

## 事件触发双模分布式预测控制

苏旭<sup>1</sup>, 邹媛媛<sup>1†</sup>, 牛玉刚<sup>1</sup>, 贾廷纲<sup>2</sup>

(1. 华东理工大学 化工过程先进控制和优化技术教育部重点实验室, 上海 200237;

2. 上海电气集团股份有限公司 自动化事业部, 上海 200070)

**摘要:** 本文针对有界扰动作用下的线性离散大系统, 提出了事件触发双模分布式预测控制设计方法. 利用输入状态稳定性(input-to-state stability, ISS)理论建立了仅与子系统自身信息相关的事件触发条件. 只有子系统满足相应的事件触发条件, 才进行状态信息的传输和分布式预测控制优化问题的求解, 并与邻域子系统交互最优解作用下的关联信息. 当子系统进入不变集时, 采用状态反馈控制律进行镇定, 并与进入不变集的邻域子系统不再交互信息. 分析了算法的递推可行性和系统的闭环稳定性, 给出了扰动的上界. 最后, 通过车辆控制系统对算法进行仿真实验, 结果表明, 本文提出的方法能够有效降低优化问题的求解次数和关联信息的交互次数, 节约计算资源和通信资源.

**关键词:** 大系统; 分布式控制系统; 模型预测控制; 事件触发控制

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Event-triggered dual-mode distributed model predictive control

SU Xu<sup>1</sup>, ZOU Yuan-yuan<sup>1†</sup>, NIU Yu-gang<sup>1</sup>, JIA Ting-gang<sup>2</sup>

(1. Key Laboratory of Advanced Control and Optimization for Chemical Processes,

East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China;

2. Automation Division, Shanghai Electric Group Co., Ltd., Shanghai 200070, China)

**Abstract:** This paper proposes an event-triggered dual-mode distributed model predictive control method for large-scale linear discrete-time systems subject to bounded disturbances. The event-triggering condition, which involves information of the subsystem itself, is obtained by the input-to-state stability (ISS) theory. Only when the event-triggering condition is satisfied, the state measurement is sent and the distributed model predictive control optimization problem is solved. Meanwhile, the subsystem exchanges its optimal state trajectories with neighbor subsystems. When the subsystem enters the invariant set, the state feedback control law will be applied. Moreover, no information will be exchanged between the subsystem and its neighbor subsystems which also enter the invariant sets. The upper bound of disturbances are derived by analyzing the recursive feasibility and closed-loop stability. Finally, the algorithm is verified through the vehicle control systems. Simulation results show that the presented method is able to reduce the solving frequency of optimization problems and the number of information transmissions, thus saving the computation resources and communication resources.

**Key words:** large-scale systems; distributed control systems; model predictive control; event-triggered control

### 1 引言(Introduction)

随着生产过程向大型化、复杂化方向发展, 实际中出现了许多由多个相互关联的子系统组成的大系统, 如电力系统、能源系统、交通系统等. 传统的集中式控制需要对全局状态进行观测和控制, 装置规模和变量维数的增大将给控制器造成巨大的计算负担, 一旦控制器出现故障, 还可能整个系统面临瘫痪. 无线网络、现场总线以及智能仪表的发展促进了分布式控制的产生与应用. 分布式控制将原本复杂的整体问题分解到各个子控制器中分别求解, 降低了控制器的

计算量, 提高了系统的可靠性. 同时, 各个子控制器可以借助网络交互信息, 相互协调完成整个系统的任务<sup>[1-2]</sup>.

预测控制作为一种先进的控制算法, 因能有效地处理多变量、有约束的优化问题而得到广泛关注<sup>[3-6]</sup>. 在分布式系统中采用预测控制, 不仅可以解决相应的分布式约束控制问题, 而且通过信息交互能够预测未来子系统之间的相互作用, 保证系统的控制性能<sup>[7-8]</sup>. 目前, 分布式预测控制取得了大量的研究成果, 按照子系统之间的关联方式不同, 可以分为直接关联子系

收稿日期: 2015-12-06; 录用日期: 2016-06-20.

†通信作者. E-mail: yzou@ecust.edu.cn.

本文责任编辑: 席裕庚.

国家自然科学基金项目(61673174, 61374107), 国家科技支撑计划(2015BAF10B00)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61673174, 61374107) and National Science and Technology Ministry (2015BAF10B00).

统组成的大系统和间接关联子系统组成的大系统的分布式预测控制. 直接关联指子系统的模型含有关联项<sup>[9-10]</sup>, 间接关联指子系统的模型不含关联项, 但在性能指标函数或者约束条件中含有关联项. 文献[11]讨论了非线性大系统的分布式预测控制, 其中子系统的模型不含关联项, 但性能指标函数考虑了邻域子系统的状态信息. 文献[12]针对间接关联子系统组成的大系统, 在分布式预测控制器的设计过程中考虑了全局系统的输出约束. 由于实际系统存在不确定性, 文献[13]针对具有多胞不确定性的线性大系统, 将分布式鲁棒预测控制器的设计问题转化成“极小-极大”问题, 得到了保证系统指数稳定的充分条件. 文献[14]针对有界扰动作用下的线性大系统, 采用固定控制律附加摄动量的方法设计了分布式预测控制器. 文献[15]研究了有界扰动作用下非线性大系统的分布式预测控制. 通过选取基于邻域信息的性能指标函数和构造鲁棒约束条件, 保证了全局系统在有限时间内收敛至扰动不变集.

以上文献都是基于时间触发机制, 当系统已经达到期望的控制性能, 控制动作仍然周期性地执行将造成资源的浪费. 为此, 文献[16]提出了事件触发控制. 与时间触发控制不同, 事件触发控制预先设定事件触发条件, 只有事件触发条件成立, 系统才执行相应的控制动作, 从而在保证系统性能的前提下降低了资源消耗. 近年来, 人们对事件触发控制进行了深入的研究, 得到了许多有益的结果<sup>[17-19]</sup>. 文献[20]考虑了非线性大系统的事件触发分布式预测控制. 在保证ISS的前提下求得了子系统的事件触发条件, 减少了优化问题的求解次数, 降低了计算资源的消耗. 在文献[20]的基础上, 文献[21]进一步给出了有界扰动作用下事件触发分布式预测控制器的设计方法. 但是, 上述工作只考虑了计算资源的合理使用, 对于分布式预测控制而言, 由于子系统之间存在着信息交互, 网络通信资源的节约利用也是一个需要关注的问题.

针对以上问题, 本文提出了基于事件触发机制的双模分布式预测控制算法. 通过构造ISS-Lyapunov函数求得了仅与子系统自身信息相关的事件触发条件, 使得子系统在进入不变集之前非周期性地求解优化问题, 有效降低了反馈通道的通信量和控制器的计算能耗. 当子系统进入不变集时, 采用状态反馈控制律进行镇定, 并与进入不变集的邻域子系统不再交互信息, 进一步减少通信资源的使用. 在此基础上, 给出了保证算法递推可行性和系统闭环稳定性的扰动上界. 最后通过仿真实例验证算法的有效性.

符号说明:  $\mathbb{N}$ 表示所有自然数的集合,  $\mathbb{Z}$ 表示所有整数的集合,  $\mathbb{R}^n$ 表示实数域上的 $n$ 维Eucliden空间,  $\mathbb{R}^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维的实矩阵构成的集合,  $I_{n \times n}$ 表示

$n \times n$ 维的单位阵,  $Q^T$ 表示矩阵 $Q$ 的转置. 给定列向量 $\boldsymbol{x}$ 和适当维数的矩阵 $Q$ ,  $\|\boldsymbol{x}\|$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的Eucliden范数,  $\|\boldsymbol{x}\|_Q = \sqrt{\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x}}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的 $Q$ 范数. 给定正定矩阵 $Q$ ,  $\bar{\lambda}(Q)$ 和 $\underline{\lambda}(Q)$ 分别表示矩阵 $Q$ 所有特征值中的最大值和最小值. 给定集合 $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ , Pontryagin差集定义为 $C \sim D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in C, \forall \boldsymbol{y} \in D\}$ . 给定常数 $a$ 和 $b$ ,  $\min\{a, b\}$ 表示取最小值,  $\max\{a, b\}$ 表示取最大值.

## 2 问题描述(Problem description)

考虑由 $M$ 个带有有界干扰的线性离散子系统组成的分布式系统, 其中子系统 $S_i (i = 1, \dots, M)$ 描述为

$$\boldsymbol{x}_i(k+1) = A_i \boldsymbol{x}_i(k) + B_i \boldsymbol{u}_i(k) + \boldsymbol{w}_i(k), \quad (1)$$

其中:  $\boldsymbol{x}_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\boldsymbol{u}_i(k) \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $\boldsymbol{w}_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ 分别为子系统 $S_i$ 在 $k$ 时刻的状态、输入和扰动;  $\boldsymbol{x}_i(k) \in X_i = \{\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i} : \|\boldsymbol{x}_i\| \leq \bar{x}_i\}$ ,  $\boldsymbol{u}_i(k) \in U_i = \{\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R}^{m_i} : \|\boldsymbol{u}_i\| \leq \bar{u}_i\}$ ,  $\boldsymbol{w}_i(k) \in W_i = \{\boldsymbol{w}_i \in \mathbb{R}^{n_i} : \|\boldsymbol{w}_i\| \leq \bar{w}_i\}$ ; 矩阵 $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$ .

子系统 $S_i$ 对应的标称模型为

$$\boldsymbol{x}_i(k+1) = A_i \boldsymbol{x}_i(k) + B_i \boldsymbol{u}_i(k). \quad (2)$$

在图1所示的事件触发分布式预测控制结构中, 子系统 $S_i$ 的传感器至控制器之间存在触发器, 用于判断事件触发条件, 决定是否将状态信息传送到控制器. 子系统 $S_i$ 的控制器通过网络与邻域子系统 $S_j (j \in \mathcal{N}_i)$ 的控制器周期性交互信息, 即无论子系统 $S_i$ 是否满足事件触发条件, 都将当前时刻的关联信息发送给邻域子系统 $S_j$ , 同时接收来自邻域子系统 $S_j$ 的关联信息, 其中 $\mathcal{N}_i$ 为子系统 $S_i$ 所有邻域子系统 $S_j$ 的序号集合. 图1中的实线箭头表示信息周期性地传送, 虚线箭头表示信息非周期性地传送.

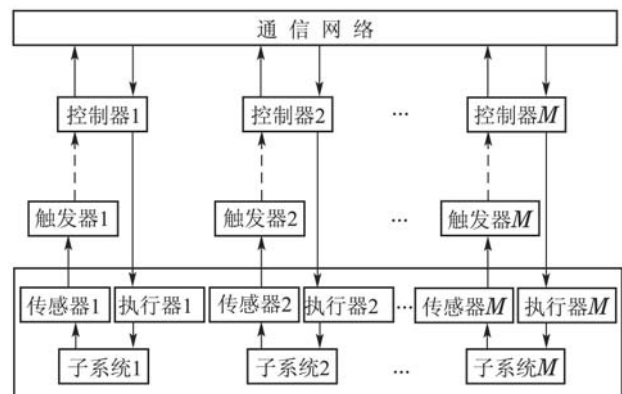


图1 事件触发分布式预测控制结构图

Fig. 1 Diagram of event-triggered distributed model predictive control

子系统 $S_i$ 的性能指标函数为

$$J_i(k) = J_i^E(k) + J_i^F(k), \quad (3)$$

其中:

$$J_i^E(k) \triangleq \sum_{l=0}^{N-1} (\|\mathbf{x}_i(k+l|k)\|_{Q_i}^2 + \|\mathbf{u}_i(k+l|k)\|_{R_i}^2) + \|\mathbf{x}_i(k+N|k)\|_{P_i}^2, \quad (4)$$

$$J_i^F(k) \triangleq \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|\mathbf{x}_i(k+l|k) - \mathbf{x}_j^a(k+l|k)\|_{Q_{ij}}^2, \quad (5)$$

$N$ 为预测时域;  $Q_i, R_i, P_i, Q_{ij}$ 均为正定对称矩阵.  $\mathbf{x}_i(k+l|k)$ 和 $\mathbf{u}_i(k+l|k)$ 分别为子系统 $S_i$ 在 $k$ 时刻对未来 $k+l$ 时刻的状态和输入的预测值;  $\mathbf{x}_j^a(k+l|k)$ 为子系统 $S_i$ 在 $k$ 时刻对邻域子系统 $S_j$ 未来 $k+l$ 时刻的状态估计值, 具体取值与 $S_j$ 在 $k-1$ 时刻的触发情况有关: 1) 如果子系统 $S_j$ 在 $k-1$ 时刻满足事件触发条件, 则 $\mathbf{x}_j^a(k+l|k) = \mathbf{x}_j^*(k+l|k-1)$ ,  $l = 0, \dots, N-1$ ,  $\mathbf{x}_j^*(k+l|k-1)$ 为子系统 $S_i$ 接收到的来自邻域子系统 $S_j$ 在 $k-1$ 时刻最优解作用下的状态预测值; 2) 如果子系统 $S_j$ 在 $k-1$ 时刻不满足事件触发条件, 则 $\mathbf{x}_j^a(k+l|k) = \bar{\mathbf{x}}_j(k+l|k-1)$ ,  $l = 0, \dots, N-1$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_j(k+l|k-1)$ 为子系统 $S_i$ 接收到的来自邻域子系统 $S_j$ 在 $k-1$ 时刻可行解作用下的状态预测值.

记 $k_d^i (d \in \mathbb{N})$ 为子系统 $S_i$ 的第 $d$ 个触发时刻,  $k_0^i = 0$ . 在 $k_d^i$ 时刻, 子系统 $S_i$ 满足事件触发条件, 需要求解的优化问题 $\mathcal{P}_i$ 为

$$\min_{\mathbf{u}_i(k_d^i+l|k_d^i), 0 \leq l \leq N-1} J_i(k_d^i), \quad (6)$$

s.t.

$$\mathbf{x}_i(k_d^i+l+1|k_d^i) = A_i \mathbf{x}_i(k_d^i+l|k_d^i) + B_i \mathbf{u}_i(k_d^i+l|k_d^i), \quad (7)$$

$$\mathbf{x}_i(k_d^i+l|k_d^i) \in X_i^l = X_i \sim W_i^l, \quad l = 1, \dots, N-1, \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_i(k_d^i+l|k_d^i) \in U_i, \quad l = 0, \dots, N-1, \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_i(k_d^i+N|k_d^i) \in X_{if}, \quad (10)$$

$$J_i^E(k_d^i) \leq \varphi_i(k_d^i), \quad (11)$$

其中:  $W_i^l = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i} : \|\mathbf{x}_i\| \leq \frac{1 - \|A_i\|^l}{1 - \|A_i\|} \bar{w}_i\}$ ,  $X_{if} = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i} : V_i(\mathbf{x}_i) \leq \gamma_i\}$ ,  $V_i(\mathbf{x}_i) \triangleq \|\mathbf{x}_i\|_{P_i}^2$ ,  $\varphi_i(k_d^i)$ 是随着时刻 $k_d^i$ 变化的数值, 具体形式将在定理1的证明中给出.

本文的研究目标是基于事件触发机制设计双模分布式预测控制算法, 在保证ISS的前提下减少优化问题的求解次数和关联信息的交互次数, 实现计算资源与通信资源的节约利用.

### 3 事件触发双模分布式预测控制(Event-triggered dual-mode distributed model predictive control)

本节给出事件触发条件的推导过程和事件触发双模分布式预测控制的算法描述, 并对算法的递推可行

性以及系统的闭环稳定性进行分析, 给出扰动的上界.

**引理 1**<sup>[22]</sup> 对于子系统 $S_i$ 的标称模型(2), 给定正定对称矩阵 $Q_i$ 和 $R_i$ , 存在常数 $\varepsilon_i > 0$ ,  $0 < \gamma_i < \varepsilon_i$ , 正定对称矩阵 $P_i$ , 状态反馈控制律 $K_i$ , 使得: 1)  $\forall \mathbf{x}_i \in \phi_i, K_i \mathbf{x}_i \in U_i, \|(A_i + B_i K_i) \mathbf{x}_i\|_{P_i}^2 - \|\mathbf{x}_i\|_{P_i}^2 \leq -\|\mathbf{x}_i\|_{Q_i}^2$ , 其中:  $\phi_i = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i} : V_i(\mathbf{x}_i) \leq \varepsilon_i\}$ ,  $Q_i = Q_i + K_i^T R_i K_i$ ; 2)  $\forall \mathbf{x}_i \in \phi_i, (A_i + B_i K_i) \mathbf{x}_i \in X_{if}$ .

#### 3.1 事件触发条件(Event-triggering condition)

事件触发分布式预测控制在触发时刻求解优化问题, 将得到的最优解作用于子系统. 在相邻的两个触发时刻之间, 由于不求解优化问题, 需要构造与触发时刻相关的可行解作用于子系统. 假设在 $k_d^i$ 时刻, 子系统 $S_i$ 求解优化问题 $\mathcal{P}_i$ 得到最优解 $\mathbf{u}_i^*(k_d^i+l|k_d^i)$ ,  $\mathbf{x}_i^*(k_d^i+l|k_d^i)$ 和 $J_i^{E*}(k_d^i)$ . 记下一个触发时刻为 $k_{d+1}^i$ , 当 $k \in (k_d^i, k_{d+1}^i]$ , 构造如下形式的可行解:

当 $k = k_d^i + 1$ 时,

$$\bar{\mathbf{u}}_i(k+l|k) = \begin{cases} \mathbf{u}_i^*(k+l|k_d^i), & l = 0, \dots, N-2, \\ K_i \bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k), & l = N-1; \end{cases} \quad (12)$$

当 $k_d^i + 1 < k \leq k_{d+1}^i$ 时,

$$\bar{\mathbf{u}}_i(k+l|k) = \begin{cases} \bar{\mathbf{u}}_i(k+l|k-1), & l = 0, \dots, N-2, \\ K_i \bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k), & l = N-1. \end{cases} \quad (13)$$

记 $\bar{J}_i^E(k)$ 和 $\bar{J}_i^E(k-1)$ 分别为子系统 $S_i$ 在 $k$ 时刻可行解 $\bar{\mathbf{u}}_i(k+l|k)$ 和 $k-1$ 时刻可行解 $\bar{\mathbf{u}}_i(k+l|k-1)$ 作用下的值. 由于子系统 $S_i$ 在 $k_d^i$ 时刻求得最优解作用下的 $J_i^{E*}(k_d^i)$ , 所以令 $\bar{J}_i^E(k_d^i) = J_i^{E*}(k_d^i)$ , 于是有

$$\begin{aligned} \Delta J_i^E(k) &= \bar{J}_i^E(k) - \bar{J}_i^E(k-1) = \\ & \sum_{l=0}^{N-1} (\|\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k)\|_{Q_i}^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_i(k+l|k)\|_{R_i}^2) + \\ & \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+N|k)\|_{P_i}^2 - \sum_{l=1}^{N-2} (\|\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k-1)\|_{Q_i}^2 + \\ & \|\bar{\mathbf{u}}_i(k+l|k-1)\|_{R_i}^2) - \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+N-1|k-1)\|_{P_i}^2 = \\ & \sum_{l=0}^{N-2} (\|\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k)\|_{Q_i}^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_i(k+l|k)\|_{R_i}^2 - \\ & \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k-1)\|_{Q_i}^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_i(k+l|k-1)\|_{R_i}^2) + \\ & \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+N-1|k)\|_{Q_i}^2 - \|\mathbf{x}_i(k-1)\|_{Q_i}^2 - \\ & \|\mathbf{u}_i^*(k-1|k_d^i)\|_{R_i}^2 + \\ & \|(A_i + B_i K_i) \bar{\mathbf{x}}_i(k+N-1|k)\|_{P_i}^2 - \\ & \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+N-1|k-1)\|_{P_i}^2 + \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+N-1|k)\|_{P_i}^2 - \\ & \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+N-1|k)\|_{P_i}^2. \end{aligned} \quad (14)$$

由引理1可知

$$\begin{aligned} & \|(A_i + B_i K_i) \bar{\mathbf{x}}_i(k+N-1|k)\|_{P_i}^2 - \\ & \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+N-1|k)\|_{P_i}^2 + \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+N-1|k)\|_{Q_i}^2 \leq 0. \end{aligned}$$

在  $\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k) = \bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k-1)$ ,  $l = 0, \dots, N-2$  的作用下:

$$\|\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k) - \bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k-1)\| = \|A_i^l(\mathbf{x}_i(k) - \bar{\mathbf{x}}_i(k|k-1))\| \leq \|A_i\|^l \bar{w}_i, \quad (15)$$

所以

$$\begin{aligned} & \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k)\|_{Q_i}^2 - \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k-1)\|_{Q_i}^2 \leq \\ & 2\bar{\lambda}(Q_i)\|\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k-1)\| \cdot \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k) - \\ & \bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k-1)\| + \bar{\lambda}(Q_i)\|\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k) - \\ & \bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k-1)\|^2 \leq \\ & 2\bar{\lambda}(Q_i)\bar{x}_i\|A_i\|^l \bar{w}_i + \bar{\lambda}(Q_i)\|A_i\|^{2l} \bar{w}_i^2. \end{aligned} \quad (16)$$

同理, 有

$$\begin{aligned} & \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+N-1|k)\|_{P_i}^2 - \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+N-1|k-1)\|_{P_i}^2 \leq \\ & 2\bar{\lambda}(P_i)\bar{x}_i\|A_i\|^{N-1} \bar{w}_i + \bar{\lambda}(P_i)\|A_i\|^{2(N-1)} \bar{w}_i^2. \end{aligned} \quad (17)$$

对式(16)累加求和:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{N-2} (\|\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k)\|_{Q_i}^2 - \|\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k-1)\|_{Q_i}^2) \leq \\ & \frac{2\bar{\lambda}(Q_i)\bar{x}_i\bar{w}_i(1-\|A_i\|^{N-1})}{1-\|A_i\|} + \\ & \frac{\bar{\lambda}(Q_i)\bar{w}_i^2(1-\|A_i\|^{2(N-1)})}{1-\|A_i\|^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

将式(17)–(18)代入式(14)可得

$$\begin{aligned} \Delta J_i^E(k) \leq & -\|\mathbf{x}_i(k-1)\|_{Q_i}^2 - \|\mathbf{u}_i^*(k-1|k_d^i)\|_{R_i}^2 + \\ & \Theta_i(\bar{w}_i), \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \Theta_i(\bar{w}_i) = & 2\bar{x}_i\bar{w}_i[\bar{\lambda}(P_i)\|A_i\|^{N-1} + \frac{\bar{\lambda}(Q_i)(1-\|A_i\|^{N-1})}{1-\|A_i\|}] + \\ & \bar{w}_i^2[\bar{\lambda}(P_i)\|A_i\|^{2(N-1)} + \frac{\bar{\lambda}(Q_i)(1-\|A_i\|^{2(N-1)})}{1-\|A_i\|^2}]. \end{aligned} \quad (20)$$

如果存在如下关系:

$$\Theta_i(\bar{w}_i) \leq \sigma_i(\|\mathbf{x}_i(k-1)\|_{Q_i}^2 + \|\mathbf{u}_i^*(k-1|k_d^i)\|_{R_i}^2), \quad (21)$$

其中  $0 < \sigma_i < 1$ , 则

$$\begin{aligned} \Delta J_i^E(k) \leq & (\sigma_i - 1) \cdot (\|\mathbf{x}_i(k-1)\|_{Q_i}^2 + \\ & \|\mathbf{u}_i^*(k-1|k_d^i)\|_{R_i}^2) < 0. \end{aligned} \quad (22)$$

因此, 子系统  $S_i$  在  $k$  时刻的事件触发条件为

$$\Theta_i(\bar{w}_i) > \sigma_i(\|\mathbf{x}_i(k-1)\|_{Q_i}^2 + \|\mathbf{u}_i^*(k-1|k_d^i)\|_{R_i}^2). \quad (23)$$

**注 1** 如果子系统  $S_i$  在预测时域  $N$  步内都未触发, 则将  $k_d^i + N$  作为新的触发时刻. 综上, 子系统  $S_i$  在  $k$  时刻的事件触发条件为

$$\Theta_i(\bar{w}_i) > \sigma_i(\|\mathbf{x}_i(k-1)\|_{Q_i}^2 + \|\mathbf{u}_i^*(k-1|k_d^i)\|_{R_i}^2)$$

$$\text{或 } k = k_d^i + N. \quad (24)$$

**注 2** 从式(23)中可以看出, 当  $\mathbf{x}_i(k)$  和  $\mathbf{u}_i(k)$  很小时, 事件触发条件总是成立, 从而导致优化问题的求解次数增加, 消耗大量的计算资源. 为此, 采用双模预测控制, 当子系统  $S_i$  进入不变集  $\phi_i$  后, 使用状态反馈控制律  $K_i$  进行镇定, 降低系统的计算能耗. 同时, 与进入不变集  $\phi_j$  的邻域子系统  $S_j$  不再交互信息, 进一步节约通信资源.

### 3.2 事件触发双模分布式预测控制算法(Event-triggered dual-mode distributed model predictive control algorithm)

下面给出基于事件触发机制的双模分布式预测控制算法:

#### 算法 1

1) 在  $k = 0$  时刻, 对于子系统  $S_i$ , 令  $\mathbf{x}_j^a(l|0) = 0$ ,  $l = 0, \dots, N-1$ ,  $\varphi_i(0) = \infty$ . 传感器将  $\mathbf{x}_i(0)$  发送至控制器, 控制器求解优化问题  $\mathcal{P}_i$  得到最优解  $\mathbf{u}_i^*(0|0), \dots, \mathbf{u}_i^*(N-1|0)$ , 更新  $\mathbf{u}_i(0) = \mathbf{u}_i^*(0|0)$ , 发送最优解作用下的状态预测值  $\mathbf{x}_i^*(1|0), \dots, \mathbf{x}_i^*(N|0)$  至邻域子系统  $S_j$ , 接收来自邻域子系统  $S_j$  的状态预测值  $\mathbf{x}_j^*(1|0), \dots, \mathbf{x}_j^*(N|0)$ ;

2) 在  $k > 0$  时刻:

① 子系统  $S_i$  测量  $\mathbf{x}_i(k)$ , 判断  $\mathbf{x}_i(k)$  是否进入不变集  $\phi_i$ . 如果  $\mathbf{x}_i(k) \in \phi_i$ , 则更新  $\mathbf{u}_i(k) = K_i \mathbf{x}_i(k)$ , 发送状态反馈控制律  $K_i$  作用下的状态预测值  $(A_i + B_i K_i) \mathbf{x}_i(k), \dots, (A_i + B_i K_i)^N \mathbf{x}_i(k)$  至未进入不变集  $\phi_j$  的邻域子系统  $S_j$ . 如果  $\mathbf{x}_i(k) \notin \phi_i$ , 继续以下步骤;

② 子系统  $S_i$  判断事件触发条件(24)是否成立. 若成立, 更新触发时刻  $k_d^i = k$ , 传感器将  $\mathbf{x}_i(k)$  发送至控制器, 控制器求解优化问题  $\mathcal{P}_i$  得到最优解  $\mathbf{u}_i^*(k|k), \dots, \mathbf{u}_i^*(k+N-1|k)$ , 更新  $\mathbf{u}_i(k) = \mathbf{u}_i^*(k|k)$ , 发送最优解作用下的状态预测值  $\mathbf{x}_i^*(k+1|k), \dots, \mathbf{x}_i^*(k+N|k)$  至未进入不变集  $\phi_j$  的邻域子系统  $S_j$ , 接收来自邻域子系统  $S_j$  的状态预测值  $\bar{\mathbf{x}}_j(k+1|k), \dots, \bar{\mathbf{x}}_j(k+N|k)$ . 若不成立, 继续以下步骤;

③ 传感器不发送  $\mathbf{x}_i(k)$ , 控制器不求解优化问题  $\mathcal{P}_i$ , 根据可行解(12)或(13)更新  $\mathbf{u}_i(k) = \bar{\mathbf{u}}_i(k|k)$ , 发送可行解作用下的状态预测值  $\bar{\mathbf{x}}_i(k+1|k), \dots, \bar{\mathbf{x}}_i(k+N|k)$  至未进入不变集  $\phi_j$  的邻域子系统  $S_j$ , 接收来自邻域子系统  $S_j$  的状态预测值  $\bar{\mathbf{x}}_j(k+1|k), \dots, \bar{\mathbf{x}}_j(k+N|k)$ ;

3) 令  $k = k + 1$ , 返回步骤①.

**注 3** 如果子系统  $S_j$  在  $k$  时刻满足事件触发条件, 则步骤②和③中的  $\bar{\mathbf{x}}_j(k+l|k) = \mathbf{x}_j^*(k+l|k)$ ,  $l = 1, \dots, N$ .

### 3.3 递推可行性(Recursive feasibility)

与传统的时间触发在每个采样时刻求解预测控制

优化问题不同, 在事件触发机制下由于在相邻的两个触发时刻之间不进行预测控制优化问题的求解, 因而需要重新考虑算法的递推可行性.

**引理 2** 令  $X_i^{l+1} = X_i \sim W_i^{l+1}$ ,  $l=1, \dots, N-1$ , 如果  $\mathbf{x} \in X_i^{l+1}$  与  $\mathbf{y}$  之间满足

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|A_i\|^l \bar{w}_i, \quad (25)$$

则  $\mathbf{y} \in X_i^l$ .

**证** 令  $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{v}$ , 其中  $\mathbf{v} \in W_i^l$ . 根据式(25)可得

$$\begin{aligned} \|z\| &= \|\mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{v}\| \leq \\ &\|A_i\|^l \bar{w}_i + \frac{1 - \|A_i\|^l}{1 - \|A_i\|} \bar{w}_i = \frac{1 - \|A_i\|^{l+1}}{1 - \|A_i\|} \bar{w}_i, \quad (26) \end{aligned}$$

因此  $\mathbf{z} \in W_i^{l+1}$ . 由  $X_i^{l+1} = X_i \sim W_i^{l+1}$  可得

$$\mathbf{y} + \mathbf{v} = \mathbf{z} + \mathbf{x} \in X_i, \quad (27)$$

所以  $\mathbf{y} \in X_i^l$ .

**定理 1** 对于子系统  $S_i$ , 如果扰动的上界满足

$$\bar{w}_i \leq \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_i - \gamma_i + \bar{\lambda}(P_i) \bar{x}_i^2}{\bar{\lambda}(P_i)} - \bar{x}_i}}{\|A_i\|^{N-1}}, \quad (28)$$

则式(12)或(13)是优化问题  $\mathcal{P}_i$  的可行解.

**证** 为了保证在式(28)作用下优化问题  $\mathcal{P}_i$  的可行性, 需要证明式(12)或(13)满足优化问题  $\mathcal{P}_i$  中的约束条件(8)–(11).

1)  $\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k) \in X_i^l$ ,  $l=1, \dots, N-1$ .

当  $k = k_d^i + 1$  时, 由式(15)可知

$$\|\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + l + 1 | k_d^i + 1) - \mathbf{x}_i^*(k_d^i + l + 1 | k_d^i)\| \leq \|A_i\|^l \bar{w}_i.$$

因为  $\mathbf{x}_i^*(k_d^i + l + 1 | k_d^i) \in X_i^{l+1}$ , 所以根据引理2可得  $\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + l + 1 | k_d^i + 1) \in X_i^l$ .

当  $k = k_d^i + 2$  时,

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + l + 2 | k_d^i + 2) - \bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + l + 2 | k_d^i + 1)\| &\leq \\ \|A_i\|^l \bar{w}_i. \end{aligned}$$

由于  $\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + l + 2 | k_d^i + 1) \in X_i^{l+1}$ , 因此  $\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + l + 2 | k_d^i + 2) \in X_i^l$ . 依此类推, 当  $k \in (k_d^i, k_{d+1}^i]$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_i(k+l|k) \in X_i^l$ .

2)  $\bar{\mathbf{x}}_i(k+N|k) \in X_{if}$ .

当  $k = k_d^i + 1$  时, 由式(17)可知

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N | k_d^i + 1)\|_{P_i}^2 - \|\mathbf{x}_i^*(k_d^i + N | k_d^i)\|_{P_i}^2 &\leq \\ 2\bar{\lambda}(P_i) \bar{\mathbf{x}}_i \|A_i\|^{N-1} \bar{w}_i + \bar{\lambda}(P_i) \|A_i\|^{2(N-1)} \bar{w}_i^2. \end{aligned}$$

根据  $\mathbf{x}_i^*(k_d^i + N | k_d^i) \in X_{if}$  和式(28)可得

$$\|\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N | k_d^i + 1)\|_{P_i}^2 \leq \varepsilon_i. \quad (29)$$

因此  $\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N | k_d^i + 1) \in \phi_i$ , 利用引理1, 有

$$\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N + 1 | k_d^i + 1) =$$

$$(A_i + B_i K_i) \bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N | k_d^i + 1) \in X_{if}.$$

当  $k = k_d^i + 2$  时, 因为

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N + 1 | k_d^i + 2)\|_{P_i}^2 - \\ \|\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N + 1 | k_d^i + 1)\|_{P_i}^2 &\leq \\ 2\bar{\lambda}(P_i) \bar{\mathbf{x}}_i \|A_i\|^{N-1} \bar{w}_i + \bar{\lambda}(P_i) \|A_i\|^{2(N-1)} \bar{w}_i^2, \end{aligned}$$

所以

$$\|\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N + 1 | k_d^i + 2)\|_{P_i}^2 \leq \varepsilon_i. \quad (30)$$

因此  $\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N + 1 | k_d^i + 2) \in \phi_i$ , 并且有

$$\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N + 2 | k_d^i + 2) =$$

$$(A_i + B_i K_i) \bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N + 1 | k_d^i + 2) \in X_{if}.$$

依此类推, 当  $k \in (k_d^i, k_{d+1}^i]$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_i(k+N|k) \in X_{if}$ .

3)  $\bar{\mathbf{u}}_i(k+l|k) \in U_i$ ,  $l=0, \dots, N-1$ .

当  $k = k_d^i + 1$  时,

$$\bar{\mathbf{u}}_i(k_d^i + l + 1 | k_d^i + 1) = \mathbf{u}_i^*(k_d^i + l + 1 | k_d^i) \in U_i,$$

$l=0, \dots, N-2$ .

根据  $\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N | k_d^i + 1) \in \phi_i$  和引理1可知

$$\bar{\mathbf{u}}_i(k_d^i + N | k_d^i + 1) = K_i \bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N | k_d^i + 1) \in U_i.$$

当  $k = k_d^i + 2$  时,

$$\bar{\mathbf{u}}_i(k_d^i + l + 2 | k_d^i + 2) = \bar{\mathbf{u}}_i(k_d^i + l + 2 | k_d^i + 1) \in U_i,$$

$l=0, \dots, N-2$ .

因为  $\bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N + 1 | k_d^i + 2) \in \phi_i$ , 所以

$$\bar{\mathbf{u}}_i(k_d^i + N + 1 | k_d^i + 2) = K_i \bar{\mathbf{x}}_i(k_d^i + N + 1 | k_d^i + 2) \in U_i.$$

依此类推, 当  $k \in (k_d^i, k_{d+1}^i]$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_i(k+l|k) \in U_i$ .

4)  $\bar{J}_i^E(k) \leq \varphi_i(k)$ .

当  $k = k_d^i + 1$  时, 由式(19)可知

$$\begin{aligned} \bar{J}_i^E(k_d^i + 1) &\leq J_i^{E*}(k_d^i) - \|\mathbf{x}_i(k_d^i)\|_{Q_i}^2 - \\ &\|\mathbf{u}_i^*(k_d^i | k_d^i)\|_{R_i}^2 + \Theta_i(\bar{w}_i) \triangleq \\ &\varphi_i(k_d^i + 1). \end{aligned}$$

当  $k = k_d^i + 2$  时,

$$\begin{aligned} \bar{J}_i^E(k_d^i + 2) &\leq \bar{J}_i^E(k_d^i + 1) - \|\mathbf{x}_i(k_d^i + 1)\|_{Q_i}^2 - \\ &\|\mathbf{u}_i^*(k_d^i + 1 | k_d^i)\|_{R_i}^2 + \Theta_i(\bar{w}_i) \triangleq \\ &\varphi_i(k_d^i + 2). \end{aligned}$$

依此类推, 当  $k \in (k_d^i, k_{d+1}^i]$ ,  $\bar{J}_i^E(k) \leq \varphi_i(k)$ .

### 3.4 稳定性(Stability)

本节对算法1的闭环稳定性进行分析, 给出稳定性的主要结果.

**定义 1**<sup>[23]</sup> 如果函数  $V(k)$  满足如下条件:

1)  $\alpha_1(\mathbf{x}(k)) \leq V(k) \leq \alpha_2(\mathbf{x}(k)), \forall \mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ , 其中  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  为  $K_\infty$  函数;

2)  $V(k+1) - V(k) \leq -\alpha_3(\mathbf{x}(k)) + \sigma(\|\mathbf{w}(k)\|)$ ,  $\forall \mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ , 其中:  $\alpha_3$ 为 $K_\infty$ 函数,  $\sigma$ 为 $K$ 函数.

则 $V(k)$ 为ISS-Lyapunov函数.

**引理 3**<sup>[23]</sup> 如果系统存在ISS-Lyapunov函数, 则系统是ISS.

**定理 2** 对于子系统 $S_i$ , 在算法1的作用下, 如果扰动的上界满足

$$\bar{w}_i \leq \min\left\{\sqrt{\frac{\Pi_i \eta_i \varepsilon_i}{\Xi_i}}, \sqrt{\frac{\varepsilon_i - \gamma_i + \bar{\lambda}(P_i) \bar{x}_i^2}{\bar{\lambda}(P_i)} - \bar{x}_i}\right\}, \quad (31)$$

其中:  $0 < \eta_i < 1$ ,  $\Pi_i = \frac{\lambda(\bar{Q}_i)}{\lambda(P_i)} - \frac{\mu_i}{\lambda(P_i)}$ ,  $\Xi_i = \bar{\lambda}(P_i) + \frac{\|(A_i + B_i K_i)^T P_i\|^2}{\mu_i}$ ,  $\Xi_i$ 中的常数 $\mu_i$ 满足

$$\max\left\{0, \frac{(\lambda(\bar{Q}_i) - \bar{\lambda}(P_i)) \lambda(P_i)}{\bar{\lambda}(P_i)}\right\} < \mu_i < \frac{\lambda(\bar{Q}_i) \lambda(P_i)}{\bar{\lambda}(P_i)}, \quad (32)$$

则子系统 $S_i$ 首先进入不变集 $\phi_i$ , 然后在有限时间内收敛至扰动不变集 $\psi_i = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i} : V_i(\mathbf{x}_i) \leq \eta_i \varepsilon_i\}$ .

**证** 首先通过证明 $J_i^E(k)$ 为ISS-Lyapunov函数来说明子系统 $S_i$ 是ISS. 对于 $\forall \mathbf{x}_i(k) \in X_i$ , 有

$$J_i^E(k) \geq \|\mathbf{x}_i(k)\|_{Q_i}^2 \geq \lambda(Q_i) \|\mathbf{x}_i(k)\|^2 = \alpha_1(\mathbf{x}_i(k)). \quad (33)$$

定义 $J_i^E(k, N) \triangleq J_i^E(k)$ , 则

$$J_i^E(k, N+1) = J_i^E(k, N) - \|\mathbf{x}_i(k+N|k)\|_{P_i}^2 + \|\mathbf{x}_i(k+N|k)\|_{Q_i}^2 + \|(A_i + B_i K_i) \mathbf{x}_i(k+N|k)\|_{P_i}^2. \quad (34)$$

根据引理1, 对于 $\forall \mathbf{x}_i(k) \in \phi_i$ , 有

$$J_i^E(k, N+1) \leq J_i^E(k, N) \leq \dots \leq J_i^E(k, 0) = \|\mathbf{x}_i(k)\|_{P_i}^2 \leq \bar{\lambda}(P_i) \|\mathbf{x}_i(k)\|^2 = \alpha_2(\mathbf{x}_i(k)). \quad (35)$$

如果子系统 $S_i$ 不满足事件触发条件, 则由式(19)可得

$$\bar{J}_i^E(k) - \bar{J}_i^E(k-1) \leq -\alpha_3(\mathbf{x}_i(k-1)) + \sigma(\|\mathbf{w}_i(k-1)\|), \quad (36)$$

其中:  $\alpha_3(\mathbf{x}_i(k-1)) = \lambda(Q_i) \|\mathbf{x}_i(k-1)\|^2$ ,  $\sigma(\|\mathbf{w}_i(k-1)\|) = \Theta_i(\bar{w}_i)$ . 如果子系统 $S_i$ 满足事件触发条件, 则在约束条件(11)的作用下:

$$J_i^{E*}(k_d^i) - \bar{J}_i^E(k_d^i - 1) \leq -\alpha_3(\mathbf{x}_i(k_d^i - 1)) + \sigma(\|\mathbf{w}_i(k_d^i - 1)\|), \quad (37)$$

其中:  $\alpha_3(\mathbf{x}_i(k_d^i - 1)) = \lambda(Q_i) \|\mathbf{x}_i(k_d^i - 1)\|^2$ ,  $\sigma(\|\mathbf{w}_i$

$(k_d^i - 1)\|) = \Theta_i(\bar{w}_i)$ . 因此,  $J_i^E(k)$ 为ISS-Lyapunov函数. 所以, 子系统 $S_i$ 是ISS并将收敛至不变集 $\phi_i$ .

下面对子系统 $S_i$ 进入不变集 $\phi_i$ 内部, 在状态反馈控制律 $K_i$ 作用下的稳定性进行分析. 设在 $k_0$ 时刻,  $\mathbf{x}_i(k_0) \in \phi_i$ . 因此, 当 $k \geq k_0$ 时,  $\mathbf{u}_i(k) = K_i \mathbf{x}_i(k)$ . 选取Lyapunov函数 $V_i(k) = \|\mathbf{x}_i(k)\|_{P_i}^2$ , 根据引理1可得

$$\begin{aligned} \Delta V_i(k) &= V_i(k+1) - V_i(k) \leq \\ & -\|\mathbf{x}_i(k)\|_{Q_i}^2 + \|\mathbf{w}_i(k)\|_{P_i}^2 + \\ & 2\mathbf{x}_i^T(k)(A_i + B_i K_i)^T P_i \mathbf{w}_i(k) \leq \\ & -\frac{\lambda(\bar{Q}_i)}{\lambda(P_i)} \|\mathbf{x}_i(k)\|_{P_i}^2 + \bar{\lambda}(P_i) \bar{w}_i^2 + \\ & \frac{\mu_i}{\lambda(P_i)} \|\mathbf{x}_i(k)\|_{P_i}^2 + \frac{\|(A_i + B_i K_i)^T P_i\|^2}{\mu_i} \bar{w}_i^2 = \\ & -\Pi_i \|\mathbf{x}_i(k)\|_{P_i}^2 + \Xi_i \bar{w}_i^2. \end{aligned} \quad (38)$$

根据式(31)进一步可得

$$\Delta V_i(k) \leq \Pi_i (-\|\mathbf{x}_i(k)\|_{P_i}^2 + \eta_i \varepsilon_i). \quad (39)$$

假设不存在 $k \geq k_0$ , 使得 $\mathbf{x}_i(k) \in \psi_i$ , 即对于所有 $k \geq k_0$ , 存在常数 $\delta_i > 0$ , 使得

$$\|\mathbf{x}_i(k)\|_{P_i}^2 \geq \eta_i \varepsilon_i + \delta_i. \quad (40)$$

将式(40)代入式(39)得

$$\Delta V_i(k) \leq -\Pi_i \delta_i, \quad (41)$$

所以

$$\begin{cases} V_i(k) - V_i(k-1) \leq -\Pi_i \delta_i, \\ V_i(k-1) - V_i(k-2) \leq -\Pi_i \delta_i, \\ \vdots \\ V_i(k_0+1) - V_i(k_0) \leq -\Pi_i \delta_i. \end{cases} \quad (42)$$

将式(42)中的各项相加:

$$V_i(k) \leq \varepsilon_i - (k - k_0) \Pi_i \delta_i. \quad (43)$$

取 $k' = \inf\{k \in \mathbb{Z} : k \geq k_0 + \frac{(1-\eta_i)\varepsilon_i}{\Pi_i \delta_i}\}$ , 则 $V_i(k') \leq \eta_i \varepsilon_i$ , 与式(40)矛盾. 因而当 $\mathbf{x}_i(k_0) \in \phi_i$ , 存在 $k' \geq k_0$ , 使得 $\mathbf{x}_i(k') \in \psi_i$ . 由式(32)可知 $0 < \Pi_i < 1$ , 因此有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_i(k'+1)\|_{P_i}^2 &\leq \\ \|\mathbf{x}_i(k')\|_{P_i}^2 + \Pi_i (-\|\mathbf{x}_i(k')\|_{P_i}^2 + \eta_i \varepsilon_i) &\leq \eta_i \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (44)$$

所以,  $\psi_i$ 为子系统 $S_i$ 的扰动不变集. 综上, 在算法1的作用下, 子系统 $S_i$ 首先进入不变集 $\phi_i$ , 接着在有限时间内收敛至扰动不变集 $\psi_i$ .

#### 4 仿真结果(Simulation results)

考虑如图2所示由3个子系统组成的车辆控制问题<sup>[14]</sup>, 其中车辆 $i(i = 1, 2, 3)$ 描述为

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i(k) + \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.05 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_i(k) + \mathbf{w}_i(k), \quad (45)$$

其中:  $\mathbf{x}_i = [x_{i1} \ x_{i2} \ x_{i3} \ x_{i4}]^T$ ,  $x_{i1}$ 和 $x_{i3}$ 分别为车辆*i*水平方向的位移 $s_i^x$ 和垂直方向的位移 $s_i^y$ ,  $x_{i2}$ 和 $x_{i4}$ 分别为车辆*i*水平方向的速度 $v_i^x$ 和垂直方向的速度 $v_i^y$ ;  $\mathbf{u}_i = [u_{i1} \ u_{i2}]^T$ ,  $u_{i1}$ 和 $u_{i2}$ 分别为作用于车辆*i*水平方向的作用力 $u_i^x$ 和垂直方向的作用力 $u_i^y$ .

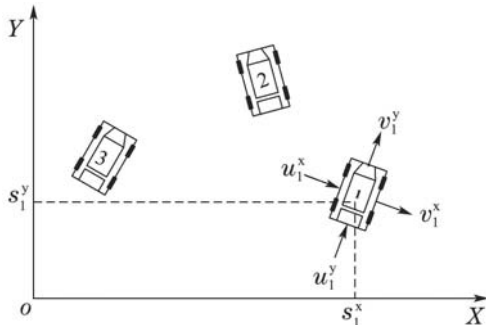


图2 车辆控制  
Fig. 2 Vehicle control

车辆*i*的约束和干扰分别为  $\|\mathbf{u}_i(k)\|_\infty \leq 0.15$ ,  $\|\mathbf{w}_i(k)\| \leq 0.0015$ . 3辆车的初始状态分别为  $\mathbf{x}_1(0) = [0.5 \ 0 \ -0.5 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{x}_2(0) = [0.5 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{x}_3(0) = [-0.5 \ 0 \ -0.5 \ 0]^T$ . 设计各参数如下:

$$\begin{aligned} N &= 8, \ \varepsilon_i = 1.8, \ \gamma_i = 1.37, \\ \sigma_i &= 0.99, \ \mathcal{N}_1 = \{2, 3\}, \ \mathcal{N}_2 = \{1, 3\}, \\ \mathcal{N}_3 &= \{1, 2\}, \ Q_i = I_{4 \times 4}, \ R_i = 3I_{2 \times 2}, \\ Q_{ij} &= [1, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 0]. \end{aligned}$$

根据Riccati方程解得终端加权矩阵和状态反馈控制律分别为

$$P_i = \begin{bmatrix} 12.1750 & 1.8028 & 0 & 0 \\ 1.8028 & 2.6047 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12.1750 & 1.8028 \\ 0 & 0 & 1.8028 & 2.6047 \end{bmatrix},$$

$$K_i = \begin{bmatrix} -0.4147 & -0.5049 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4147 & -0.5049 \end{bmatrix}.$$

图3给出了事件触发和时间触发下3辆车的位置变化, 从中可以看出事件触发下的系统性能与时间触发相比差别不大. 图4和图5分别给出了3辆车水平方向和垂直方向的速度变化曲线以及水平方向和垂直方向的作用力变化曲线, 从中可以看出3辆车的控制输入满足约束条件. 为了说明3辆车的收敛性, 图6给出了前8步 $V_i(\mathbf{x}_i)$ 的取值变化, 其中虚线为 $V_i(\mathbf{x}_i) = \varepsilon_i$ . 从图中可以看出, 第7步的 $V_i(\mathbf{x}_i) \leq \varepsilon_i$ , 说明3辆车在第7步进入不变集. 3辆车进入不变集之前的触发时刻

如图7所示, 其中数值为1代表触发, 数值为0代表未触发. 从图中可以看出, 3辆车在进入不变集之前非周期性地求解优化问题, 减少了计算能耗. 3辆车在第7步进入不变集后, 在状态反馈控制律下继续运行, 并且相互之间不再交互信息, 进一步节约通信资源.

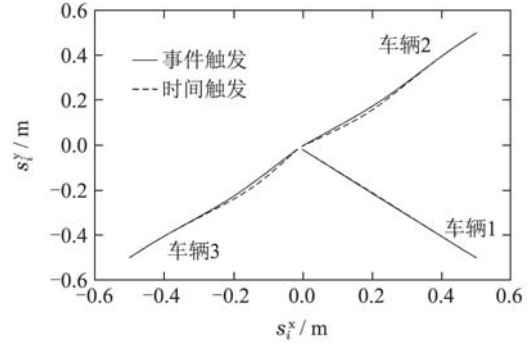


图3 事件触发和时间触发下3辆车的位置  
Fig. 3 Positions of three vehicles under event-triggered and time-triggered

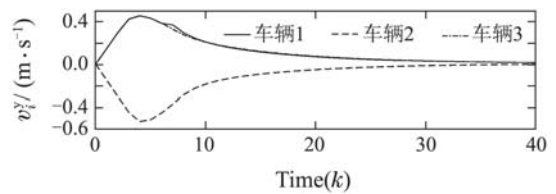
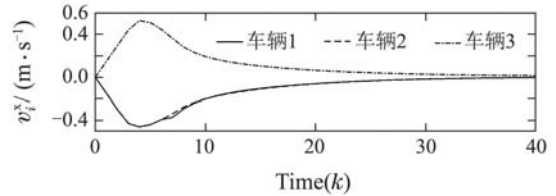


图4 3辆车水平方向和垂直方向的速度  
Fig. 4 Horizontal velocities and vertical velocities of three vehicles

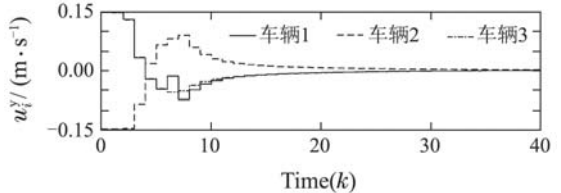
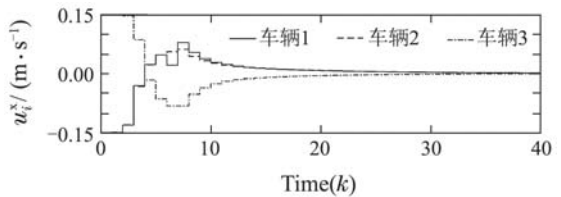
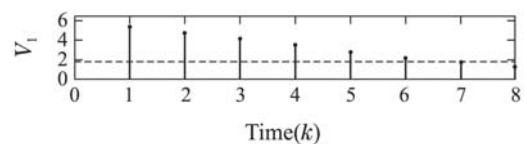


图5 3辆车水平方向和垂直方向的作用力  
Fig. 5 Horizontal forces and vertical forces of three vehicles



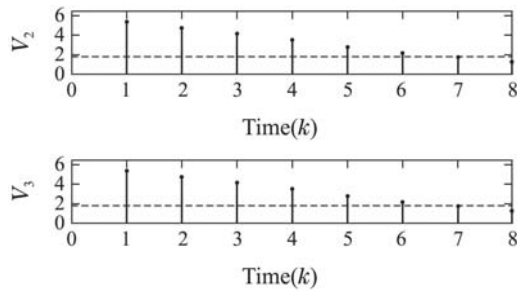
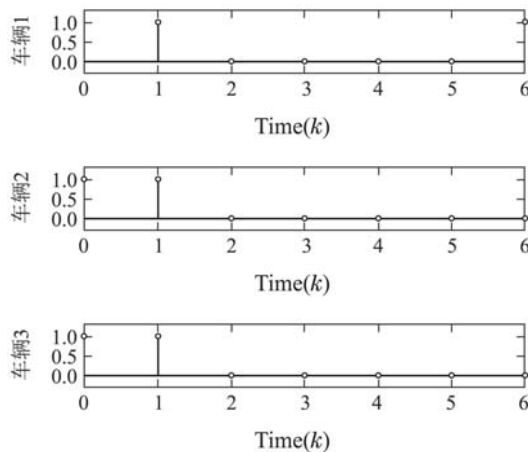
图6 前8步 $V_i(x_i)$ 的取值Fig. 6 The value of  $V_i(x_i)$  for the first 8 steps

图7 3辆车进入不变集之前的触发时刻

Fig. 7 Triggering instants of three vehicles before entering the invariant sets

## 5 结论(Conclusions)

本文针对有界扰动作用下的分布式大系统,提出了基于事件触发机制的双模分布式预测控制算法。该算法在保证ISS的前提下有效减少了优化问题的求解次数和关联信息的交互次数,降低了系统的计算能耗,节省了通信资源。

## 参考文献(References):

- NEGENBORN R R, MAESTRE J M. Distributed model predictive control: an overview and roadmap of future research opportunities [J]. *IEEE Control Systems*, 2014, 34(4): 87 – 97.
- SCATTOLINI R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control—a review [J]. *Journal of Process Control*, 2009, 19(5): 723 – 731.
- MAYNE D Q. Model predictive control: recent developments and future promise [J]. *Automatica*, 2014, 50(12): 2967 – 2986.
- HE D, WANG L, SUN J. On stability of multiobjective NMPC with objective prioritization [J]. *Automatica*, 2015, 57(7): 189 – 198.
- HE Defeng, DING Baocang, YU Shuyou. Review of fundamental properties and topics of model predictive control for nonlinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(3): 273 – 287. (何德峰, 丁宝苍, 于树友. 非线性系统模型预测控制若干基本特点与主题回顾 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(3): 273 – 287.)
- ZOU Y, LAM J, NIU Y, et al. Constrained predictive control synthesis for quantized systems with Markovian data loss [J]. *Automatica*, 2015, 55(5): 217 – 225.
- ZHENG Yi, LI Shaoyuan. Networked cooperative distributed model predictive control for dynamic coupling systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(11): 1778 – 1786. (郑毅, 李少远. 网络信息模式下分布式系统协调预测控制 [J]. 自动化学报, 2013, 39(11): 1778 – 1786.)
- DU Xiaoning, XI Yugeng, LI Shaoyuan. Distributed optimization algorithm for predictive control [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(5): 793 – 796. (杜晓宁, 席裕庚, 李少远. 分布式预测控制优化算法 [J]. 控制理论与应用, 2002, 19(5): 793 – 796.)
- LIU X, SHI Y, CONSTANTINESCU D. Distributed model predictive control of constrained weakly coupled nonlinear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2014, 74(12): 41 – 49.
- MAESTRE J M, DE LA PEÑA D M, CAMACHO E F, et al. Distributed model predictive control based on agent negotiation [J]. *Journal of Process Control*, 2011, 21(5): 685 – 697.
- DUNBAR W B, CAVENEY D S. Distributed receding horizon control of vehicle platoons: stability and string stability [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(3): 620 – 633.
- RICHARDS A, HOW J P. Robust distributed model predictive control [J]. *International Journal of Control*, 2007, 80(9): 1517 – 1531.
- DING B. Distributed robust MPC for constrained systems with polytopic description [J]. *Asian Journal of Control*, 2011, 13(1): 198 – 212.
- WANG C, ONG C J. Distributed model predictive control of dynamically decoupled systems with coupled cost [J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 2053 – 2058.
- LI H, SHI Y. Robust distributed model predictive control of constrained continuous-time nonlinear systems: a robustness constraint approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(6): 1673 – 1678.
- ÅSTRÖM K J, BERNHARDSSON B. Comparison of Riemann and Lebesgue sampling for first order stochastic systems [C] // *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, USA: IEEE, 2002, 2: 2011 – 2016.
- HU S, YUE D. Event-triggered control design of linear networked systems with quantizations [J]. *ISA Transactions*, 2012, 51(1): 153 – 162.
- SEYBOTH G S, DIMAROGONAS D V, Johansson K H. Event-based broadcasting for multi-agent average consensus [J]. *Automatica*, 2013, 49(1): 245 – 252.
- WANG X, LEMMON M D. Event-triggering in distributed networked control systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(3): 586 – 601.
- EQTAMI A, DIMAROGONAS D V, KYRIAKOPOULOS K J. Event-based model predictive control for the cooperation of distributed agents [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Montréal, Canada: IEEE, 2012: 6473 – 6478.
- HASHIMOTO K, ADACHI S, DIMAROGONAS D V. Distributed aperiodic model predictive control for multi-agent systems [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2015, 9(1): 10 – 20.
- CHEN H, ALLGOWER F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability [J]. *Automatica*, 1998, 34(10): 1205 – 1217.
- JIANG Z P, WANG Y. Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2001, 37(6): 857 – 869.

## 作者简介:

苏旭 (1993–), 男, 硕士研究生, 研究方向为分布式预测控制、事件触发控制, E-mail: suxustru@163.com;

邹媛媛 (1980–), 女, 副教授, 研究方向为预测控制、网络化控制、分布式控制系统, E-mail: yzou@ecust.edu.cn;

牛玉刚 (1964–), 男, 教授, 研究方向为非线性控制、随机控制系统、滑模控制、网络拥塞控制, E-mail: acniuyg@ecust.edu.cn;

贾廷纲 (1973–), 男, 教授级高级工程师, 研究方向为智能控制、网络化控制, E-mail: tgjia@163.com.