一个适当的对称正定矩阵  $P \in \mathbb{R}^{3m \times 3m}$ , 式(17)可表示为  $V = \tilde{X}^T P \tilde{X}$ , 并由  $V \leq \lambda_{\max}(P) \|\tilde{X}\|^2$ , 因此, 由式(28)

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \frac{\lambda_{\min}(\Pi)}{\lambda_{\max}(P)} V. \quad (29)$$

因为  $V^{\frac{1}{2}} > \sqrt{\lambda_{\min}(P)}\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}$ , 则对于所有  $(\sigma, v_v) \notin \Theta$ , 有

$$\dot{V} \leq -\tau_1 V^{\frac{1}{2}}, \quad (30)$$

其中  $\tau_1 = \frac{\lambda_{\min}(II)\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{\lambda_{\max}(P)}$ .

注意到式(14)–(15) 菲利波夫解的完全连续轨迹不能停留在集合  $\Theta \setminus \{0\}$ , 即, 当  $\sigma = v_v = 0$  时, 集合  $\Theta$  不包含原点. 那么, 因为如果在时刻  $t_0$ ,  $(\sigma(t_0), v_v(t_0)) \in \Theta \setminus \{0\}$ , 有  $\sigma(t_0) = 0$ , 并且因为  $(\sigma(t_0), z(t_0)) \in \Theta \setminus \{0\}$ , 由式(18),  $\dot{\sigma}(t)|_{t=t_0} = v_v(t_0) \neq 0$ . 结果, 由  $v_{vi}(t)$  完全连续性和  $v_v(t_0) \neq 0$ , 在包含  $t_0$  的时间区间  $T_0 \subset R$ , 至少有一个  $\sigma_i(t)$  会单调地穿越零点. 因此沿着式(14)–(15)的菲利波夫解, 不等式(30)几乎处处成立, 并且  $V(t)$  因此是时间的连续递减函数, 由此, 利用微分包含的Lyapunov定理, 可得, 在有限时间到达原点  $(\sigma, v_v) = 0$  的平衡点. 最后把  $\sigma = v_v = 0$  代入式(15)右端, 又因  $\hat{\psi}(0) = 0$ , 得  $\dot{\sigma} = 0$ , 因此, 有限时间到达  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ .

矩阵  $I_m + \Delta B \bar{B}^{-1}$  是一致可逆的, 在滑模中,  $v_{\text{sup}}$  的等效控制定义为  $v_{\text{sup}}^{\text{eq}}$ , 当  $\dot{\sigma} = 0$ , 可由式(11)推得

$$v_{\text{sup}}^{\text{eq}} = [I_m + \Delta B \bar{B}^{-1}]^{-1} (\Delta B \bar{B}^{-1} \bar{A} - \Delta A - \Delta B \bar{B}^{-1} v_{\text{ftc}}). \quad (31)$$

把  $v = v_{\text{ftc}} + v_{\text{sup}}^{\text{eq}}$  代入式(6), 可得类似于标称系统(7)的等效闭环动态, 因为控制律  $v_{\text{ftc}}$  是依据引理1设计, 系统轨迹有限时间收敛到零, 因此, 在有限时间建立了  $s$  的  $r$  阶滑动模态.

**注 1** 定理1证明过程是构造性的,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  参数的选取要满足式(26),  $s$  的各阶微分可通过精确鲁棒微分器<sup>[11]</sup>在线估计.

### 4 仿真验证(Simulation verification)

#### 4.1 三阶不确定积分链(Third-order uncertain integrator chain)

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,i} = z_{2,i}, \\ \dot{z}_{2,i} = z_{3,i}, \\ \dot{z}_{3,i} = v_i + \sin(10z_{1,i}). \end{cases} \quad (32)$$

为突出所设计算法的优越性, 采用文[26]所提几何齐次控制律、高阶滑模控制律针对系统(32)也进行对比仿真. 其中, 几何齐次控制律设计为

$$v_{\text{ftc},i} = -\text{sgn } z_{1,i} |z_{1,i}|^{\frac{1}{2}} - 1.5 \text{sgn } z_{2,i} |z_{2,i}|^{\frac{3}{5}} - 1.5 \text{sgn } z_{3,i} |z_{3,i}|^{\frac{3}{4}}. \quad (33)$$

高阶滑模控制律设计为

$$\begin{cases} v_i = v_{\text{ftc},i} + 1.1 \text{sgn}(z_{3,i} + z_{\text{aux}}), \\ \dot{z}_{\text{aux}} = -v_{\text{ftc},i}. \end{cases} \quad (34)$$

由式(8)和式(26), 选取  $b_{3,i} = 1.0, b_{2,i} = 1.0, b_{1,i} = 0.5, \lambda_1 = 0.01, \lambda_2 = 1.1, \lambda_3 = 0.01, \lambda_4 = 2.0$ . 其他参数与文[26]保持相同, 则本文所提连续高阶滑模控制律为

$$\begin{cases} v_i = v_{\text{nom},i} + v_{s,i}, \\ v_{\text{nom},i} = -\text{sgn } z_{1,i} |z_{1,i}|^{\frac{1}{2}} - 1.5 \text{sgn } z_{2,i} |z_{2,i}|^{\frac{3}{5}} - 1.5 \text{sgn } z_{3,i} |z_{3,i}|^{\frac{3}{4}} - 0.5 z_{1,i} - z_{2,i} - z_{3,i}, \\ \dot{z}_{\text{aux}} = -v_{\text{nom},i}, \\ v_{s,i} = -1.1 \frac{z_{3,i} + z_{\text{aux}}}{\|z_{3,i} + z_{\text{aux}}\|^{\frac{1}{2}}} + \omega_i - 0.01(z_{3,i} + z_{\text{aux}}), \\ \dot{\omega}_i = -2 \frac{z_{3,i} + z_{\text{aux}}}{\|z_{3,i} + z_{\text{aux}}\|} - 0.01(z_{3,i} + z_{\text{aux}}). \end{cases} \quad (35)$$

选取Simulink仿真步长为0.0006, 图1所示为  $z_{1,i}, z_{2,i}, z_{3,i}$  在3种不同控制律下的响应过程, 图2为各算法对应控制输入. 可以看出, 虽然齐次控制连续, 但不能保证状态有限时间收敛于原点, 算法不具有鲁棒性; 文[26]所提高阶滑模控制律能够实现状态有限时间收敛, 但是其控制输入抖振明显, 并且收敛时间较长; 在本文所提连续高阶滑模控制下, 系统(32)中不确定性  $\sin(10z_{1,i})$  是由控制器(35)中的二阶滑模控制项  $v_{s,i}$  来克服, 二阶滑模控制作用连续, 而且控制器(35)的标称控制部分  $v_{\text{nom},i}$  也是连续的, 因此整个控制器(35)连续, 相比于采用传统滑模抑制不确定性的方法, 抖振得以大大减弱.

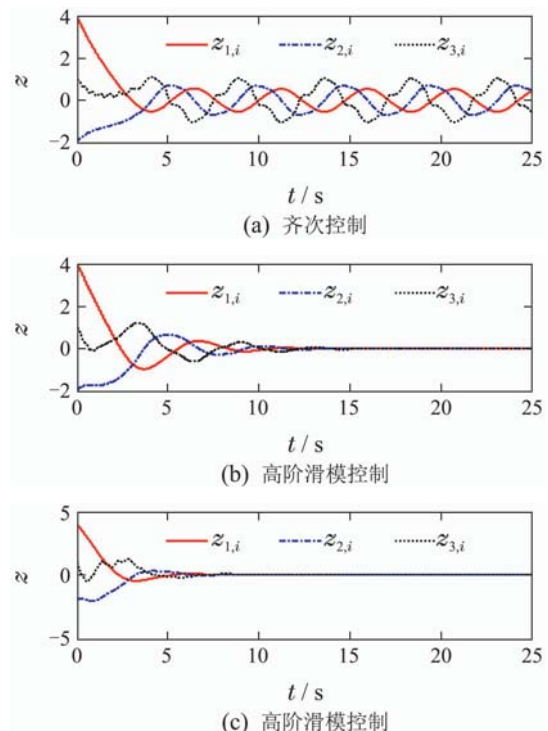


图1 状态响应

Fig. 1 States response

虽然采用了超螺旋二阶滑模, 控制作用连续, 切换控制项隐藏在  $\dot{\omega}_i$ , 抖振得以大大削弱, 但不是抖振消除, 式(14)中  $\lambda_3\lambda_4$  对抖振影响较大,  $\lambda_3\lambda_4$  越大, 控制抖振变大, 现在取  $\lambda_3 = 0.02$ ,  $\lambda_4 = 7$ , 对应的状态响应、控制输入如图3所示, 可以看出,  $\lambda_3\lambda_4$  取值增大, 控制抖振也变大, 但相对于文[26](如图2)的效果, 其抑制抖振作用明显。

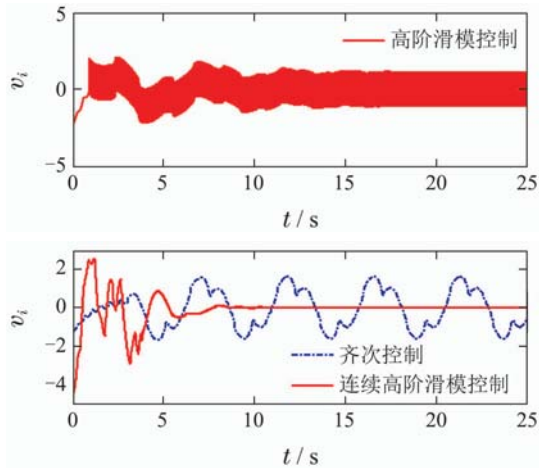


图 2 控制量输入

Fig. 2 Control input

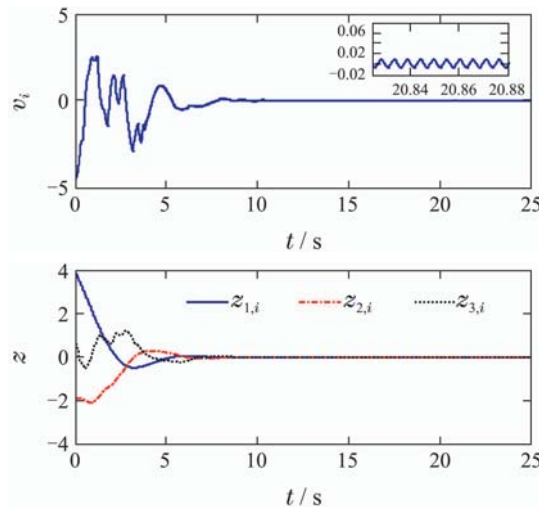


图 3 本文算法下  $\lambda_3 = 0.02$ ,  $\lambda_4 = 7$  时状态响应、控制输入

Fig. 3 States response and control input under the proposed algorithm when  $\lambda_3 = 0.02$  and  $\lambda_4 = 7$

系统的快速性主要受式(8) $\nu_{nom,i}$ 中控制参数  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  的影响, 在满足霍尔维茨稳定判据条件的前提下,  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  取值越大, 系统状态收敛越快. 图1中  $\nu_{nom,i}$  各控制参数的取值为  $a_1 = 1, a_2 = 1.5, a_3 = 1.5, b_1 = 0.5, b_2 = 1, b_3 = 1$ , 若各参数取值为  $a_1 = 1.1, a_2 = 1.7, a_3 = 1.7, b_1 = 0.7, b_2 = 1.2, b_3 = 1.1$ , 状态响应如图4, 对比图1和图4可见, 控制器(35)作用在系统的快速性与控制参数  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  的选取有很大关系, 在满足霍尔维茨稳定判据条件的前提下, 这些参数取值越大, 系统状态收敛越快。

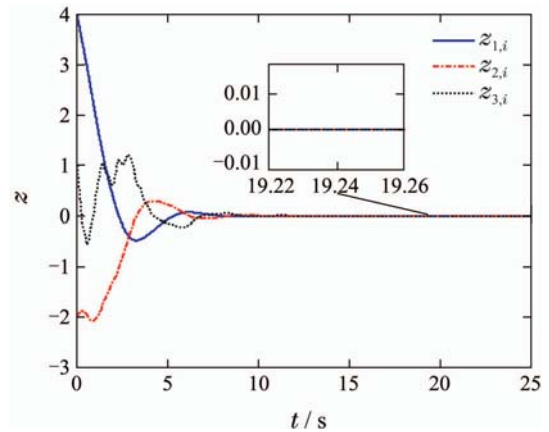


图 4 控制参数增大时状态响应

Fig. 4 States response when control parameters becomes bigger

#### 4.2 气垫船圆形航迹跟踪(Circular trajectory tracking for hovercraft)

气垫船(如图5)又称为表面效应船, 是一种兼具飞机及常规船舶航行特性的运载器, 其设计理念是借助空气动力原理, 利用垫升增压风机, 在船体与水面之间产生一层气垫, 依靠气垫静压力支撑船体, 使船体航行时吃水减小, 甚至完全脱离水面航行, 从而达到减小航行阻力和提高耐波性的目的。

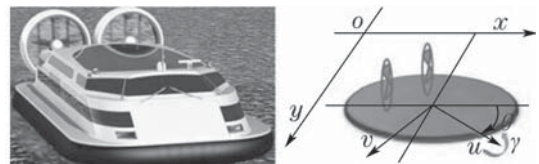


图 5 气垫船

Fig. 5 Hovercraft

气垫船垫态航行时, 船体的绝大部分都处于水面上气流中, 操纵性特点与飞机、导弹较接近, 但相比之下其速度较小, 空气舵效较低, 同时又没有常规水面船具备的水下回转部件, 所以航行时经常出现向心力不足、回转速度小、回转半径大的情况, 并且气垫船经常被要求在复杂的地理环境下按预定航线中航行, 故其航行控制难度较大. 高速航行时空气动力系数、水动力系数均会产生较大摄动, 具有明显的运动非线性特性, 难以获得精确控制规律, 对其航迹跟踪控制方法研究非常重要. 考虑包含不确定性气垫船模型<sup>[22]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta \cos \phi - \varepsilon \sin \phi, \\ \dot{y} = \eta \sin \phi + \varepsilon \cos \phi, \\ \dot{\phi} = \omega, \\ \dot{\eta} = \varepsilon \omega + u_\eta, \\ \dot{\varepsilon} = -\eta \omega - \rho \varepsilon + \Delta_\varepsilon(x), \\ \dot{\omega} = u_\omega + \Delta_\omega(t), \end{cases} \quad (36)$$

其中:  $x, y$ 是气垫船位置,  $\phi$ 表示方位角,  $\eta, \varepsilon, \omega$ 分别为纵荡、横荡和转艏角速度,  $u_\eta, u_\omega$ 是作用在船上的力和力矩。

在实际航行中, 波、浪会影响气垫船航行性能,  $\Delta_\omega(t)$ 影响其偏航速率, 文中用均值为0, 标准差是0.2的高斯噪声模拟, 转艏角速度方程中表示一定强度波、浪影响的外部扰动项取值为

$$\Delta_\varepsilon(x) = 0.15 \sin(10x) + 0.2 \cos(10x).$$

确保  $\rho\eta + u_\eta \geq \chi > 0$  非奇异, 气垫船设定航迹是以10 m为半径的圆形轨迹

$$\begin{cases} x_s(t) = 10 \cos \frac{\pi t}{6}, \\ y_s(t) = 10 \sin \frac{\pi t}{6}. \end{cases} \quad (37)$$

下面依照本文所提连续高阶滑模算法设计气垫船圆形航迹跟踪控制律。

定义滑模变量为

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_s \\ y - y_s \end{bmatrix},$$

采用动态扩展方法求取系统(36)关于滑模变量  $s$  的相对阶。计算滑模变量  $s$  的4阶微分:

$$s^{(4)} = \bar{A} + \Delta A + (\bar{B} + \Delta B) \begin{bmatrix} \ddot{u}_\eta \\ u_\omega \end{bmatrix}, \quad (38)$$

式中:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \varphi(\rho\varepsilon) - \sin \varphi(\rho\gamma + u_\eta) \\ \sin \varphi \sin \varphi(\rho\varepsilon) + \cos \varphi(\rho\gamma + u_\eta) \end{bmatrix},$$

$$\Delta B = \begin{bmatrix} 0 - \Delta_\varepsilon \cos \phi \\ 0 - \Delta_\varepsilon \sin \phi \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} (-x_s^{(4)} - \omega \cos \phi(\omega(2\rho\eta + u_\eta) + 2\rho^2\varepsilon) + \sin \phi(\rho^3\varepsilon + \omega(\rho^2\eta - 2\dot{u}_\eta - \rho u_\eta) - 2\omega^2\rho\varepsilon) \\ (-y_s^{(4)} - \omega \sin \phi(\omega(2\rho\eta + u_\eta) + 2\rho^2\varepsilon) - \cos \phi(\rho^3\varepsilon + \omega(\rho^2\eta - 2\dot{u}_\eta - \rho u_\eta) - 2\omega^2\rho\varepsilon) \end{bmatrix},$$

$\Delta A =$

$$\begin{bmatrix} ((\Delta_\varepsilon\omega^2 + \dot{\Delta}_\varepsilon\rho - \ddot{\Delta}_\varepsilon - \Delta_\omega u_\eta - \Delta_\varepsilon\rho^2 - \Delta_\omega\rho\eta) \sin \phi + (2\Delta_\varepsilon\rho\omega + \Delta_\omega\rho\varepsilon - 2\dot{\Delta}_\varepsilon\omega - \Delta_\varepsilon\Delta_\omega) \cos \phi) \\ ((\Delta_\omega u_\eta + \Delta_\varepsilon\rho^2 - \dot{\Delta}_\varepsilon\rho - \Delta_\varepsilon\omega^2 - \dot{\Delta}_\varepsilon + \Delta_\omega\rho\eta) \cos \phi + (2\Delta_\varepsilon\rho\omega + \Delta_\omega\rho\varepsilon - 2\dot{\Delta}_\varepsilon\omega - \Delta_\varepsilon\Delta_\omega) \sin \phi) \end{bmatrix}.$$

$\bar{A}, \bar{B}$ 是已知部分,  $\Delta A \Delta B$ 是依赖于扰动项  $\Delta_\varepsilon, \Delta_\omega$ 的未知不确定部分。  $\bar{B}$ 是可逆的, 则利用静态反馈

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_\eta \\ u_\omega \end{bmatrix} = \bar{B}^{-1}(\nu - \bar{A}). \quad (39)$$

式(38)进一步表示为

$$s^{(4)} = [I + \Delta B \bar{B}^{-1}] \nu + \Delta A - \Delta B \bar{B}^{-1} \bar{A}. \quad (40)$$

设计控制律为

$$\begin{cases} \nu = \nu_{\text{ftc}} + \nu_{\text{sup}}, \\ \dot{z}_{\text{aux}} = -\nu_{\text{ftc}}, \end{cases} \quad (41)$$

其中:

$$\begin{aligned} \nu_{\text{ftc}} = & -24 \begin{bmatrix} \text{sgn } s_1 |s_1|^{\frac{3}{7}} \\ \text{sgn } s_2 |s_2|^{\frac{3}{7}} \end{bmatrix} - 50 \begin{bmatrix} \text{sgn } \dot{s}_1 |\dot{s}_1|^{\frac{1}{2}} \\ \text{sgn } \dot{s}_2 |\dot{s}_2|^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} - \\ & 35 \begin{bmatrix} \text{sgn } \ddot{s}_1 |\ddot{s}_1|^{\frac{3}{5}} \\ \text{sgn } \ddot{s}_2 |\ddot{s}_2|^{\frac{3}{5}} \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} \text{sgn } s_1 |s_1|^{\frac{3}{4}} \\ \text{sgn } s_2 |s_2|^{\frac{3}{4}} \end{bmatrix} - \\ & 2 \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + z_{\text{aux}},$$

$$\nu_{\text{sup}} = -0.3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + v_v - 0.1\sigma,$$

$$\dot{v}_v = -0.3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - 0.1\sigma.$$

为突出连续高阶滑模控制器性能, 设计文[26]中所提高阶滑模控制器

$$\begin{aligned} \nu_{\text{ftc}} = & -24 \begin{bmatrix} \text{sgn } s_1 |s_1|^{\frac{3}{7}} \\ \text{sgn } s_2 |s_2|^{\frac{3}{7}} \end{bmatrix} - 50 \begin{bmatrix} \text{sgn } \dot{s}_1 |\dot{s}_1|^{\frac{1}{2}} \\ \text{sgn } \dot{s}_2 |\dot{s}_2|^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} - \\ & 35 \begin{bmatrix} \text{sgn } \ddot{s}_1 |\ddot{s}_1|^{\frac{3}{5}} \\ \text{sgn } \ddot{s}_2 |\ddot{s}_2|^{\frac{3}{5}} \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} \text{sgn } s_1 |s_1|^{\frac{3}{4}} \\ \text{sgn } s_2 |s_2|^{\frac{3}{4}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\nu_{\text{sup}} = (-0.3\|\nu_{\text{ftc}}\| + 11)\text{sgn } \sigma.$$

用精确鲁棒微分器观测  $s$  的各阶微分:

$$\begin{cases} \partial_0 = s, \partial_i = \hat{h}_{i-1} = s^{(i)}, i = 1, 2, 3, \\ \dot{\partial}_0 = \hat{h}_0, \\ \hat{h}_0 = -27.39|\partial_0 - s|^{\frac{3}{2}}\text{sgn}(\partial_0 - s) + \partial_1, \\ \dot{\partial}_1 = \hat{h}_1, \\ \hat{h}_1 = 28.97|\partial_1 - \hat{h}_0|^{\frac{2}{3}}\text{sgn}(\partial_1 - \hat{h}_0) + \partial_2, \\ \dot{\partial}_2 = \hat{h}_2, \\ \hat{h}_2 = 45|\partial_2 - \hat{h}_1|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(\partial_2 - \hat{h}_1) + \partial_3, \\ \dot{\partial}_3 = \hat{h}_3, \\ \hat{h}_3 = -980\text{sgn}(\partial_3 - \hat{h}_2), \end{cases} \quad (42)$$

其中:  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ 即为  $\dot{s}, \ddot{s}, s$ 的观测值。

取气垫船参数  $\rho = 1.2$ , 仿真步长设置为 0.006 s, 图6-7是气垫船圆形航迹跟踪曲线及  $x, y$ 方向的实际航迹与设定航迹的偏差, 可以看出两种控制算法都能实现航迹跟踪, 但本文所提连续高阶滑模控制下, 能更快跟踪航迹、跟踪精度更高。



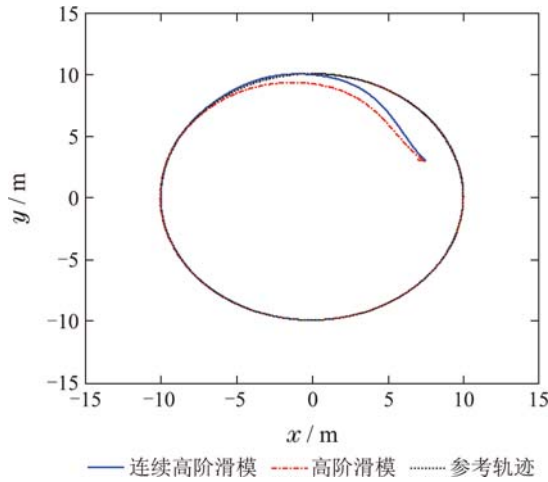


图6 气垫船航迹

Fig. 6 Hovercraft trajectory

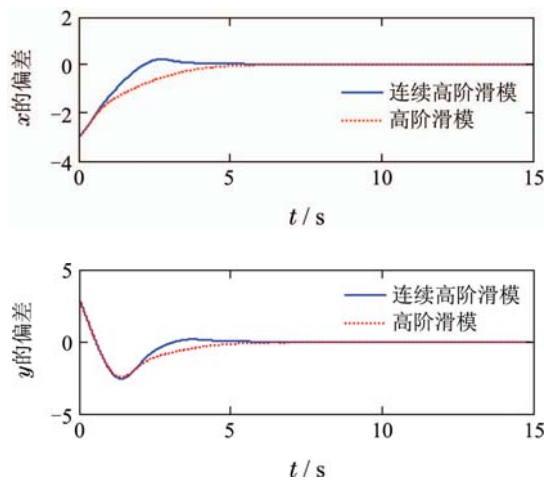


图7  $x, y$ 航迹偏差

Fig. 7 Hovercraft trajectory of  $x, y$

图8是气垫船控制力输入, 由于对控制力引入2个积分环节, 所以在两种控制算法下实际的控制力输入量 $u_\eta$ 都是连续的, 极大地抑制抖振. 但是对于控制力矩输入 $u_\omega$ , 由图9可以看出, 在文[26]高阶滑模控制下,  $u_\omega$ 抖振现象严重, 而在本文所提连续滑模控制作用下,  $u_\omega$ 是连续的, 抖振得以明显削弱.

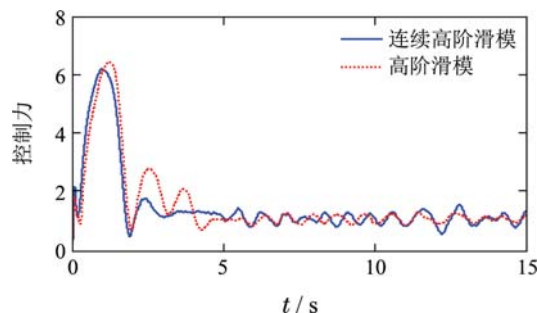


图8 气垫船控制力输入

Fig. 8 Control force of hovercraft

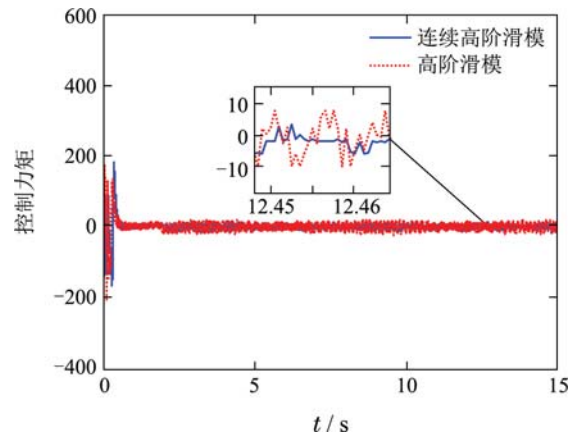


图9 气垫船控制力矩输入

Fig. 9 Control torque of hovercraft

### 5 结语(Conclusions)

提出了一类MIMO不确定系统连续高阶滑模控制方法. 通过有限时间稳定问题的转换实现MIMO系统高阶滑模控制, 系统标称部分采用一种有限时间连续控制律实现状态快速收敛, 非解耦多变量形式的超螺旋算法克服不确定性, 实现系统鲁棒控制. 两部分控制量都是连续的, 因此实现了系统整体控制输入的连续性, 极大地抑制抖振现象. 通过对三阶不确定积分链数值仿真和气垫船圆形轨迹跟踪控制仿真研究, 验证了所提连续高阶滑模控制算法的有效性、优越性. 多机电力系统是一种MIMO非线性系统, 其暂态稳定性极其重要, 下一步研究本算法在多机电力系统励磁控制中的应用.

### 参考文献(References):

- [1] YU Jing, CHEN Mou, JIANG Changsheng. Adaptive sliding mode control for nonlinear uncertain systems based on disturbance observer [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(8): 993 – 999. (于靖, 陈谋, 姜长生. 基于干扰观测器的非线性不确定系统自适应滑模控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(8): 993 – 999.)
- [2] SAOUDI K, HARMAS M N. Enhanced design of an indirect adaptive fuzzy sliding mode power system stabilizer for multi-machine power systems [J]. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2014, 54(1): 425 – 431.
- [3] VALENCIAGA F A. Second order sliding mode path following control for autonomous surface vessels [J]. *Asian Journal of Control*, 2014, 16(5): 1515 – 1521.
- [4] ZOU Quan, QIAN Linfang, JIANG Qingshan. Adaptive fuzzy sliding mode control for permanent magnet synchronous motor servo system [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(6): 817 – 822. (邹权, 钱林方, 蒋清山. 永磁同步电机伺服系统的自适应模糊滑模控制 [J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(6): 817 – 822.)
- [5] WANG Jie, ZONG Qun, TIAN Bailing, et al. Reentry attitude control for hypersonic vehicle based on quasi-continuous high order sliding mode [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(9): 1166 – 1173. (王婕, 宗群, 田栢苓, 等. 基于拟连续高阶滑模的高超声速飞行器再入姿态控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(9): 1166 – 1173.)
- [6] TONG S, LI H X. Fuzzy adaptive sliding-mode control for MIMO nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2003, 11(3): 354 – 360.



- [7] MONDAL S, MAHANTA C. Chattering free adaptive multivariable sliding mode controller for systems with matched and mismatched uncertainty [J]. *ISA Transactions*, 2013, 52(3): 335 – 341.
- [8] GUO Yishen, SUN Fuchun. Terminal sliding-mode control for a class of  $n$ th-order multi-input multi-output nonlinear system with uncertain parameters [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(3): 324 – 329.  
(郭益深, 孙富春. 一类具有参数不确定 $n$ 阶多输入多输出非线性系统的Terminal滑模控制 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(3): 324 – 329.)
- [9] CHIU C S. Derivative and integral terminal sliding mode control for a class of MIMO nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2012, 48(2): 316 – 326.
- [10] LEVANT A. MIMO 2-sliding control design [C] // *European Control Conference ECC 2003*. Stevenage, UK: IEE, 2003: 969 – 974.
- [11] LEVANT A, MICHAEL A. Adjustment of high-order sliding-mode controllers [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, 19(15): 1657 – 1672.
- [12] ZONG Q, ZHAO Z S, ZHANG J. Higher order sliding mode control with self-tuning law based on integral sliding mode [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2010, 4(7): 1282 – 1289.
- [13] CHEN Jie, LI Zhiping, ZHANG Guozhu. Higher-order sliding-mode controller for a class of uncertain nonlinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(5): 563 – 569.  
(陈杰, 李志平, 张国柱. 不确定非线性系统的高阶滑模控制器设计 [J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(5): 563 – 569.)
- [14] ZHAO Zhanshan, ZHANG Jing, SUN Liankun, et al. Higher order sliding mode control with self-turning law for a class of uncertain nonlinear systems [J]. *Control and Decision*, 2011, 26(8): 1277 – 1280.  
(赵占山, 张静, 孙连坤, 等. 一类非线性不确定系统高阶滑模自适应控制设计 [J]. *控制与决策*, 2011, 26(8): 1277 – 1280.)
- [15] TALEB M, PLESTAN F, BOUOULID B. An adaptive solution for robust control based on integral high-order sliding mode concept [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(8): 1201 – 1213.
- [16] WANG L, SHENG Y, LIU X. A novel adaptive high-order sliding mode control based on integral sliding mode [J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2014, 12(3): 459 – 472.
- [17] PISANO, ALESSANDRO. On the multi-input second-order sliding mode control of nonlinear uncertain systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, 22(15): 1765 – 1778.
- [18] EVANGELISTA C A, VALENCIAGA F, PULESTON P. Multivariable 2-sliding mode control for a wind energy system based on a double fed induction generator [J]. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2012, 37(3): 10070 – 10075.
- [19] BELTRAN B M, BENBOUZID E H, AHMED-ALI T. Second-order sliding mode control of a doubly fed induction generator driven wind turbine [J]. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 2012, 27(2): 261 – 269.
- [20] CHANG J L. Robust dynamic output feedback second-order sliding mode controller for uncertain systems [J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2013, 11(5): 878 – 884.
- [21] ZONG Q, WANG J, TIAN B, et al. Quasi-continuous high-order sliding mode controller and observer design for flexible hypersonic vehicle [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2013, 27(1): 127 – 137.
- [22] SIRA-RAMIREZ H. Dynamic second-order sliding mode control of the hovercraft vessel [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, 10(6): 860 – 865.
- [23] LEVANT A, LIVNE M. Uncertain disturbances' attenuation by homogeneous multi-input multi-output sliding mode control and its discretisation [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2015, 9(4): 515 – 525.
- [24] LEVANT A. Gain-scheduled high-order MIMO sliding mode control [C] // *2010 the 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2010)*. Atlanta, GA, USA: IEEE, 2010: 5150 – 5155.
- [25] TULLIO A M, FRIDMAN L, MORENO J A. Output-feedback finite-time stabilization of disturbed feedback linearizable nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2013, 49(9): 2767 – 2773.
- [26] DEFOORT M, FLOQUET T, KOKOSY A, et al. A novel higher order sliding mode control scheme [J]. *Systems & Control Letters*, 2009, 58(2): 102 – 108.
- [27] MONDAL S, MAHANTA C. Adaptive integral higher order sliding mode controller for uncertain systems [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2013, 11(1): 61 – 68.
- [28] FENG Y, HAN F, YU X. Chattering free full-order sliding-mode control [J]. *Automatica*, 2014, 50(4): 1310 – 1314.
- [29] BASIN M V, RODRÍGUEZ RAMÍEZ P C. A supertwisting algorithm for systems of dimension more than one [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(1): 6472 – 6480.
- [30] EDWARDS C, SHTESSEL Y. Adaptive continuous higher order sliding mode control [C] // *The 19th IFAC world congress on international federation of automatic control, IFAC 2014*. Cape Town, South africa: IFAC Secretariat, Schlossplatz, 2014, 19(1): 10826 – 10831.
- [31] BASIN M, RODRIGUEZ-RAMIREZ P, DING S, et al. A nonhomogeneous super-twisting algorithm for systems of relative degree more than one [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(4): 1364 – 1377.
- [32] SHTESSEL Y, KOCHALUMMOOTIL J, EDWARDS C, et al. Continuous adaptive finite reaching time control and second-order sliding modes [J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2013, 30(1): 97 – 113.
- [33] MORENO J, OSORIO M. Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(4): 1035 – 1040.

#### 作者简介:

刘向杰 (1966–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为非线性控制、预测控制理论智能化控制、电站节能与优化、新能源控制, E-mail: liuxj@ncepu.edu.cn;

韩耀振 (1984–), 男, 博士研究生, 研究方向为滑模控制理论、风力发电自动控制、船舶运动控制, E-mail:hyz125@163.com.