

Petri网信标和陷阱计算的矩阵半张量积方法

韩晓光^{1,2†}, 陈增强^{1,2,3}, 刘忠信^{1,2}, 张青³

(1. 南开大学 计算机与控制工程学院, 天津 300350;

2. 南开大学 天津市智能机器人技术重点实验室, 天津 300350; 3. 中国民航大学 理学院, 天津 300300)

摘要: 本文基于矩阵半张量积(semi-tensor product, STP)方法研究了普通Petri网(Petri nets, PNs)信标和陷阱的计算问题. 首先, 利用STP方法建立了两个矩阵方程, 分别称为Petri网的信标方程(siphon equation, SE)和陷阱方程(trap equation, TE). 其次, 证明了计算Petri网的信标和陷阱分别等价于求信标方程(SE)和陷阱方程(TE)的非零解. 同时, 给出了计算Petri网所有信标和陷阱的算法. 最后, 实例和实验结果说明了本文方法的可行性与有效性. 本文所提出的方法对于Petri网信标和陷阱的计算是非常有效的, 它只涉及到矩阵的乘法运算.

关键词: Petri网; 信标; 陷阱; 矩阵的半张量积; 信标方程; 陷阱方程

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Calculation of siphons and traps in Petri nets using semi-tensor product of matrices

HAN Xiao-guang^{1,2†}, CHEN Zeng-qiang^{1,2,3}, LIU Zhong-xin^{1,2}, ZHANG Qing³

(1. College of Computer and Control Engineering, Nankai University, Tianjin 300350, China;

2. Key Laboratory of Intelligent Robotics of Tianjin, Nankai University, Tianjin 300350, China;

3. College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

Abstract: We address the problems of calculating siphons and traps in ordinary Petri nets (PNs) by resorting to the semi-tensor product (STP) of matrices. First, two matrix equations, called the siphon equation (SE) and trap equation (TE), respectively, are established by using STP. Second, it is proved that the problems of calculating all of the siphons and the traps in PNs are equivalent to solve all nonzero solutions of SE and TE, respectively. An algorithm is proposed to calculate all siphons and traps in PNs. Finally, an example and some experimental results are presented to illustrate the theoretical results and show that the proposed approach is more effective than the existing approach in calculating all siphons and traps in PNs. The proposed approach only requires matrix manipulations.

Key words: Petri nets (PNs); siphon; trap; the semi-tensor product (STP) of matrices; siphon equation (SE); trap equation (TE)

1 引言(Introduction)

Petri网是离散事件系统建模、分析和控制的有效工具之一^[1-4], 尤其是描述和管控系统的冲突、并发、同步、不确定和随机等行为非常有效. 它受到了来自控制领域和计算机领域学者的普遍关注, 并被广泛应用于柔性制造系统^[5-6]、并行软件系统^[7]和系统生物学^[8]等领域.

Petri网系统有许多性质, 如死锁、陷阱、活性和可达性等. 这些性质可分为两类, 一类和初始状态无关且只反映网系统的结构特性. 另一类和初始状态有关

且反映的是Petri网系统的动态特性. 信标和陷阱作为Petri网系统死锁重要的结构特征, 它们具有如下特性: 一个信标一旦在某一状态下被清空, 则在该状态的所有后续状态此信标总是被清空的(即一个不含标识的信标, 永远不会得到标识). 一个陷阱一旦在某一状态下含有标识, 则在该状态的所有后续状态此陷阱总是含有标识的(即一个含有标识的陷阱, 永远不会失去标识). 这样, 对于一个被清空的信标来说, 它的后继变迁都是不具有发生权的. 因此, 这些变迁是死的, 进而导致了包含这些变迁的网系统出现死锁状态.

收稿日期: 2015-11-17; 录用日期: 2016-04-01.

†通信作者. E-mail: hxg-allen@163.com; Tel.: +86 15022794969.

本文责任编辑: 赵千川.

国家自然科学基金项目(61573199, 61573200), 天津市自然科学基金项目(14JCYBJC18700, 13JCYBJC17400)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61573199, 61573200) and Natural Science Foundation of Tianjin (14JCYBJC18700, 13JCYBJC17400).

在实际系统中,死锁状态是人们最不希望看到的.因为它的发生会产生很大成本,而且有时会带来非常严重的后果.如在自动炼钢生产系统中,一旦出现死锁状态将可能使钢水凝固,从而使某些设备报销,甚至会造成重大事故.因此,死锁避免和预防是Petri网系统研究的重要问题之一[6,9-10].

为了解决死锁引起的问题,首先面对的问题是如何找到Petri网系统的信标和陷阱.到目前为止,计算信标和陷阱的主要方法有不等式[3]、逻辑等式[11-13]、线性代数和不变量[14]、带松弛变量的线性方程[15]、符号关联矩阵[16]和可重复向量[17]等.事实上,由于信标和陷阱随网系统规模呈指数增长.这样,当网系统规模非常大的时候,计算Petri网所有信标和陷阱是非常困难的.据作者所知,所存在的这些计算方法大都是基于搜索算法的,且都是指数复杂性的.

针对上述的这些方法,计算Petri所有信标和陷阱最常用的方法是基于逻辑等式方法[11-12].该方法形式相对简单,其主要思想是计算Petri网的信标和陷阱问题等价于求某些逻辑等式(见本文引理4)的根.在文献[12],首先将布尔函数转换成合取范式(conjunctive normal form, CNF).然后利用泰伦方法求CNF的所有素蕴含项(prime implicants),进而得到一个搜索树.再利用这些素蕴含项构造一个三元矩阵,对三元矩阵进行组合搜索可求得Petri网的所有信标和陷阱.但是,所求的搜索树的节点数最多为 $1 + \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^i L_j$,其中 L_j 表示第 j 个子句中的文字个数,这是一个很大的数.为了降低搜索树的大小(节点个数),文献[11]提出了泰伦启发式算法,其思想是对CNF中的子句(clauses)和变量(variables)先进行排序.再求其素蕴含项.实验表明该方法大大降低了搜索树的大小,但在最坏的情况下(即CNF中的子句及其文字不重复出现)并没有改变其计算复杂性.众所周知,矩阵技术对于系统的理论分析和计算机实现是非常方便和有效的工具.因此,一种基于矩阵计算Petri网信标和陷阱的方法是至关重要的.

最近,一种新的矩阵乘积,叫半张量积(STP),由程代展教授提出的[18],它是普通矩阵乘法的推广.至今已形成了相当规模的应用研究领域,包括:布尔网络[19-20]、博弈论[21-22]、有限自动机[23-24]和模糊控制[25]等,更详细的介绍见文献[26].熟知,当问题涉及有限集、有限状态的逻辑动态系统时,STP是非常有效的工具.基于计算Petri网信标和陷阱问题可归纳为布尔逻辑等式求解问题.因此,利用STP方法计算Petri网信标和陷阱是很自然和有意义的尝试.接下来将会看到,本文所建立的数学模型不仅形式非常简单,而且根的求解是直接计算的工作.

本文的主要贡献如下:

1) 一种新的矩阵工具,即矩阵的半张量积,首次应用于计算Petri网的信标和陷阱.

2) 提出了一种新颖的计算信标和陷阱的求解技术.即利用STP将逻辑等式转化为矩阵方程,分别称之为Petri网的信标方程和陷阱方程.并证明了计算Petri网信标和陷阱问题分别等价于求信标方程和陷阱方程的非零解.

3) 设计了计算Petri网所有信标和陷阱的一个有效算法,实验结果表明了该算法的可行性和优越性.

本文内容安排如下:第2节介绍了本文所用到的基础知识,包括基本符号、STP的概念及相关结论、Petri网信标和陷阱的概念及相关结论.第3节基于STP方法建立了Petri网的信标方程和陷阱方程,并设计了计算Petri网所有信标和陷阱的有效算法.第4节为实例分析.第5节为实验结果.第6节为本文结论和未来研究方向.

2 预备知识(Preliminaries)

2.1 符号说明(Notations)

- $\mathcal{M}_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 实矩阵的集合.
 - $\text{col}_i(M)$ 表示矩阵 M 的第 i 列.
 - $\text{col}(L)$ 表示矩阵 L 列构成的集合.
 - $\mathcal{D} := \{0, 1\}$.
 - $|X|$ 表示集合 X 的势.
 - $\Delta_n := \{\delta_n^1, \delta_n^2, \dots, \delta_n^n\}$,其中 δ_n^k 是单位矩阵 I_n 的第 k 列, $k = 1, 2, \dots, n$.特别地,当 $n = 2$, $\Delta_2 := \{\delta_2^1, \delta_2^2\}$.并简记为 $\Delta_2 = \Delta$.
 - 若 $L \in \mathcal{M}_{m \times n}$,且 $\text{col}(L) \subseteq \Delta_m$,则称 L 为逻辑矩阵. $\mathcal{L}_{m \times n}$ 表示逻辑矩阵构成的集合.若 $L \in \mathcal{L}_{m \times n}$,则 $L = [\delta_m^{i_1}, \delta_m^{i_2}, \dots, \delta_m^{i_n}]$.简记为
- $$L = \delta_m[i_1, i_2, \dots, i_n], i_k \in \{1, 2, \dots, m\}.$$
- \mathbb{R}^n 表示实数域上 n 维向量构成的集合.

2.2 矩阵的半张量积 (Semi-tensor product of matrices)

这一子节,只给出本文所用到矩阵半张量积(STP)的一些内容.有关STP更详细介绍见文献[27].

定义 1 设矩阵 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{p \times q}$,则 A 与 B 的半张量积定义如下:

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{t/n})(B \otimes I_{t/p}), \quad (1)$$

其中: $t = \text{lcm}(n, p)$ 为 n 与 p 的最小公倍数, \otimes 为矩阵的Kronecker积.

注 1 当 $n = p$ 时,式(1)变为 $A \ltimes B = AB$,即STP是普通矩阵乘积的推广.在不导致混淆情况下,本文略去符号“ \ltimes ”.

定义 2 一个换位矩阵 $W_{[m,n]}$ 是一个 $mn \times mn$ 矩阵,其定义如下:

$$W_{[m,n]} = \delta_{mn}[1, m+1, \dots, (n-1)m+1, \\ 2, m+2, \dots, (n-1)m+2, \dots,$$

$$m, 2m, \dots, nm]. \quad (2)$$

引理 1 设 $X \in \mathbb{R}^m$ 和 $Y \in \mathbb{R}^n$ 为两个列向量, 则

$$W_{[m,n]}XY = YX, W_{[n,m]}YX = XY. \quad (3)$$

引理 2 1) 设 $X \in \mathbb{R}^t$ 为行向量, 且 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, 则

$$AX = X(I_t \otimes A). \quad (4)$$

2) 设 $X \in \mathbb{R}^t$ 为列向量, 且 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, 则

$$XA = (I_t \otimes A)X. \quad (5)$$

引理 3 设降幂矩阵 $M_r = \delta_4[1, 4]$, 则

$$X^2 = M_r X, \forall X \in \Delta. \quad (6)$$

2.3 Petri网(Petri nets)

为节省空间, 这一子节只给出本文所用到Petri网的一些概念及结论. 有关Petri网理论和应用更具体的介绍见文献[2]或文献[3].

一个Petri网图是一个4元组 $N = (P, T, F, W)$, 其中: $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 为有限库所集, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ 表示有限变迁集, $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ 表示弧/流关系集合, $P \cap T = \emptyset$ 且 $P \cup T \neq \emptyset$, $W: F \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ 为弧上的权函数. 带有初始标识/初始状态 M_0 的Petri网图 $N = (P, T, F, W)$ 是一个动态系统, 称为Petri网系统, 记为 $\langle N, M_0 \rangle$. 如果 $W: F \rightarrow \{1\}$ (即权函数 W 的函数值恒等于1), 称其为普通Petri网, 并简记为 $N = (P, T, F)$. 本文以下部分只讨论普通Petri网.

为了方便起见, 在本文中节点 $x \in P \cup T$ 的前集与后集分别记为 $\cdot x = \{y \in P \cup T | (y, x) \in F\}$ 和 $x \cdot = \{y \in P \cup T | (x, y) \in F\}$.

一个非空库所子集 S (即 $\emptyset \neq S \subseteq P$) 称为信标当且仅当 $\cdot S \subseteq S$. S 称为陷阱当且仅当 $S \cdot \subseteq S$. 如果一个信标(陷阱) S 不能表示成其他信标(陷阱)的并, 则称 S 为基本信标(基本陷阱). 如果一个信标(陷阱) S 不包含其他任何信标(陷阱), 则称 S 为最小信标(最小陷阱). 所有的最小信标(最小陷阱)皆为基本信标(基本陷阱), 但并不是所有的基本信标(基本陷阱)皆为最小信标(最小陷阱).

众所周知, Petri网的信标和陷阱是对立的概念. 换句话说, 能够用于计算信标的方法同样适用于计算陷阱. 因此, 为了避免重复, 本文以信标为例讨论其计算方法, 陷阱只给出相应的结论.

3 Petri网信标和陷阱的计算 (Calculation of siphons and traps in Petri nets)

3.1 信标和陷阱的逻辑表示 (Logic expression of siphons and traps)

信标作为Petri网死锁的结构特性, 它与初始状态无关且可由Petri网的结构分析而得到. 从信标的定义

可知, 一个信标 S 必满足如下条件:

对任意变迁 $t \in T$, 如果存在库所 $p_i \in S$, 使得 $(t, p_i) \in F$. 则存在库所 $P_j \in S$, 使得 $(p_j, t) \in F$.

下面考虑上述条件如何由逻辑方程表示. 为此, 考虑逻辑变量集 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 其中: $n = |P|$, $x_i \in \mathcal{D}, i=1, 2, \dots, n$. 设 $x_i=1$ 当且仅当 $p_i \in S$. 则在集合 X 与 S 之间存在一个双射 f , 其定义如下:

$$f(x_i) = p_i, 1 = x_i \in X. \quad (7)$$

记 X_i 和 X_j 分别表示相应于 $\cdot t_i$ 和 $t_i \cdot$ 的 X 的子集. $\vee [X_i]$ 和 $\vee [X_j]$ 分别表示对应变量的析取形式. 则对于变迁 t_j , 有如下的逻辑等式:

$$\vee [X_j] \rightarrow \vee [X_j] = 1, j = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

这样, Petri网 $N = (P, T, F)$ 的所有信标满足如下逻辑等式:

$$\begin{cases} \vee [X_1] \rightarrow \vee [X_1] = 1, \\ \vee [X_2] \rightarrow \vee [X_2] = 1, \\ \vdots \\ \vee [X_m] \rightarrow \vee [X_m] = 1. \end{cases} \quad (9)$$

利用逻辑的合取运算将式(9)等价的表示为

$$\bigwedge_{j=1}^m (\vee [X_j] \rightarrow \vee [X_j]) = 1, \quad (10)$$

其中 $m = |T|$.

类似地, 对Petri网 $N = (P, T, F)$ 的陷阱, 有

$$\bigwedge_{j=1}^m (\vee [X_j] \rightarrow \vee [X_j]) = 1, \quad (11)$$

其中 $m = |T|$.

因此, 有如下引理:

引理 4 Petri网 $N = (P, T, F)$ 的所有信标和陷阱可由上述逻辑等式(10)和式(11)的根分别确定.

3.2 逻辑变量的矩阵表示 (Matrix representation of logical variables)

为了得到逻辑等式(10)和式(11)的矩阵形式, 先讨论逻辑变量的矩阵表示. 为此, 设 $1 \sim \delta_2^1, 0 \sim \delta_2^2$, 则 $\mathcal{D} = \{0, 1\} \sim \Delta = \{\delta_2^1, \delta_2^2\}$, 其中“ \sim ”表示逻辑等价关系. 并且称 δ_2^1 为1的向量形式, δ_2^2 为0的向量形式. 这样, 在集合 $X \in \mathcal{D}$ 与 $x \in \Delta$ 之间可以建立一个双射

$$x = \begin{pmatrix} X \\ \neg X \end{pmatrix},$$

其中 $\neg X$ 表示逻辑变量 X 的逻辑非. 借助STP和下面的引理6, 可将这个双射推广为一般情形. 即在 \mathcal{D}^n 和 Δ^n 之间建立如下双射:

设 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T \in \mathcal{D}^n$, 则有

$$x = \begin{pmatrix} X_1 \\ \neg X_1 \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} X_n \\ \neg X_n \end{pmatrix} \in \Delta^n. \quad (12)$$

下面的两个引理对于Petri网的信标方程和陷阱方程的建立和求解是至关重要的. 它们来自文献[20].

引理5 设逻辑变量 $x, y \in \Delta$, $x \vee y$ 为析取运算, $x \wedge y$ 为合取运算, $x \rightarrow y$ 为蕴含运算. 则

$$\begin{cases} x \vee y = M_d xy, \\ x \wedge y = M_c xy, \\ x \rightarrow y = M_i xy, \end{cases} \quad (13)$$

其中: $M_d = \delta_2[1, 1, 1, 2]$, $M_c = \delta_2[1, 2, 2, 2]$, $M_i = \delta_2[1, 2, 1, 1]$.

引理6 设 $x = \bigotimes_{j=1}^k x_j = \delta_{2^k}^i$, 则 x_j 的标量值可由下式递推得到:

$$\begin{cases} x_j = \lfloor \frac{B_{j-1}}{2^{k-j}} \rfloor, \\ B_j = B_{j-1} - x_j * 2^{k-j}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \end{cases} \quad (14)$$

其中: $B_0 := 2^k - i$, $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数.

3.3 主要结果(The main results)

定理1 逻辑等式(10)和式(11)可分别等价地表示为如下矩阵方程:

$$L_1 x = b, \quad (15)$$

$$L_2 x = b, \quad (16)$$

其中: $L_i \in \mathcal{L}_{2 \times 2^n}$ ($i = 1, 2$) 是唯一存在的逻辑矩阵, $x = \bigotimes_{k=1}^n x_k$, $b = \delta_2^1$.

证 仅证式(10)和式(15)等价, 式(11)和式(16)的等价类似可证.

事实上, 因为式(10)的左端只包含析取(\vee), 合取(\wedge)和蕴含(\rightarrow)3种逻辑运算, 利用引理5, 有

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{j=1}^m (\vee [X_j] \rightarrow \vee [X_j]) = \\ & m_c^{m-1} (\vee [X_1] \rightarrow \vee [X_1]) (\vee [X_2] \rightarrow \vee [X_2]) \cdots \\ & (\vee [X_m] \rightarrow \vee [X_m]) = \\ & m_c^{m-1} [m_i (\vee [X_1]) (\vee [X_1])] [m_i (\vee [X_2]) (\vee [X_2])] \cdots \\ & [m_i (\vee [X_m]) (\vee [X_m])] = \\ & m_c^{m-1} [m_i (m_d^{t_1-1} x_{k_1^1} \cdots x_{k_{t_1}^1}) (m_d^{s_1-1} x_{u_1^1} \cdots x_{u_{s_1}^1})] \cdots \\ & [m_i (m_d^{t_m-1} x_{k_1^m} \cdots x_{k_{t_m}^m}) (m_d^{s_m-1} x_{u_1^m} \cdots x_{u_{s_m}^m})] = \\ & m_c^{m-1} m_i m_d^{t_1-1} x_{k_1^1} \cdots x_{k_{t_1}^1} m_d^{s_1-1} x_{u_1^1} \cdots x_{u_{s_1}^1} \cdots \\ & m_i m_d^{t_m-1} x_{k_1^m} \cdots x_{k_{t_m}^m} m_d^{s_m-1} x_{u_1^m} \cdots x_{u_{s_m}^m} \end{aligned}$$

其中: $m_d^0 = I_2$, $|X_j| = s_j$, $|X_j^i| = t_j$, $x_{u_v^j} \in X_j$, $x_{k_w^j} \in X_j^i$, $v = 1, 2, \dots, s_j$, $w = 1, 2, \dots, t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$.

反复利用引理1-3, 可以得到

$$\bigwedge_{j=1}^m (\vee [X_j] \rightarrow \vee [X_j]) = L_1 \bigotimes_{i=1}^n x_i.$$

为了证明唯一性, 假设存在逻辑矩阵 $L_1 \neq L'_1$, 使得

$$\bigwedge_{j=1}^m (\vee [X_j] \rightarrow \vee [X_j]) = L_1 \bigotimes_{i=1}^n x_i,$$

$$\bigwedge_{j=1}^m (\vee [X_j] \rightarrow \vee [X_j]) = L'_1 \bigotimes_{i=1}^n x_i.$$

因为 $L_1 \neq L'_1$, 则至少存在 $t \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$, 使得

$$\text{col}_t(L_1) \neq \text{col}_t(L'_1).$$

这样, 取 $x = \bigotimes_{i=1}^n x_i = \delta_{2^n}^t$, 则

$$\bigwedge_{j=1}^m (\vee [X_j] \rightarrow \vee [X_j]) = L_1 \bigotimes_{i=1}^n x_i = \text{col}_t(L_1),$$

$$\bigwedge_{j=1}^m (\vee [X_j] \rightarrow \vee [X_j]) = L'_1 \bigotimes_{i=1}^n x_i = \text{col}_t(L'_1).$$

这与 $\text{col}_t(L_1) \neq \text{col}_t(L'_1)$ 矛盾, 唯一性得证.

最后, 令 $b = \delta_2^1$, 则式(15)成立. 证毕.

定义3 矩阵方程(15)和(16)分别称为Petri网 $N = (P, T, F)$ 的信标方程和陷阱方程. 逻辑矩阵 L_1 和 L_2 分别称为 $N = (P, T, F)$ 的信标矩阵和陷阱矩阵.

注2 定理1中Petri网的信标方程和陷阱方程的主要优势在于计算它们的所有解是非常方便和直接的工作. 从下面的引理7可以看出它们的优势所在.

设 $L_i = \delta_2[i_1, i_2, \dots, i_{2^n}]$, $i = 1, 2$, $i_j \in \{1, 2\}$, $j = 1, 2, \dots, 2^n$. 有如下引理:

引理7 $x = \bigotimes_{t=1}^n x_t = \delta_{2^n}^k$ 是矩阵方程(15)(式(16))的解当且仅当 $i_k = 1$.

证 必要性. 设 $x = \bigotimes_{t=1}^n x_t = \delta_{2^n}^k$ 是方程(15)(式(16))的解. 则有

$$b = \delta_2^1 = L_i \bigotimes_{t=1}^n x_t = \delta_2 [i_1, i_2, \dots, i_{2^n}] \delta_{2^n}^k = \delta_2^{i_k},$$

即 $i_k = 1$.

充分性. 设 $x = \bigotimes_{t=1}^n x_t = \delta_{2^n}^k$ 且 $i_k = 1$, 则

$$L_i \bigotimes_{t=1}^n x_t = \delta_2 [i_1, i_2, \dots, i_{2^n}] \delta_{2^n}^k = \delta_2^k = \delta_2^1 = b,$$

即 $x = \bigotimes_{t=1}^n x_t = \delta_{2^n}^k$ 是方程(15)(式(16))的解.

证毕.

注3 由引理6和式(12)可知: $x = \delta_{2^n}^k$ ($k < 2^n$) 所对应的向量为 n 维非零列向量, $x = \delta_{2^n}^{2^n}$ 所对应的向量为 n 维零向量. 为了便于Petri网信标和陷阱的计算, 若 $x = \delta_{2^n}^k$ ($k < 2^n$) 和 $x = \delta_{2^n}^{2^n}$ 为方程(15)(式(16))的解, 则称 $x = \delta_{2^n}^k$ ($k < 2^n$) 为方程(15)(式(16))的非零解; $x = \delta_{2^n}^{2^n}$ 为方程(15)(式(16))的零解.

利用引理7, 很容易求得信标方程(15)和陷阱方程(16)的所有非零解. 设其为

$$x = \delta_{2^n}^{i_1}, \delta_{2^n}^{i_2}, \dots, \delta_{2^n}^{i_k},$$

其中 $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k < 2^n$.

利用引理6和式(12), 可以得到这 k 个解的向量形式分别为

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k,$$

其中 $\alpha_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, k$.

为了得到 Petri 网 $N = (P, T, F)$ 的所有信标和陷阱, 在 S_i 和 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 之间建立如下一个双射:

$$S_i = f(\alpha_i) = \{p_r \in P \mid x_r^i = 1\}, \quad (17)$$

其中:

$$\alpha_i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)^T, x_r^i \in \mathcal{D}, r = 1, 2, \dots, n.$$

例如, 设 $\alpha_i = (1, 0, 1, 0)^T$, 则 $S_i = \{p_1, p_3\}$. 反之亦然.

推论 1 设 Petri 网 $N = (P, T, F)$ 的信标方程和陷阱方程分别如式(15)和式(16)所示. 则

1) Petri 网 $N = (P, T, F)$ 的所有信标为信标方程(15)的所有非零解.

2) Petri 网 $N = (P, T, F)$ 的所有陷阱为陷阱方程(16)的所有非零解.

推论 2 设 $S = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_u}\}$ 为 Petri 网库所集 P 的一个非空子集. 并且令 $x = \prod_{i=1}^n x_n = \delta_{2^n}^k$ 使得 $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_u} = \delta_2^1$, 而其他的 $x_j = \delta_2^0$. 则 S 为 $N = (P, T, F)$ 的一个信标(陷阱)当且仅当 x 为信标方程(15)(陷阱方程(16))的一个非零解.

注 4 推论 2 给出了判别一个非空库所子集是否为 Petri 网一个信标(陷阱)的一个充要条件.

3.4 算法和复杂度分析(Algorithm and complexity analysis)

3.4.1 算法的设计(Design of the algorithm)

基于以上的分析和讨论, 本文给出计算 Petri 网所有信标和陷阱的一个有效算法.

Petri 网信标(陷阱)的计算.

Step 1 计算变迁 t_j 的输入库所集和输出库所集 $\cdot t_j = X_j$ 和 $t_j = X_j^*, j = 1, 2, \dots, m$.

Step 2 利用引理 4, 建立逻辑等式(10)(式(11)).

Step 3 利用引理 1-3 和引理 5 建立信标方程(15)(陷阱方程(16)).

Step 4 计算信标方程(15)(陷阱方程(16))的所有非零解. 若信标方程(15)(陷阱方程(16))无非零解, 说明此 Petri 网没有信标(陷阱). 否则, 继续 Step 5.

Step 5 利用引理 6, 将信标方程(15)(陷阱方程(16))的所有非零解分别表示成 $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ 形式. 再利用式(17)可得到 Petri 网的所有信标(陷阱).

3.4.2 复杂性分析 (Complexity analysis of the proposed algorithm)

这一子节, 讨论本文所提出算法的计算复杂度. 由定理 1 可知, 求 Petri 网 $N = (P, T, F)$ 的所有信标(陷

阱)等价于求矩阵方程(15)(式(16))所有非零解. 由于这个线性方程组的系数矩阵 $L_i (i = 1, 2)$ 的维数为 2×2^n , 因此, 本文所提出的算法的计算复杂度为 $o(2^n)$, 其中 n 表示 $N = (P, T, F)$ 库所的个数.

由文献[16]可知, Petri 网的信标和陷阱个数随着网系统规模的变大呈指数级增长. 到目前为止, 计算 Petri 网的所有信标和陷阱仍没有找到一个多项式算法. 也就是说, 所存在方法的计算复杂度都是指数级的. 虽然本文所提出的方法也是指数复杂性的 ($o(2^n)$), 但该方法仅涉及矩阵乘法的运算, 其运算过程简单直接. 此外, 与其他存在的方法相比, 本文所提出的方法还具有以下优势:

1) 本文所提出的方法是基于精确的数学模型, 它具有信息的完备性.

2) 利用 MATLAB 的 STP 工具箱, 逻辑方程(10)和(11)能够很容易地转化为矩阵方程, 即信标方程(15)和陷阱方程(16). 这是一个标准的线性方程组, 它不仅结构简单、求解方便, 而且便于计算机实现.

3) 利用引理 7, 计算 Petri 网 $N = (P, T, F)$ 的信标方程(15)和陷阱方程(16)的所有非零解是非常简单和直接的工作.

注 5 关于 STP 计算的 MATLAB 工具箱已经被中科院程代展教授等人创建, 有关 STP 工具箱的详细介绍见网址: <http://lsc.amss.ac.cn/dcheng/stp/STP.zip>.

本文余下部分所有关于 Petri 网信标和陷阱实例的计算都是基于这个 MATLAB 工具箱的.

4 实例分析(Example analysis)

为了说明如何应用本文方法计算 Petri 网的所有信标和陷阱问题, 考虑如下经典 Petri 网例子. 它来自于文献[11].

例 1 考虑图 1 所示的 Petri 网图 $N = (P, T, F)$.

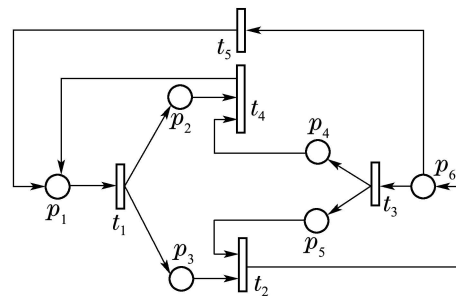


图 1 Petri 网的拓扑结构图

Fig. 1 The topology structure graph of a Petri net

由式(10)可得如下逻辑方程:

$$[(x_2 \vee x_3) \rightarrow x_1] \wedge [x_6 \rightarrow (x_3 \vee x_5)] \wedge [(x_4 \vee x_5) \rightarrow x_6] \wedge [x_1 \rightarrow (x_2 \vee x_4)] \wedge [x_1 \rightarrow x_6] = 1.$$

利用定理 1 和 MATLAB 工具箱, 可以得到图 1 所示 Petri 网的信标方程

给出了求Petri网信标方程和陷阱方程的所有非零解的简便方法. 同时, 本文也给出了计算Petri网所有信标和陷阱的一个算法. 最后, 说明性实例和实验结果表明了本文方法的可行性与优越性.

此外, 由文献[28]可知, 一般情况下, 一个Petri网的最小信标个数要比信标个数小得多. 且某些实际系统(如柔性制造系统)的死锁控制问题通常取决于最小信标. 未来的工作笔者主要集中在利用STP方法研究Petri网最小信标的计算问题.

参考文献(References):

- [1] CASSANDRAS C G, LAFORTUNE S. *Introduction to Discrete Event Systems* [M]. Second edition. New York : Springer, 2008.
- [2] PETERSON J L. *Petri Net Theory and the Modeling of Systems* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc, 1981.
- [3] MURATA T. Petri nets: properties, analysis and applications [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1989, 77(4): 541 – 580.
- [4] DAVID R, ALLA H. Petri nets for modeling of dynamic systems—a survey [J]. *Automatica*, 1994, 30(2): 175 – 202.
- [5] EZPELETA J, COLOM J M, MARTINEZ J. A Petri net based deadlock prevention policy for flexible manufacturing systems [J]. *IEEE Transactions on Robotics & Automation*, 1995, 11(2): 173 – 184.
- [6] LIU H, XING K Y, WU W, et al. Deadlock prevention for flexible manufacturing systems via controllable siphon basis of Petri nets [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2015, 45(3): 519 – 529.
- [7] NOTOMI M, MURATA T. Hierarchical reachability graph of bounded Petri nets for concurrent-software analysis [J]. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 1994, 20(5): 325 – 336.
- [8] STEGGLES L, BANKS R, SHAW O, et al. Qualitatively modeling and analyzing genetic regulatory networks: a Petri net approach [J]. *Bioinformatics*, 2007, 23(3): 336 – 343.
- [9] LI Z W, ZHOU M C. On siphon computation for deadlock control in a class of Petri nets [J]. *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2008, 38(3): 667 – 679.
- [10] LI Z W, ZHOU M C. Elementary siphons of Petri nets and their application to deadlock prevention in flexible manufacturing systems [J]. *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2004, 34(1): 38 – 51.
- [11] WEGRZYŃ A, KARATKEVICH A, BIEGANOWSKI J. Detection of deadlocks and traps in Petri nets by means of Thelen’s prime implicant method [J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2004, 14(1): 113 – 121.
- [12] ZAKREVSKIJ A. *Parallel Algorithms of Logical Control* [M]. Second Edition. Moscow: URSS, 2003.
- [13] MINOUX M, BARKAOUI K. Deadlocks and traps in Petri nets as Horn-satisfiability solutions and some related polynomially solvable problems [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 1990, 29(90): 195 – 210.
- [14] LAUTENBACH K. *Linear Algebraic Calculation of Deadlocks and Traps, in Concurrency and Nets—Advances in Petri Nets* [M]. New York: Springer, 1987: 315 – 336.
- [15] EZPELETA J, COUVREUR J M. A new technique for finding a generating family of siphons, traps and st-components, application to colored Petri nets [C] // *Proceedings of the 12th Conference on Application and Theory of Petri Nets*. Aarhus: Denmark, 1991: 126 – 147.
- [16] BOER E, MURATA T. Generating basis siphons and traps of Petri net using sign incidence matrix [J]. *IEEE Transaction on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1994, 41(4): 266 – 271.
- [17] LIU G J, JIANG C J. Incidence matrix based methods for computing repetitive vectors and siphons of Petri net [J]. *Journal of Information Science & Engineering*, 2009, 25(1): 121 – 136.
- [18] CHENG D Z. Semi-tensor product of matrices and its application to Morgen’s problem [J]. *Chinese Science, Series F*, 2001, 44(3): 195 – 212.
- [19] CHENG D Z, QI H S. Controllability and observability of Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2009, 45(7): 1659 – 1667.
- [20] CHENG D Z, QI H S. A linear representation of dynamics of boolean networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2251 – 2258.
- [21] CHENG D Z. On finite potential games [J]. *Automatica*, 2014, 50(7): 1793 – 1801.
- [22] CHENG D Z, HE F H, QI H S, et al. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(9): 2402 – 2415.
- [23] XU X R, HONG Y G. Matrix expression and reachability analysis of finite automata [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2012, 10(2): 210 – 215.
- [24] YAN Y Y, CHEN Z Q, LIU Z X. Semi-tensor product of matrices approach to reachability of finite automata with application to language recognition [J]. *Frontiers of Computer Science*, 2014, 8(6): 948 – 957.
- [25] YAN Y Y, CHEN Z Q, LIU Z X. Solving type-2 fuzzy relation equations via semi-tensor product of matrices [J]. *Control Theory and Technology*, 2014, 12(2): 173 – 186.
- [26] CHENG Daizhan, QI Hongsheng. Algebraic state space approach to logical dynamic systems and its applications [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(12): 1632 – 1639.
(程代展, 齐洪胜. 逻辑系统的代数状态空间方法的基础、现状及其应用 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(12): 1632 – 1639.)
- [27] CHENG D Z, QI H S, ZHAO Y. *An Introduction to Semi-tensor Product of Matrices and its Applications* [M]. Singapore: World Scientific, 2012.
- [28] WANG S G, LI Y, WANG C Y, et al. Computation of all minimal siphons in Petri nets [C] // *Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Net-working, Sensing and Control*. China: Beijing, 2012: 46 – 51.

作者简介:

韩晓光 (1984–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为Petri网理论与应用、有限自动机、离散事件动态系统等, E-mail: hxg-allen@163.com;

陈增强 (1964–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为多智能体系统控制、离散事件动态系统等, E-mail: chenzq@nankai.edu.cn;

刘忠信 (1975–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为多智能体系统控制、复杂动态系统等, E-mail: Lzhx@nankai.edu.cn;

张青 (1965–), 女, 教授, 硕士生导师, 目前研究方向为混沌系统、多智能体系统控制等, E-mail: qzhang@cauc.edu.cn.