

不确定分数阶多涡卷混沌系统自适应重复学习同步控制

孙美美, 胡云安, 韦建明[†]

(海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001)

摘要: 研究了不确定分数阶多涡卷混沌系统的自适应重复学习同步控制问题. 通过利用滞环函数, 设计了一类参数可调的分数阶多涡卷混沌系统. 针对这类分数阶多涡卷混沌系统, 在考虑非参数化不确定性、周期时变参数化不确定性、常参数化不确定性和外部扰动情况下, 提出了一种重复学习同步控制方案. 利用自适应神经网络技术补偿了系统中的函数型不确定性, 通过自适应重复学习控制技术处理了周期时变参数化不确定性, 并利用自适应鲁棒学习项处理了神经网络逼近误差和干扰的影响, 实现了主系统和从系统的完全同步. 综合利用分数阶频率分布模型和类Lyapunov复合能量函数方法证明了同步误差的学习收敛性. 数值仿真验证了所提方法的有效性.

关键词: 分数阶; 混沌系统; 重复学习控制; 同步

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Adaptive repetitive learning synchronization of uncertain fractional order multi-scroll chaotic systems

SUN Mei-mei, HU Yun-an, WEI Jian-ming[†]

(Department of Control Engineering, Naval Astronautical and Aeronautical University, Yantai Shandong 264001, China)

Abstract: The adaptive repetitive learning synchronization problem of uncertain fractional order multi-scroll chaotic systems is investigated in this paper. A novel kind of fractional order multi-scroll chaotic system is designed by using hysteresis function, where the number of the scroll can be adjusted by different design parameters. The synchronization problem of this class of systems with non-parametric uncertainty, periodic time-varying parametric uncertainty, constant parametric uncertainty and external disturbances is considered and a repetitive learning based synchronization controller is presented. Adaptive neural network technique is utilized to compensate for the non-parametric uncertainty of the system, periodic time-varying parametric uncertainty is dealt with by adaptive repetitive learning scheme and the neural network approximation errors and external disturbance are handled by adaptive robust learning term. The synchronization error convergence is proven by using frequency distribution models scheme combing with Lyapunov-like energy function. Numerical simulation is given to verify the validity of the proposed method.

Key words: fractional order; chaotic systems; repetitive learning control; synchronization

1 引言(Introduction)

混沌系统同步在保密通信上有巨大的应用前景, 国际上对于整数阶混沌系统的同步已经取得非常多的研究成果, 但是对于分数阶系统的研究仍处于起步阶段. 多涡卷混沌系统是相对传统混沌或超混沌系统而言的, 它具有更为复杂的动力学行为和拓扑结构, 基于多涡卷混沌系统的保密通信方法, 具有更大的破译难度, 能够进一步提高保密性能. 文献[1]利用滞环函数构造了整数阶三涡卷混沌系统, 本文在其基础上, 设计了一种可以通过调节滞环非线性函数参数来产生涡卷数量可调的分数阶多涡卷混沌系统, 并对其进

行同步控制研究.

在控制领域中, 参数化系统的控制问题占有重要的地位, 从事各种控制理论研究的学者针对参数化系统的控制问题设计了多种控制策略. 众所周知, 混沌系统, 例如Duffing震荡器、Rössler系统、Chua系统等, 都可以转化为具有未知参数的参数化非线性动力学系统. 而在实际中, 混沌系统不可避免地会受到环境的影响, 诸如环境温度、电压波动、各元器件的相互作用, 从而导致系统参数在一定的范围内变化, 因此系统的参数通常在未知名义值附近波动. 对于对变化极为敏感混沌系统来说, 这种时变形式的不确定性会

收稿日期: 2015-11-25; 录用日期: 2016-04-28.

[†]通信作者. E-mail: wjm604@163.com; Tel.: +86 535-6635637.

本文责任编辑: 张化光.

国家自然科学基金项目(61433011)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61433011).

影响同步的实现. 因此在混沌同步控制问题中考虑参数化不确定性, 尤其是时变参数化不确定性的影响具有重要的理论意义和研究价值.

对于未知系统参数为常值的系统, 自适应控制方法是最适合且有效的方法. 针对不同类型的常参数混沌系统, 许多自适应同步控制方法被提出, 有效地解决了常参数混沌系统的同步控制问题^[2-10]. 但当系统中存在时变参数化不确定性时, 即未知系统参数是时变的, 自适应控制方法便不再适用. 针对时变参数化不确定性的问题, 重复学习控制是一种有效的解决方法, 它通过一种周期重复式的学习实现对未知时变参数的估计. 与大量的混沌系统自适应同步控制方法相比, 基于重复学习控制的同步控制的成果要少很多, 仅有少量的文献讨论了混沌系统的重复学习同步控制问题^[11-12]. Xu等在提出一种混沌系统重复学习控制^[13]的基础上, 提出了一种基于自适应重复学习控制的混沌系统同步控制方法^[11], 针对具有伪周期时变不确定性的主系统和从系统, 通过利用 Lyapunov-Krasovskii泛函和周期参数学习, 实现了主系统和从系统的渐近同步. Sun等^[12]针对具有参数化不确定性的混沌系统, 利用自适应重复学习控制方法, 设计了广义映射同步控制器. 以上两篇文献均讨论的是整数阶混沌系统的自适应重复学习同步控制问题, 对于分数阶混沌系统的自适应重复学习同步控制问题的研究, 尚未有文献报道.

本文将参数化不确定分数阶多涡卷混沌系统的同步控制问题展开研究. 首先基于文献[1]的思想, 设计了一种新的分数阶多涡卷混沌系统. 针对这类系统的一般化动态形式, 设计了自适应重复学习同步控制方案. 主要的创新包括: 1) 利用滞环函数设计了一种新的分数阶多涡卷混沌系统; 2) 首次讨论了具有时变参数化不确定分数阶混沌系统的同步控制问题, 综合利用自适应重复学习控制方法、神经网络逼近技术和鲁棒控制方法设计了同步控制方案, 实现了混沌系统的同步; 3) 利用Mittag-Leffler函数设计了一种新的边界层函数, 处理了稳定性分析中的奇异性问题.

2 准备工作(Preliminaries)

2.1 分数阶系统相关定义(Relevant definitions of fractional order system)

Gamma函数将 $n!$ 推广到实数域甚至复数域, 又被称为广义阶乘. 最常用的Gamma函数表达形式如下:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt. \quad (1)$$

在给出分数阶微积分定义之前首先对分数阶运算中常见的数学符号简单介绍. 连续分数阶微积分算子 ${}_a D_t^\alpha$ 可表示为^[14]

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \int_a^t (d\sigma)^\alpha, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中: α 为复数, t 和 a 分别为运算算子的上界和下界.

广义Mittag-Leffler函数广泛应用于分数阶运算, 是指数函数 e^x 的推广, 包括单参数和两参数两种形式, 其级数展开式如下^[15]:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}. \quad (3)$$

特别地, 当 $\alpha = 1$, Mittag-Leffler函数就是 e^z :

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)}. \quad (4)$$

两参数的Mittag-Leffler函数表达式如下^[15]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \quad (5)$$

其中: $\alpha > 0, \beta > 0, z \in \mathbb{C}$. 当 $\beta = 1, E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$, 则 $E_{1,1}(z) = e^z$.

在分数阶运算发展过程中, 许多学者都从不同的角度出发, 给出了不同的定义. 3种主流定义分别为Grünwald-Letnikov定义、Riemann-Liouville定义和Caputo定义.

定义1 Grünwald-Letnikov分数阶微分可表示为^[15]

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh), \quad (6)$$

其中 $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j-1)\Gamma(\alpha-j+1)}$.

定义2 Riemann-Liouville分数阶微积分定义可表示为^[16]

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad n-1 < \alpha < n. \quad (7)$$

定义3 Caputo分数阶微积分定义可表示为^[15]

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad n-1 < \alpha < n. \quad (8)$$

注1 实际上, 在一定的条件下, 以上3种定义是等价的.

为表达简便, 本文中用 D^α 表示 ${}_a D_t^\alpha$. 文中有关分数阶混沌系统的定义用Caputo方法, 利用Grünwald-Letnikov定义方法进行数值仿真.

引理1^[17] 分数阶系统 $D^\alpha y(t) = v(t), 0 < \alpha < 1, y(t) \in \mathbb{R}, u(t) \in \mathbb{R}$ 可以被看作如下一个线性频率分布模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + v(t), \\ y(t) = \int_0^\infty \mu_\alpha(\omega) z(\omega, t) d\omega, \end{cases} \quad (9)$$

其中: 权重函数 $\mu_\alpha(\omega) = \sin(\alpha\pi)/\pi\omega^\alpha$, 系统状态 $z(\omega, t) \in \mathbb{R}$.

引理 2^[18] 对任意 $p > 0, x \in \mathbb{R}$, 不等式 $|x| - x \tanh(x/p) \leq \gamma p$ 成立, 其中 γ 为正常数: $\gamma = e^{-(\gamma+1)}$ 或者 $\gamma = 0.2785$.

2.2 分数阶多涡卷混沌系统设计(Design of fractional order multi-scroll chaotic system)

通过利用滞环函数, 设计一种多涡卷分数阶混沌系统

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = x_2, \\ D^\alpha x_2 = -a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 Hys(d_1 x_1), \end{cases} \quad (10)$$

其中: x_1, x_2 为状态变量; a_1, b_1, c_1 和 d_1 为主系统参数; $Hys(d_1 x_1)$ 为滞环非线性函数, 形式为 $Hys(d_1 x_1) = \sum_{j=1}^m hys_j(d_1 x_1)$, 其表达形式如下:

$$hys_i(d_1 x_1) = \begin{cases} (i+1)/2, & d_1 x_1 > (i+1)/2, \\ (i-1)/2, & d_1 x_1 < (i-1)/2, \\ hys_i^-(d_1 x_1), & \frac{(i-1)}{2} < d_1 x_1 < \frac{(i+1)}{2}, \end{cases} \quad (11)$$

$i = 2j - 1, j = 1, 2, 3 \dots$

$$hys_i(d_1 x_1) = \begin{cases} -i/2, & d_1 x_1 < (-i)/2, \\ -(i-2)/2, & d_1 x_1 > -(i-2)/2, \\ hys_i^-(d_1 x_1), & -\frac{i}{2} < d_1 x_1 < -\frac{(i-2)}{2}, \end{cases} \quad (12)$$

$i = 2j, j = 1, 2, 3 \dots$

其中 $hys_i^-(\cdot)$ 表示 $hys_i(\cdot)$ 在上一时刻的值. 确定好 m 后, 系统(10)可生成 $m+1$ 个涡卷, 即得到 $m+1$ 涡卷分数阶混沌系统.

3 自适应重复学习同步控制器设计(Design of adaptive repetitive learning synchronization controller)

利用自适应重复学习控制方法对不确定分数阶多涡卷混沌系统进行同步控制器设计. 为了提高本文设计方法的适用范围, 对研究对象进行一般化, 取包含所设计多涡卷分数阶混沌系统(10)的分数阶主系统形式为

$$\begin{cases} D^\alpha x_i = x_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, \\ D^\alpha x_n = f(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (13)$$

其中: $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, $f(\mathbf{x})$ 为已知的非线性函数. 考虑不确定性和未知扰动对系统的影响, 被控系统模型为

$$\begin{cases} D^\alpha y_i = y_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, \\ D^\alpha y_n = g(\mathbf{y}) + \Delta g(\mathbf{y}) + \theta^T(t)\xi(\mathbf{y}) + d(t) + u(t), \end{cases} \quad (14)$$

其中: $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$, $g(\mathbf{y})$ 为已知的非线性函数, $\Delta g(\mathbf{y})$ 为未知的不确定项, $u(t)$ 为同步控制器. $\xi(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m$ 表示已知的函数, $d(t)$ 为未知有界外界干扰, $\theta(t) \in \mathbb{R}^m$ 为未知连续周期时变参数, 且 $\theta(t) = \Xi + \Theta(t)$, Ξ 为未知常数参数, $\Theta(t)$ 为未知的连续周期时变参数, 其周期为 T . 系统中既包含了参数化不确定项, 又包含了非参数化不确定项, 参数化不确定项中既包含了常数参数化不确定项, 又包含了时变参数化不确定项.

由于 $\theta(t) = \Xi + \Theta(t)$, 显然 $\Theta(t)$ 为周期 T 已知的未知连续周期函数向量. 同步控制设计的目标就是从系统设计合适的控制器 $u(t)$, 使得从系统(14)能和主系统(13)实现同步.

定义同步误差为 $e_i = y_i - x_i, i = 1, 2, \dots, n, \mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]^T$, 则同步误差动态系统为

$$\begin{cases} D^\alpha e_i = e_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, \\ D^\alpha e_n = g(\mathbf{y}) + \Delta g(\mathbf{y}) + \theta^T(t)\xi(\mathbf{y}) + d(t) + u(t) - f(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (15)$$

定义 $e_s(t) = [\mathbf{A}^T \ \mathbf{1}] \mathbf{e}(t)$, $\mathbf{A} = [\lambda_1 \ \dots \ \lambda_{n-1}]^T$, 其中 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 为 Hurwitz 多项式 $H(s) = s^{n-1} + \lambda_{n-1}s^{n-2} + \dots + \lambda_1$ 的系数, 则在 $e_s(t) \rightarrow 0$ 的情况下, 即可实现 $e_i(t) \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots, n$.

假设 1 假设初始同步误差是有界的, 即 $|e_i(0)| \leq \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$.

对 e_s 求取 α 阶微分

$$D^\alpha e_s = D^\alpha e_n + D^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i \right) = D^\alpha e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i D^\alpha e_i. \quad (16)$$

为了处理初始误差问题, 通过引入 Mittag-Leffler 函数定义如下的边界层函数:

$$\eta(t) = \varepsilon E_\alpha(-Kt), \quad K > 0, \quad (17)$$

其中 $\varepsilon = [\mathbf{A}^T \ \mathbf{1}] [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_n]^T$.

根据 Mittag-Leffler 函数定义可知, $\eta(t)$ 是随着时间递减的, 且

$$\eta(0) = \varepsilon, D^\alpha \eta(t) = \varepsilon D^\alpha E_\alpha(-Kt) = -K\varepsilon E_\alpha(-Kt) = -K\eta(t).$$

定义辅助的同步误差为

$$s(t) = e_s(t) - \eta(t) \text{sat}\left(\frac{e_s(t)}{\eta(t)}\right). \quad (18)$$

饱和函数 $\text{sat}(\cdot)$ 为

$$\text{sat}(\cdot) = \text{sgn}(\cdot) \cdot \min\{|\cdot|, 1\}, \quad (19)$$

其中 $\text{sgn}(\cdot) = \begin{cases} 1, & \cdot > 0, \\ 0, & \cdot = 0, \text{ 为符号函数.} \\ -1, & \cdot < 0 \end{cases}$

容易验证

$$\begin{aligned} |e_s(0)| &= \\ |\lambda_1 e_1(0) + \lambda_2 e_2(0) + \dots + e_n(0)| &\leq \\ \lambda_1 |e_1(0)| + \lambda_2 |e_2(0)| + \dots + |e_n(0)| &\leq \\ \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n &= \\ \varepsilon &= \eta(0). \end{aligned} \tag{20}$$

这意味着 $s(0) = e_s(0) - \eta(0) \frac{e_s(0)}{\eta(0)} = 0$ 成立.

由 $s(t)$ 的定义可知

$$\begin{aligned} s(t) \text{sat}\left(\frac{e_s(t)}{\eta(t)}\right) &= \\ \begin{cases} s(t), & e_s(t) > \eta(t), \\ 0, & |e_s(t)| \leq \eta(t), \\ -s(t), & e_s(t) < -\eta(t) \end{cases} &= |s(t)|. \end{aligned} \tag{21}$$

根据引理 1, 可以得到辅助误差变量的等价频率分布模型

$$\begin{cases} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + D^\alpha s, \\ s(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega. \end{cases} \tag{22}$$

权重函数为 $\mu(\omega) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\omega^\alpha}$, $z(\omega, t) \in \mathbb{R}$ 为实际误差变量.

定义 $V_s(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu(\omega) z^2(\omega, t) d\omega$, 对其求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \\ \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} d\omega &= \\ \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) (-\omega z(\omega, t) + D^\alpha s) d\omega &= \\ - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z^2(\omega, t) d\omega + s D^\alpha s &= \\ \begin{cases} - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z^2(\omega, t) d\omega + s(t) \times \\ (D^\alpha e_s(t) - D^\alpha \eta(t)), & e_s(t) > \eta(t), \\ - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z^2(\omega, t) d\omega, & |e_s(t)| \leq \eta(t), \\ - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z^2(\omega, t) d\omega + s(t) \times \\ (D^\alpha e_s(t) + D^\alpha \eta(t)), & e_s(t) < -\eta(t) \end{cases} &= \\ - \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z^2(\omega, t) d\omega + & \\ s(t) (D^\alpha e_s(t) - D^\alpha \eta(t) \text{sgn}(s(t))) &\leq \\ s(t) \left(\sum_{j=2}^n \lambda_{j-1} e_j + g(\mathbf{y}) + \Delta g(\mathbf{y}) + \Xi^T \xi(\mathbf{y}) + \right. & \\ \left. \Theta^T(t) \xi(\mathbf{y}) + d(t) + u(t) - f(\mathbf{x}) + \right. & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &K \eta(t) \text{sgn}(s(t))) = \\ s(t) \left(\sum_{j=2}^n \lambda_{j-1} e_j + g(\mathbf{y}) + \Delta g(\mathbf{y}) + \Xi^T \xi(\mathbf{y}) + \right. & \\ \left. \Theta^T(t) \xi(\mathbf{y}) + d(t) + u(t) - f(\mathbf{x}) + \right. & \\ \left. K e_s(t) - K s^2(t), \right. & \end{aligned} \tag{23}$$

其中利用到了如下的等式:

$$\begin{aligned} s(t) (-K e_s(t) + K \eta(t) \text{sgn}(s(t))) &= \\ s(t) (-K s(t) - K \eta(t) \text{sat}(e_s(t)/\eta(t)) + & \\ K \eta(t) \text{sgn}(s(t))) &= \\ -K s^2(t) - K \eta(t) |s(t)| + K \eta(t) |s(t)| &= \\ -K s^2(t). & \end{aligned} \tag{24}$$

用神经网络对 $\Delta g(\mathbf{y})$ 进行逼近, 即

$$\Delta g(\mathbf{y}) = W^{*T} \phi(\mathbf{y}) + \varepsilon(\mathbf{y}). \tag{25}$$

设 l 为神经网络神经元个数, $W^* \in \mathbb{R}^l$ 为最优的神经网络权值, $\phi(\mathbf{y}) = [\varphi_1(\mathbf{y}) \varphi_2(\mathbf{y}) \dots \varphi_l(\mathbf{y})]^T$, 高斯基函数为 $\varphi_i(\mathbf{y}) = e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mu_i\|^2}{\eta_i^2}}$, $i = 1, 2, \dots, l$, $\varepsilon(\mathbf{y})$ 为神经网络逼近误差. 则式(23)转化为

$$\begin{aligned} \dot{V}_s(t) &= \\ s(t) \left(\sum_{j=2}^n \lambda_{j-1} e_j + g(\mathbf{y}) + W^{*T} \phi(\mathbf{y}) + \right. & \\ u(t) - f(\mathbf{x}) + \Xi^T \xi(\mathbf{y}) + \Theta^T(t) \xi(\mathbf{y}) + & \\ \left. \varepsilon(\mathbf{y}) - d(t) + K e_s(t) - K s^2(t). \right. & \end{aligned} \tag{26}$$

根据神经网络的特性, $|\varepsilon(\mathbf{y}) - d(t)| \leq \rho$, ρ 为未知的常值上界.

设计同步控制器为

$$\begin{aligned} u(t) &= \\ - \sum_{j=2}^n \lambda_{j-1} e_j - g(\mathbf{y}) - \hat{W}^T \phi(\mathbf{y}) + & \\ f(\mathbf{x}) - \hat{\Xi}^T \xi(\mathbf{y}) - \hat{\Theta}^T(t) \xi(\mathbf{y}) - & \\ \hat{\rho} \tanh(\hat{\rho} s(t)/\omega e^{-k_1 t}) - K e_s(t), & \end{aligned} \tag{27}$$

其中: $k, k_1, \omega > 0$ 为设计参数, $\hat{W}, \hat{\Xi}, \hat{\Theta}(t), \hat{\rho}$ 分别为 $W^*, \Xi, \Theta(t), \rho$ 的估计值.

设计参数自适应律为

$$\hat{\Theta}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-T, 0), \\ q_0(t) \xi(\mathbf{y}) s(t), & t \in [0, T), \\ \hat{\Theta}(t-T) + q_1 \xi(\mathbf{y}) s(t), & t \in [T, \infty), \end{cases} \tag{28}$$

$$D^\alpha \hat{W} = q_2 s(t) \phi(\mathbf{y}), \tag{29}$$

$$D^\alpha \hat{\Xi} = q_3 \xi(\mathbf{y}) s(t), \tag{30}$$

$$D^\alpha \hat{\rho} = q_4 |s(t)|, \tag{31}$$

其中: $q_1, q_2, q_3, q_4 > 0$ 为设计参数, $q_0(t)$ 是一个单调

递增的连续函数,且 $q_0(0) > 0, q_0(T) = q_1$.

注2 $\hat{\Theta}(t) = 0, t \in (-\infty, 0)$ 不具有实际意义,仅用于下文的分析.

引理3 $\hat{\Theta}(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上是连续的.

证 由于 $\xi(\mathbf{y})$ 是连续函数,因此 $\hat{\Theta}(t)$ 在 $t \in [kT, (k+1)T)$ 上连续性是显而易见的, $k = 0, 1, 2, \dots$. 下面分两种情况考虑在 $t = kT$ 处 $\hat{\Theta}(t)$ 的连续性.

1) 当 $k = 1$ 时,

由自适应学习律(28)及 $s(0) = 0, q_0(T) = q_1$ 可知

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \hat{\Theta}(t) = \lim_{t \rightarrow T^-} [q_0(t)\xi(\mathbf{y})s(t)] = q_1\xi(\mathbf{y})s(T), \quad (32)$$

$$\lim_{t \rightarrow T^+} \hat{\Theta}(t) = \lim_{t \rightarrow T^+} [\hat{\Theta}(t-T) + q_1\xi(\mathbf{y})s(t)] = q_1\xi(\mathbf{y})s(T). \quad (33)$$

因此, $\hat{\Theta}(t)$ 在 $t = T$ 处是连续的.

2) 当 $k \geq 2$ 时,

$$\lim_{t \rightarrow kT^-} \hat{\Theta}(t) = \lim_{t \rightarrow kT^-} [\hat{\Theta}(t-T) + q_1\xi(\mathbf{y})s(t)] = \hat{\Theta}((k-1)T^-) + q_1\xi(\mathbf{y})s(kT), \quad (34)$$

$$\lim_{t \rightarrow kT^+} \hat{\Theta}(t) = \lim_{t \rightarrow kT^+} [\hat{\Theta}(t-T) + q_1\xi(\mathbf{y})s(t)] = \hat{\Theta}((k-1)T^+) + q_1\xi(\mathbf{y})s(kT). \quad (35)$$

由于 $\xi(\mathbf{y})$ 和 $e_s(t)$ 是连续的, $\hat{\Theta}(t)$ 在 $t = kT$ 处的连续性依赖于 $\hat{\Theta}(t)$ 在 $t = (k-1)T$ 处的连续性, 由于已经证明得到 $\hat{\Theta}(t)$ 在 $t = T$ 处是连续的, 因此 $\hat{\Theta}(t)$ 在 $t = 2T$ 处是连续的. 以此类推, 可以得知 $\hat{\Theta}(t)$ 在 $t = kT(k \geq 2)$ 处都是连续的.

综上所述, $\hat{\Theta}(t), \forall t \in [0, \infty)$ 是连续的. 证毕.

由自适应学习律(31)可知 $\hat{\rho} > 0$. 将控制器(27)代入式(26)并考虑引理2, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_s(t) \leq & -Ks^2(t) - s(t)(\tilde{W}^T\phi(\mathbf{y}) + \tilde{\Xi}^T\xi(\mathbf{y}) + \tilde{\Theta}^T(t)\xi(\mathbf{y})) + \rho|s(t)| - \\ & \hat{\rho}s(t)\tanh(\hat{\rho}s(t)/\omega e^{-k_1t}) = \\ & -Ks^2(t) - s(t)(\tilde{W}^T\phi(\mathbf{y}) + \tilde{\Xi}^T\xi(\mathbf{y}) + \tilde{\Theta}^T(t)\xi(\mathbf{y})) + \rho|s(t)| - \\ & \hat{\rho}|s(t)| - \rho s(t)\tanh(\hat{\rho}s(t)/\omega e^{-k_1t}) \leq \\ & -Ks^2(t) - s(t)(\tilde{W}^T\phi(\mathbf{y}) + \tilde{\Xi}^T\xi(\mathbf{y}) + \\ & l\tilde{\Theta}^T(t)\xi(\mathbf{y})) - \tilde{\rho}|s(t)| + \beta\omega e^{-k_1t}, \quad (36) \end{aligned}$$

其中 $\tilde{*} = \hat{*} - *$ 表示参数估计误差, 则有下式成立:

$$\begin{cases} D^\alpha \tilde{W} = D^\alpha \hat{W} - D^\alpha W^* = D^\alpha \tilde{W}, \\ D^\alpha \tilde{\Xi} = D^\alpha \hat{\Xi} - D^\alpha \Xi = D^\alpha \tilde{\Xi}, \\ D^\alpha \tilde{\rho} = D^\alpha \hat{\rho} - D^\alpha \rho = D^\alpha \tilde{\rho}. \end{cases} \quad (37)$$

根据引理1, 得到参数估计误差频率分布模型

$$\begin{cases} \frac{\partial z_W(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z_W(\omega, t) + q_2 s(t)\phi(\mathbf{y}), \\ \tilde{W}(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z_W(\omega, t) d\omega, \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z_\Xi(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z_\Xi(\omega, t) + q_3 \xi(\mathbf{y})s(t), \\ \tilde{\Xi}(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z_\Xi(\omega, t) d\omega, \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z_\rho(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z_\rho(\omega, t) + q_4 |s(t)|, \\ \tilde{\rho}(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z_\rho(\omega, t) d\omega, \end{cases} \quad (40)$$

其中 $z_W(\omega, t), z_\Xi(\omega, t)$ 和 $z_\rho(\omega, t)$ 为实际的参数估计误差变量.

定义一个参数估计误差的Lyapunov函数为

$$\begin{aligned} V_p(t) = & \frac{1}{2q_2} \int_0^\infty \mu(\omega) z_W^T(\omega, t) z_W(\omega, t) d\omega + \\ & \frac{1}{2q_3} \int_0^\infty \mu(\omega) z_\Xi^T(\omega, t) z_\Xi(\omega, t) d\omega + \\ & \frac{1}{2q_4} \int_0^\infty \mu(\omega) z_\rho^2(\omega, t) d\omega. \end{aligned} \quad (41)$$

对其求导:

$$\begin{aligned} \dot{V}_p(t) = & \frac{1}{q_2} \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_W^T(\omega, t) \frac{\partial z_W(\omega, t)}{\partial t} d\omega + \\ & \frac{1}{q_3} \int_0^\infty \mu(\omega) z_\Xi^T(\omega, t) \left(\frac{\partial z_\Xi(\omega, t)}{\partial t} \right) d\omega + \\ & \frac{1}{q_4} \int_0^\infty \mu(\omega) z_\rho(\omega, t) \frac{\partial z_\rho(\omega, t)}{\partial t} d\omega = \\ & -\frac{1}{q_2} \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_W^T(\omega, t) z_W(\omega, t) d\omega + \\ & \int_0^\infty \mu(\omega) z_W^T(\omega, t) d\omega s(t)\phi(\mathbf{y}) - \\ & \frac{1}{q_3} \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_\Xi^T(\omega, t) z_\Xi(\omega, t) d\omega + \\ & \int_0^\infty \mu(\omega) z_\Xi^T(\omega, t) d\omega \xi(\mathbf{y})s(t) - \\ & \frac{1}{q_4} \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_\rho^2(\omega, t) d\omega + \\ & \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z_\rho(\omega, t) d\omega |s(t)| \leq \\ & s(t)\tilde{W}^T\phi(\mathbf{y}) + s(t)\tilde{\Xi}^T\xi(\mathbf{y}) + \tilde{\rho}|s(t)|. \quad (42) \end{aligned}$$

定义Lyapunov函数为 $V(t) = V_s(t) + V_p(t)$, 结合式(36)和(42)可知其导数满足

$$\dot{V}(t) \leq -Ks^2(t) - s(t)\tilde{\Theta}^T(t)\xi(\mathbf{y}) + \beta\omega e^{-k_1 t}. \quad (43)$$

4 收敛性分析(Convergence analysis)

定理 1 对于式(13)和(14)描述的分数阶混沌系统, 在假设1成立的前提下, 设计自适应重复学习控制器(27)及参数自适应学习律(28)–(31), 则可实现从系统(14)与主系统(13)的完全同步, 即, $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

证 下面通过利用类Lyapunov复合能量函数的方法进行系统稳定性分析. 构造复合能量函数为

$$E(t) = V(t) + \frac{1}{2q_1} \int_{t-T}^t \tilde{\Theta}^T(\sigma)\tilde{\Theta}(\sigma)d\sigma. \quad (44)$$

将下面的证明过程分为3部分:

1) $E(t)$ 的差分.

计算 $E(t)$ 在 $[t - T, t]$ 上的差分:

$$\begin{aligned} \Delta E(t) &= \\ E(t) - E(t - T) &= \\ V(t) - V(t - T) + \frac{1}{2q_1} \times \\ &\int_{t-T}^t [\tilde{\Theta}^T(\sigma)\tilde{\Theta}(\sigma) - \tilde{\Theta}^T(\sigma - T)\tilde{\Theta}(\sigma - T)]d\sigma. \end{aligned} \quad (45)$$

由式(43)可知

$$\begin{aligned} V(t) - V(t - T) &\leq \\ &\int_{t-T}^t [-Ks^2(\sigma) - s(\sigma)\tilde{\Theta}^T(\sigma)\xi(\mathbf{y}) + \beta\omega e^{-k_1\sigma}]d\sigma. \end{aligned} \quad (46)$$

由自适应学习律(28)可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2q_1} \int_{t-T}^t [\tilde{\Theta}^T(\sigma)\tilde{\Theta}(\sigma) - \tilde{\Theta}^T(\sigma - T) \times \\ &\tilde{\Theta}(\sigma - T)]d\sigma = \\ &\frac{1}{2q_1} \int_{t-T}^t [\tilde{\Theta}^T(\sigma)\tilde{\Theta}(\sigma) - (\tilde{\Theta}(\sigma) + \\ &q_1\xi(\mathbf{y})s(\sigma))^T(\tilde{\Theta}(\sigma) + q_1\xi(\mathbf{y})s(\sigma))]d\sigma = \\ &\int_{t-T}^t \tilde{\Theta}^T(\sigma)\xi(\mathbf{y})s(\sigma)d\sigma - \frac{q_1}{2} \int_{t-T}^t s^2(\sigma)\|\xi(\mathbf{y})\|^2d\sigma. \end{aligned} \quad (47)$$

将式(46)–(47)代回式(45), 可得

$$\begin{aligned} \Delta E(t) &\leq \\ &-\int_{t-T}^t Ks^2(\sigma)d\sigma + \int_{t-T}^t \beta\omega e^{-k_1\sigma}d\sigma \\ &-\frac{q_1}{2} \int_{t-T}^t s^2(\sigma)\|\xi(\mathbf{y})\|^2d\sigma \leq \end{aligned}$$

$$-\int_{t-T}^t Ks^2(\sigma)d\sigma + \frac{1}{k_1}\beta\omega(e^{-k_1(t-T)} - e^{-k_1 t}). \quad (48)$$

2) $E(t)$ 在 $[0, T]$ 上的有界性.

$t \in [0, T]$ 时, $E(t)$ 的形式为

$$E(t) = V(t) + \frac{1}{2q_1} \int_0^t \tilde{\Theta}^T(\sigma)\tilde{\Theta}(\sigma)d\sigma. \quad (49)$$

对上式求导并考虑自适应律(28)–(31)可得

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \\ \dot{V}(t) + \frac{1}{2q_1} \tilde{\Theta}^T(t)\tilde{\Theta}(t) &\leq \\ -Ks^2(t) - s(t)\tilde{\Theta}^T(t)\xi(\mathbf{y}) + \\ &\frac{1}{2q_1} \tilde{\Theta}^T(t)\tilde{\Theta}(t) + \beta\omega e^{-k_1 t}. \end{aligned} \quad (50)$$

由自适应重复学习律(28)可知 $\hat{\Theta}(t) = q_0(t)\xi(\mathbf{y})s(t)$, $t \in [0, T]$ 有

$$\begin{aligned} -s(t)\tilde{\Theta}^T(t)\xi(\mathbf{y}) + \frac{1}{2q_1} \tilde{\Theta}^T(t)\tilde{\Theta}(t) &= \\ -\frac{1}{q_0(t)} \tilde{\Theta}^T(t)\hat{\Theta}(t) + \frac{1}{2q_1} \tilde{\Theta}^T(t)\tilde{\Theta}(t) &= \\ -\frac{1}{q_0(t)} \tilde{\Theta}^T(t)(\tilde{\Theta}(t) + \Theta(t)) + \frac{1}{2q_1} \tilde{\Theta}^T(t)\tilde{\Theta}(t) &= \\ -(\frac{1}{q_0(t)} - \frac{1}{2q_1}) \tilde{\Theta}^T(t)\tilde{\Theta}(t) - \frac{1}{q_0(t)} \tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) &= \\ -\frac{1}{2}(\frac{1}{q_0(t)} - \frac{1}{q_1}) \tilde{\Theta}^T(t)\tilde{\Theta}(t) - \\ \frac{1}{2q_0(t)} (\tilde{\Theta}(t) + \Theta(t))^T (\tilde{\Theta}(t) + \Theta(t)) + \\ \frac{1}{2q_0(t)} \Theta^T(t)\Theta(t) &\leq \frac{1}{2q_0(t)} \Theta^T(t)\Theta(t). \end{aligned} \quad (51)$$

因此, 式(50)可以转化为

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \\ \dot{V}(t) + \frac{1}{2q_1} \tilde{\Theta}^T(t)\tilde{\Theta}(t) &\leq \\ -Ks^2(t) + \frac{1}{2q_0(t)} \Theta^T(t)\Theta(t) + \beta\omega e^{-k_1 t}. \end{aligned} \quad (52)$$

由于 $\Theta(t)$ 是有界的, 设 $L = \max_{t \in [0, T]} \{ \frac{\Theta^T(t)\Theta(t)}{(2q_0(t))} \}$, 则对式(52)在 $[0, t]$ 上积分可得

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \\ E(0) - \int_0^t Ks^2(\sigma)d\sigma + \int_0^t Ld\sigma + \int_0^t \beta\omega e^{-k_1\sigma}d\sigma &\leq \\ E(0) + Lt + \frac{1}{k_1}\beta\omega(1 - e^{-k_1 t}). \end{aligned} \quad (53)$$

根据假设1及自适应律可知 $E(0) = V_p(0)$, 其值取决于参数估计的初始误差, 因此

$$E(t) \leq V_p(0) + Lt + \frac{1}{k_1} \beta \omega (1 - e^{-k_1 t}). \quad (54)$$

显然, $t \in [0, T)$ 时, $E(t)$ 是有界的. 在 $t \in [0, T)$ 时, 用 t_0 来标记 t . 则式(54)转化为

$$E(t_0) \leq V_p(0) + Lt_0 + \frac{1}{k_1} \beta \omega (1 - e^{-k_1 t_0}), \quad (55)$$

则 $E(t_0)$ 是有界的.

3) 学习收敛性.

对于时刻 $t \in [kT, (k+1)T) (k=1, 2, 3, \dots)$, 可表示为 $t = t_0 + kT$. 则对于 $t \in [kT, (k+1)T)$, 有

$$\begin{aligned} E(t) &= \\ E(t_0) &+ \sum_{j=0}^{k-1} \Delta E(t-jT) \leq \\ E(t_0) &- \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} K s^2(\sigma) d\sigma + \\ &\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k_1} \beta \omega (e^{-k_1(t-(j+1)T)} - e^{-k_1(t-jT)}) = \\ E(t_0) &- \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} K s^2(\sigma) d\sigma + \\ &\frac{1}{k_1} \beta \omega (e^{-k_1(t-kT)} - e^{-k_1 t}). \end{aligned} \quad (56)$$

由上式可得

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} K s^2(\sigma) d\sigma &\leq \\ E(t_0) - E(t) + \frac{1}{k_1} \beta \omega (e^{-k_1(t-kT)} - e^{-k_1 t}) &\leq \\ E(t_0) + \frac{1}{k_1} \beta \omega (e^{-k_1(t-kT)} - e^{-k_1 t}). \end{aligned} \quad (57)$$

对上式求极限, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} K s^2(\sigma) d\sigma &\leq \\ E(t_0) + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{k_1} \beta \omega (e^{-k_1(t-kT)} - e^{-k_1 t}) &= E(t_0). \end{aligned} \quad (58)$$

根据级数收敛的必要条件, 可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-T}^t s^2(\sigma) d\sigma = 0,$$

等价于 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-T}^t |s(\sigma)| d\sigma = 0$. 则由 $s(t)$ 的定义可知

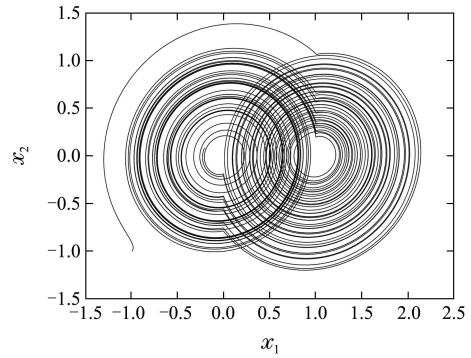
$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e_s(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0, \text{ 进一步有}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

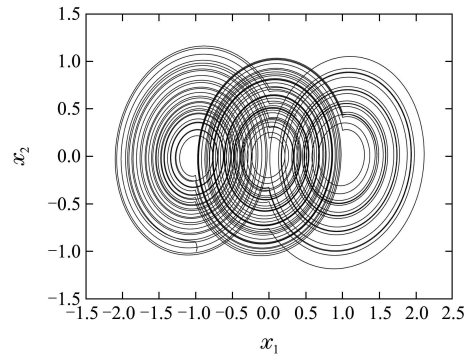
证毕.

5 仿真分析(Simulation analysis)

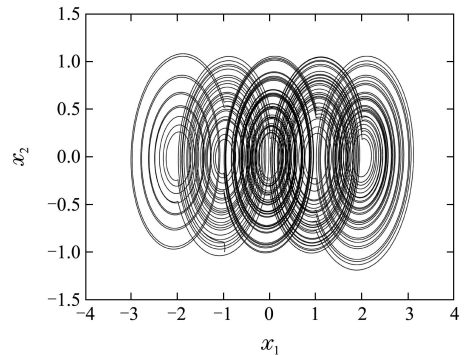
以第2.2节设计的分数阶多涡卷混沌系统为仿真对象. 系统参数取值为 $a_1 = 1, b_1 = 0.125, c_1 = 1, d_1 = 1$, 图1为当 m 分别取不同数值时, 系统(10)产生的多涡卷曲线.



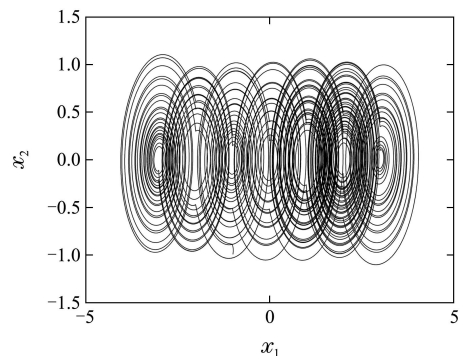
(a) $m = 1$



(b) $m = 2$



(c) $m = 4$



(d) $m = 6$

图1 分数阶滞环多涡卷混沌系统轨迹图

Fig. 1 Chaotic orbits of fractional order hysteresis multi-scroll chaotic systems

下面验证所提出自适应重复学习同步控制方案的有效性. 主系统为式(10)表示的系统, 被控从系统为

$$\begin{cases} D^\alpha y_1 = y_2, \\ D^\alpha y_2 = -a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 Hys(d_2 y_1) + \\ \Delta g(y) + d(t) + u(t), \end{cases} \quad (59)$$

其中: $\Xi = [-a_2, b_2]^T$, $\Theta(t) = [0.1 \sin t, 0.1 \cos t]^T$, $\xi(y) = [y_1, y_2]^T$. 控制律选择为式(27)的形式, 参数自适应律选择式(28)–(31)的形式. 令 $m = 2$, 主系统参数取值如上, 从系统参数取值为

$$\begin{aligned} a_2 &= 1, b_2 = 0.125, c_2 = 1, d_2 = 1, \\ \Delta g(y) &= 0.05 \cos(y_1 y_2), \theta(t) = \Xi + \Theta(t), \\ d &= 0.1 \sin t, T = 20\pi. \end{aligned}$$

控制参数取值为

$$\begin{aligned} K &= 5, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \lambda = 2, \\ \delta &= \varepsilon = \lambda \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 3, K_1 = 5, \\ q_1 &= 2, q_2 = 0.9, q_3 = 0.8, q_4 = 0.01, \\ q_0(t) &= [200 + (t - T)]/100, \end{aligned}$$

神经网络参数为

$$\begin{aligned} l &= 20, \mu_j = \frac{1}{l}(2j - l)[6, 3]^T, \\ \eta_j &= 2, j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

部分仿真结果如图2–6所示.

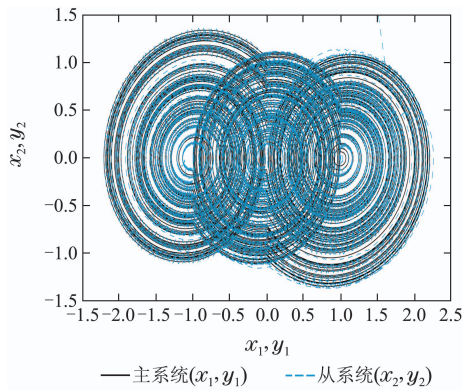


图 2 主系统和从系统轨迹图

Fig. 2 Chaotic orbits of master system and slave system

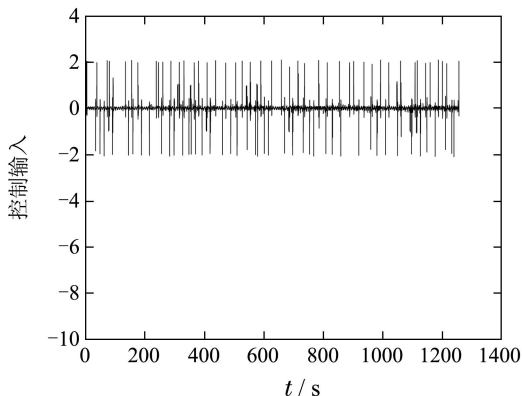


图 3 控制输入曲线

Fig. 3 The curve of control input

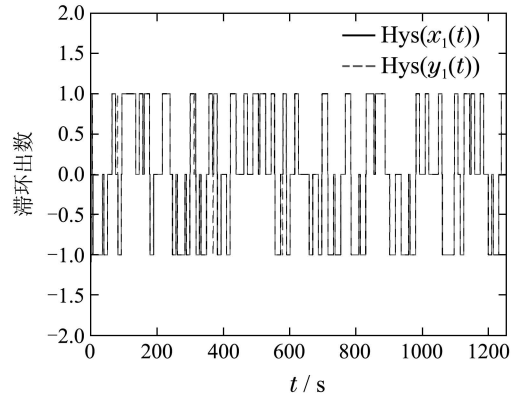


图 4 滞环函数曲线

Fig. 4 The curve of hysteresis function

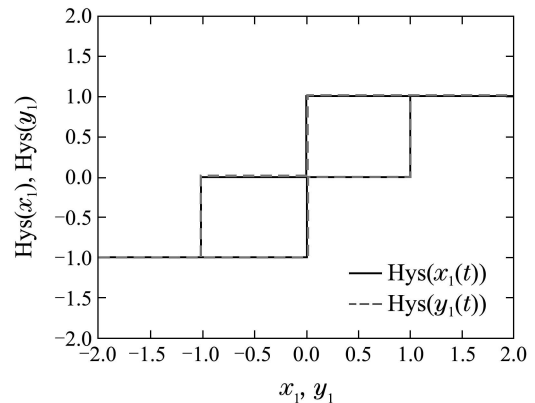


图 5 滞环函数相图

Fig. 5 The Phase graph of hysteresis function

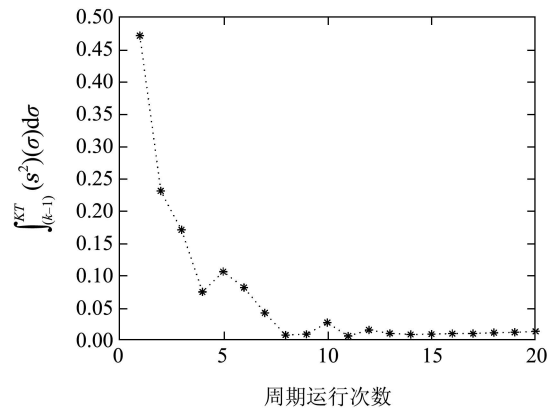


图 6 误差 $\int_{(k-1)T}^{kT} s^2(\sigma) d\sigma$ 随周期运行次数 k 变化曲线

Fig. 6 Tracking error $\int_{(k-1)T}^{kT} s^2(\sigma) d\sigma$ versus the number of periodic operation k

图2给出了主系统和从系统的轨迹图, 从图中大体可以看出所设计方法实现了主系统和从系统轨迹趋于一致. 图3给出了控制输入曲线. 图4和图5分别给出了主系统和从系统滞环函数变化曲线及其相图. 图6给出了同步误差变量 $\int_{(k-1)T}^{kT} s^2(\sigma) d\sigma$ 随周期运行次数 k 的变化曲线, 从图中可以看出, 通过周期重复学

习, 误差随着学习的进行逐渐收敛, 实现了从系统与主系统渐近同步, 达到了控制目标, 充分验证了本文设计方法的有效性.

6 结语(Conclusions)

本文首先设计了基于滞环函数的新型分数阶多涡卷混沌系统, 然后针对这一类混沌系统同时具有参数化不确定、非参数不确定和外部扰动情况, 引入等价频率分布模型, 结合自适应学习控制和神经网络方法, 提出了一种能实现主系统和从系统的跟踪误差渐近同步的分数阶重复学习控制器. 利用类Lyapunov复合能量函数证明了同步误差的学习收敛性. 仿真结果验证所提方案的有效性. 本文研究了分数阶多涡卷混沌系统的完全同步控制问题, 但所设计自适应重复学习控制方法具有广泛的适用性, 还适用于投影同步、函数同步、反同步等问题, 同样适用于其它类型混沌系统的同步控制问题.

参考文献(References):

- [1] WU Zhongqiang, KUANG Yu. General synchronization control of multi-scroll chaotic systems [J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(10): 6823 – 6827.
(吴忠强, 邝钰. 多涡卷混沌系统的广义同步控制 [J]. *物理学报*, 2009, 58(10): 6823 – 6826.)
- [2] WANG C, GE S S. Synchronization of two uncertain chaotic systems via adaptive backstepping [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2001, 11(6): 1743 – 1751.
- [3] PARK J H. Adaptive modified projective synchronization of a unified chaotic system with an uncertain parameter [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, 34(5): 1552 – 1559.
- [4] SALARIEH H, SHAHROKHI M. Adaptive synchronization of two different chaotic systems with time varying unknown parameters [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, 37(1): 125 – 136.
- [5] XIE Yinghui, SUN Zengqi. Exponential synchronization for delayed Chen chaotic systems and applications to secure communications [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(2): 133 – 137.
(谢英慧, 孙增圻. 时滞Chen混沌系统的指数同步及在保密通信中的应用 [J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(2): 133 – 137.)
- [6] POURMAHMOOD M, KHANMOHAMMADI S, ALIZADEH G. Synchronization of two different uncertain chaotic systems with unknown parameters using a robust adaptive sliding mode controller [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(7): 2853 – 2868.
- [7] VINCENT U E, ODUNAIKE R K, LAOYE J A, et al. Adaptive backstepping control and synchronization of a modified and chaotic Van der Pol-Duffing oscillator [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2011, 9(2): 273 – 277.
- [8] FU G Y. Robust adaptive modified function projective synchronization of different hyperchaotic systems subject to external disturbance [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(6): 2602 – 2608.
- [9] AGRAWAL S K, DAS S. Function projective synchronization between four dimensional chaotic systems with uncertain parameters using modified adaptive control method [J]. *Journal of Process Control*, 2014, 24(5): 517 – 530.
- [10] VARGAS J A R, GRZEIDAK E, GULARTE K H M, et al. An adaptive scheme for chaotic synchronization in the presence of uncertain parameter and disturbances [J]. *Neurocomputing*, 2016, 174: 1038 – 1048.
- [11] XU J X, YAN R. Synchronization of chaotic systems via learning control [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, 15(12): 4035 – 4041.
- [12] SUN Y P, LI J M, WANG J A, et al. Generalized projective synchronization of chaotic systems via adaptive learning control [J]. *Chinese Physics B*, 2010, 19(2): 020505.
- [13] SONG Y, YU X, CHEN G, et al. Time delayed repetitive learning control for chaotic systems [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(5): 1057 – 1065.
- [14] PETRÁŠ I. *Fractional-order Nonlinear Systems-modeling, Analysis and Simulation* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2010.
- [15] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of their Applications* [M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [16] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* [M]. The Netherlands: Elsevier, 2006.
- [17] TRIGEASSOU J C, MAAMRI N, OUTALOUPOU A. Lyapunov stability of linear fractional systems: Part I—definition of fractional energy [C] // *ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Oregon, Portland, USA: ASME, 2013: 437 – 445.
- [18] POLYCARPOU M M. Stable adaptive neural control scheme for nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3): 447 – 451.

作者简介:

孙美美 (1987–), 女, 博士, 讲师, 目前研究方向为自适应控制、混沌同步控制, E-mail: smm6224582@sina.cn;

胡云安 (1966–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性控制、智能控制与智能系统等, E-mail: hya507@sina.com;

韦建明 (1986–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为非线性控制、学习控制等, E-mail: wjm604@163.com.