

输出约束条件下一类热传导方程的边界控制

张爽[†], 李滚

(电子科技大学 航空航天学院, 四川 成都 611731)

摘要: 约束问题普遍存在于物理系统中, 如何解决分布参数系统的约束问题还没有有效的方法. 本文以一类非齐次的热传导方程作为研究对象, 设计了一种新型的边界控制方法来稳定系统状态并解决热传导方程的约束问题. 为此首先简要地介绍了由偏微分方程和常微分方程共同描述的热传导方程. 然后, 在未知的分布式外界扰动的影响下, 设计一种新型的基于障碍-积分型李雅普诺夫函数的边界控制方法. 此方法是基于原始的分布参数系统模型, 没有任何的模型简化, 因此有效地避免了溢出不稳定问题. 本文采用李雅普诺夫方法证明系统稳定性并保证系统的边界输出约束在一定的范围内. 最后采用有限差分法进行仿真验证, 仿真结果进一步证明了所提出的边界控制方法的有效性.

关键词: 热传导方程; 偏微分方程; 边界控制; 输出约束; 分布参数控制系统

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Boundary control for an inhomogeneous heat equation with output constraint

ZHANG Shuang[†], LI Gun

(School of Aeronautics and Astronautics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan 611731, China)

Abstract: Constrained problems are commonly existed in the physical system. Unfortunately there is no effective way to solve the constrained problem for distributed parameter systems. In this paper, an inhomogeneous heat equation is studied and a novel boundary control is designed to stabilize the system states and solve the constrained problem for the heat equation. First, the heat equation described by partial differential equation (PDE)-ordinary differential equation (ODE) is briefly introduced. Then, under the effect of unknown distributed disturbance, a novel barrier-integral Lyapunov functional-based method is proposed. The designed method is based on the original distributed parameter system model without any model simplification to avoid the spillover instability problem. Third, Lyapunov's Direct Method is used to analyze the stability of the closed-loop system and to ensure that the boundary output of the heat equation remains in a constrained space. Finally, extensive simulations are given by using finite difference method. The simulation results further show the effectiveness of the proposed control method.

Key words: heat equation; partial differential equations; boundary control; output constraint; distributed parameter control systems

1 引言(Introduction)

热传导方程(热方程)^[1-3]是一种用来描述在给定区域内热量或温度如何随时间变化的偏微分方程, 是一个典型的分布参数系统, 系统的状态不仅与时间变量相关, 还与系统的空间坐标相关, 属于无穷维系统范畴, 其模型由代表动力学方程的偏微分方程(PDE)和代表边界条件的常微分方程(ODE)共同描述. 因此, 对热方程的控制问题本质上是基于复杂PDE动力学模型的分布参数系统的控制问题. 这对传统的针对集

中参数系统的控制方法提出了新的挑战. 因此, 对控制器的控制性能提出了较高的要求, 此类分布参数系统问题的研究也得到了国内外众多学者的广泛关注^[4-8].

对分布参数系统的控制策略总结起来可以分为: 基于有限维模型(ODE)的控制方法以及基于无穷维模型(PDE)的控制方法. 前者的控制方法是基于对近似的模型进行控制, 会导致溢出不稳定问题(spillover). 因此, 为了避免此类溢出效应, 近年来国内外专家提

收稿日期: 2016-02-04; 录用日期: 2016-05-13.

[†]通信作者. E-mail: zhangshuang.ac@gmail.com; Tel.: +86 28-87952296.

本文责任编辑: 姚鹏飞.

国家自然科学基金项目(61403063), 中央高校基本科研业务费项目(ZYGX2015J120)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61403063) and Fundamental Research Funds for the China Central Universities of UESTC(ZYGX2015J120).

出了基于无穷维模型的控制方法. 然而, 由于无穷维模型的数学模型较为复杂, 无法精确地获得其解析解, 特别是要考虑复杂外部扰动的影响, 因此基于无穷维模型的控制方法值得进一步研究和探索. 边界控制是一种有效的基于无穷维模型的控制方法^[9-12]. 边界控制需要较少的传感器和执行器安装在边界端点, 不会影响系统的动力学特性, 并且边界控制的设计是基于无穷维模型, 避免了溢出不稳定问题, 是一种经济且实效的控制方法. 因此, 边界控制在分布参数系统中得到越来越多的重视和应用. 文献[13]针对带有内流动态的柔性立管, 提出了一种鲁棒边界控制方法, 有效地抑制了柔性立管振动问题. 文献[14]针对海洋柔性立管系统进行了振动控制研究, 分别设计了横向和纵向边界控制器, 采用李雅普诺夫直接法证明了系统的稳定性. 文献[15]在考虑了采油船的动力学模型下, 设计了边界控制器以减小立管的振动, 并用仿真方法验证了其控制效果. 文献[16]在考虑未知海洋洋流的动态模型下, 针对海洋安装系统设计了协同的边界控制方法, 不仅有效地减小了安装绳索的振动并将负载精确地安装到指定位置. 文献[17]针对二连杆的柔性机械臂设计了一种新型的非线性观测器估计连杆的位置和角度, 并提出了基于PDE模型的边界控制器达到轨迹跟踪的目的.

约束问题普遍存在于物理系统中, 例如物理饱和, 电机的死区, 性能以及安全规范等. 在工业实际操作过程中, 若某一物理量超出了约束范围将会造成系统性能下降, 甚至整个系统失效, 例如温度过高, 电流过大等将导致短路以及机器损坏等. 近年来, 障碍李雅普诺夫函数^[18-19]是一种新颖的有效地解决约束问题的方法. 文献[18]针对一类单输入单输出的非线性系统提出了基于障碍李雅普诺夫函数的控制方法, 分析系统闭环稳定性, 有效地解决了单输入单输出的非线性系统的输出约束问题. 在文献[18]的研究基础上, 文献[20]采用了时变的障碍李雅普诺夫函数, 进一步解决了输出约束为时变情况下的非线性系统的约束问题. 然而, 以上文献均基于有限维系统进行研究的, 目前针对无穷维系统的约束问题, 还暂未见文献报道. 因此, 无论从实际需求角度还是从理论研究方面, 设计一种有效的控制策略解决无穷维系统的约束问题是亟待解决的科学问题之一.

本文针对非齐次的热方程为研究对象, 拟采用基于PDE模型的边界控制方法, 此方法不仅避免了因模型简化所产生的溢出不稳定的问题, 并且仅需要较少的执行器和传感器, 节约成本, 易于实现, 并且控制算法中不需要外界扰动的精确模型, 提高系统性能. 针对约束问题, 设计一种有效的主动控制方法, 以确保约束问题, 稳定性问题以及控制性能问题都能得到满足. 本文的余下部分结构如下, 第2部分介绍了热方程

的动态方程以及一些基本引理, 定义和假设; 第3部分提出边界控制策略并采用李雅普诺夫方法证明其闭环稳定性; 第4部分对所设计的边界控制算法进行了数值模拟, 验证了所提出的边界控制的有效性; 第5部分则对本文的内容进行了总结.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下非齐次的热传导方程:

$$\dot{T}(x, t) = \varepsilon T''(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

$\forall x \in (0, L)$, 以及如下边界条件:

$$T'(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$T'(L, t) = u(t), \quad (3)$$

其中: $T(x, t)$ 为系统的状态变量, x 和 t 分别为独立的空间和时间变量, $f(x, t)$ 为未知的分布式外部扰动, $u(t)$ 为在 $x = L$ 处的边界控制输入.

注 1 考虑了未知的分布式外部扰动 $f(x, t)$ 的影响后, 系统动力学模型描述为非齐次的偏微分方程(1). 因此很多基于齐次的偏微分方程的控制方法不能适用. 本文中所设计的控制器是基于原始的无穷维模型, 能够有效地避免溢出不稳定的问题.

为了后续的稳定性的分析, 介绍以下引理, 定义和假设.

引理 1^[21] $u_1(x, t), u_2(x, t) \in \mathbb{R}$ 为定义在 $x \in [0, L]$ 以及 $t \in [0, \infty)$ 的函数, 则有如下不等式成立:

$$|\phi_1(x, t)\phi_2(x, t)| \leq \frac{1}{\delta}\phi_1^2(x, t) + \delta\phi_2^2(x, t), \quad (4)$$

$\forall \delta > 0$.

定义 1 考虑如下系统:

$$\dot{x} = f(x), \quad (5)$$

若一个标量函数 $V(x)$ 在一个包含原点的开集 \mathcal{D} 内是连续的, 正定的且具有连续的一阶偏导数, 当 x 趋近于 \mathcal{D} 的边界时, 有 $V(x) \rightarrow \infty$, 并且沿着系统 $\dot{x} = f(x)$, $x(0) \in \mathcal{D}$ 的解满足 $V(x(t)) \leq b, \forall t \geq 0$, 其中 $b > 0$ 为一常数, 那么称函数 $V(x)$ 为障碍李雅普诺夫函数(barrier Lyapunov function).

定义 2 如果函数 f 在 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是Lebesgue可测的, 则有如下定义:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad p < \infty. \quad (6)$$

引理 2^[22] 若 $u(x, t) \in \mathbb{R}$ 为定义在 $x \in [0, L]$ 以及 $t \in [0, \infty)$ 的连续的, 有连续的一阶偏导数的函数, 并且满足以下边界条件:

$$u(0, t) = 0, \quad (7)$$

则有如下不等式成立:

$$\|u(x, t)\|_2^2 \leq L^2 \|u'(x, t)\|_2^2, \quad x \in [0, L]. \quad (8)$$

引理 3^[19-20] 对于任意的 $|\xi| < 1$ 以及任意的正整数 p , 有如下不等式成立:

$$0 \leq \ln \frac{1}{1 - \xi^{2p}} \leq \frac{\xi^{2p}}{1 - \xi^{2p}}. \quad (9)$$

假设 1 针对未知的分布式外部扰动 $f(x, t)$, 假设存在常数 $F \in \mathbb{R}^+$, 使得 $|f(x, t)| \leq F, \forall x \in [0, L]$. 本文所设计的控制器不需知道分布式外部扰动及其上界的精确信息.

注 2 为了清楚起见, 本文将使用以下符号:

$$(\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}, (\dot{\cdot}) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}.$$

3 控制器设计与稳定性分析(Control design and stability analysis)

本章节将设计一种新型的控制器稳定系统的状态, 并且使得系统的边界输出值控制在一定范围内, 即 $|T(L, t)| < A$, 其中 $A > 0$ 为一个常数. 所设计的控制器能够防止因温度过激而导致的不良后果. 本节中将采用李雅普诺夫直接法在边界构造一个基于障碍-积分型李雅普诺夫函数的边界控制算法, 对热方程进行控制, 所设计的控制算法具有很好的鲁棒性, 从而能很好的补偿热方程的外部扰动的不确定性.

考虑如下障碍-积分型李雅普诺夫函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} \|T(x, t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \ln \frac{A^2}{A^2 - [T(L, t)]^2}. \quad (10)$$

从式(9)可得

$$0 \leq \ln \frac{A^2}{A^2 - [T(L, t)]^2} \leq \frac{[T(L, t)]^2}{A^2 - [T(L, t)]^2}. \quad (11)$$

进而可得李雅普诺夫函数 $V(t)$ 具有上下界如下:

$$0 \leq \frac{1}{2} \|T(x, t)\|_2^2 \leq V(t) \leq \frac{1}{2} \|T(x, t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{[T(L, t)]^2}{A^2 - [T(L, t)]^2}. \quad (12)$$

将李雅普诺夫函数 $V(t)$ 对时间求导数可得

$$\dot{V}(t) = \int_0^L T(x, t) \dot{T}(x, t) dx + \frac{T(L, t) \dot{T}(L, t)}{A^2 - [T(L, t)]^2}. \quad (13)$$

将式(1)代入上式得到

$$\dot{V}(t) = \int_0^L T(x, t) [\varepsilon T''(x, t) + f(x, t)] dx + \frac{T(L, t) \dot{T}(L, t)}{A^2 - [T(L, t)]^2}. \quad (14)$$

对上式采用分部积分并带入边界条件(2)和(3), 进一步可得

$$\dot{V}(t) = T(L, t)u(t) + \int_0^L T(x, t)f(x, t)dx - \varepsilon \|T'(x, t)\|_2^2 + \frac{T(L, t) \dot{T}(L, t)}{A^2 - [T(L, t)]^2}. \quad (15)$$

从不等式(4)可以得到

$$\int_0^L T(x, t)f(x, t)dx \leq \phi \|T(x, t)\|_2^2 + \frac{1}{\phi} \|f(x, t)\|_2^2, \quad (16)$$

其中 $\phi > 0$ 为常数.

此外, 从式(8)可得

$$-\|T'(x, t)\|_2^2 \leq -\frac{1}{L^2} \|T(x, t)\|_2^2. \quad (17)$$

结合以上两个不等式, 可以得知

$$\dot{V}(t) \leq T(L, t)(u(t) + \frac{\dot{T}(L, t)}{A^2 - [T(L, t)]^2}) - (\frac{\varepsilon}{L^2} - \phi) \|T(x, t)\|_2^2 + \frac{1}{\phi} \|f(x, t)\|_2^2. \quad (18)$$

为使该系统稳定, 设计以下边界控制

$$u(t) = -\frac{\dot{T}(L, t)}{A^2 - [T(L, t)]^2} - k \frac{T(L, t)}{A^2 - [T(L, t)]^2}, \quad (19)$$

其中 $k > 0$ 为控制增益.

注 3 控制输入式(19)中所有信号均来自边界信息, 可由传感器测得. 所设计的控制器不需知道分布式外部扰动的精确模型, 因此对外部扰动的变化具有稳定鲁棒性.

定义 $\epsilon = \frac{\varepsilon}{L^2} - \phi > 0$, 则 $\dot{V}(t)$ 有上界

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\epsilon \|T(x, t)\|_2^2 - k \frac{[T(L, t)]^2}{A^2 - [T(L, t)]^2} + \\ & \frac{1}{\phi} \|f(x, t)\|_2^2 \leq \\ & -2 \min(\epsilon, k) (\frac{1}{2} \|T(x, t)\|_2^2 + \\ & \frac{1}{2} \frac{[T(L, t)]^2}{A^2 - [T(L, t)]^2}) + \zeta \leq \\ & -\lambda V(t) + \zeta, \end{aligned} \quad (20)$$

其中: $\lambda = 2 \min(\epsilon, k), \zeta = \frac{1}{\phi} \|f(x, t)\|_2^2 \leq \frac{LF}{\phi}$.

基于以上的研究结果, 可以得到以下定理:

定理 1 针对式(1)-(3)所描述的热方程系统, 在假设1条件下, 以及边界控制器式(19)作用下, 可以得到以下结论:

- i) 闭环热方程的系统状态 $T(x, t)$ 是一致有界稳定的;
- ii) 当初始边界条件满足 $|T(L, 0)| < A$ 时, 系统的输出值 $T(L, t)$ 被有效的控制在约束范围内, 即 $|T(L, t)| < A$.

证 对不等式(20)两边均乘以 $e^{\lambda t}$, 可得

$$\frac{\partial}{\partial t} (Ve^{\lambda t}) \leq \zeta e^{\lambda t}. \quad (21)$$

对上式不等式进行积分有如下结果:

$$V(t) \leq (V(0) - \frac{\zeta}{\lambda})e^{-\lambda t} + \frac{\zeta}{\lambda} \leq V(0)e^{-\lambda t} + \frac{\zeta}{\lambda} \in \mathcal{L}_\infty. \quad (22)$$

上式(22)表明李雅普诺夫函数 $V(t)$ 是有界的.

从李雅普诺夫函数 $V(t)$ 定义式(10)可得

$$\|T(x, t)\|_2^2 \leq 2V(t) \leq 2V(0)e^{-\lambda t} + \frac{2\zeta}{\lambda}. \quad (23)$$

进一步可得

$$\|T(x, t)\|_2 \leq \sqrt{2V(0)e^{-\lambda t} + \frac{2\zeta}{\lambda}}, \quad (24)$$

$\forall x \in [0, L]$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(x, t)\|_2 = \sqrt{\frac{2\zeta}{\lambda}}. \quad (25)$$

式(22)表明李雅普诺夫函数 $V(t)$ 是有界的. 从李雅普诺夫函数 $V(t)$ 定义式(10)可得知, $\|T(x, t)\|_2^2$ 和 $\ln \frac{A^2}{A^2 - [T(L, t)]^2}$ 均为非负函数. 那么, 可以推断 $\ln \frac{A^2}{A^2 - [T(L, t)]^2}$ 是有界的. 然而, 当 $|T(L, t)| \rightarrow A$ 时, $\ln \frac{A^2}{A^2 - [T(L, t)]^2} \rightarrow \infty$. 因此, 可以得知 $|T(L, t)| \neq A$. 所以, 得出结论: 当初始条件 $|T(L, 0)| < A$ 时, 输出值 $T(L, t)$ 也满足 $|T(L, t)| < A$, 即系统的输出值 $T(L, t)$ 被有效的控制在约束范围 A 内.

4 数值仿真(Numerical simulations)

本章节针对具有分布式扰动热方程进行数值仿真以验证所设计的控制器的有效性. 为了获取系统响应的真实值, 本文采用有限差分法来求解热方程, 获得的数值解用来近似系统的真实解.

考虑热方程动力学模型(1)–(3), 其参数为 $\varepsilon = 0.01$, $L = 1$. 分布式扰动 $f(x, t)$ 由下式描述:

$$f(x, t) = [\sin(xt) + \sin(2xt)]x. \quad (26)$$

初始条件为 $T(x, 0) = -0.5 \sin(\pi x)$, 边界约束条件为 $A = 1$.

仿真结果分为以下两个部分进行讨论:

1) 无控制作用, 即 $u(t) = 0$ 时: 图1为系统不加控制时系统的状态量, 从图1可以看出当系统没有控制作用时, 在外部扰动的作用下, 系统的状态有很明显的震荡.

2) 有控制作用(19)时: 图2为系统有控制作用时系统状态的仿真结果, 具体的控制器参数为 $k = 800$. 如图2所示, 所设计的边界控制对系统状态的震荡有非常显著的抑制效果. 此外还可以看出, 系统的输出

被有效的控制在约束范围内.

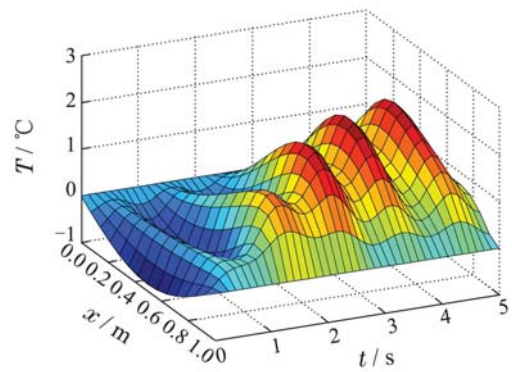


图 1 不加控制时 $T(x, t)$ 随时间变量和空间变量的变换规律
Fig. 1 Temperature variation $T(x, t)$ versus time and space, without control input

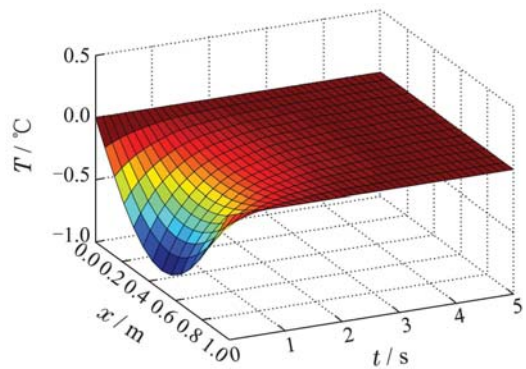


图 2 加控制时 $T(x, t)$ 随时间变量和空间变量的变换规律
Fig. 2 Temperature variation $T(x, t)$ versus time and space, with the designed control

为了更清楚地展示仿真结果, 本文还对系统状态随时间变化规律进行了仿真实验, 结果如图3–5所示, 空间位置取值分别为 $x = 0.2L$, $x = 0.5L$ 以及 $x = 0.67L$.

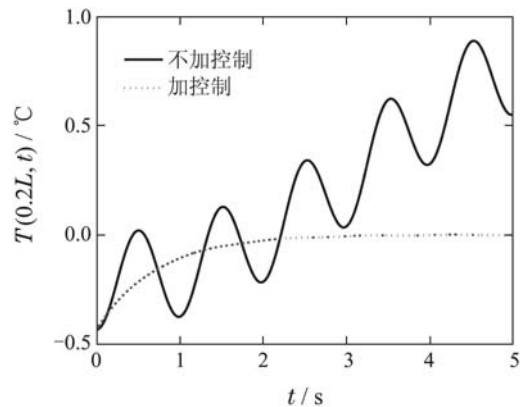


图 3 $T(x, t)$ 在 $x = 0.2L$ 处随时间变量的变换规律
Fig. 3 Temperature variation $T(x, t)$ at $x = 0.2L$

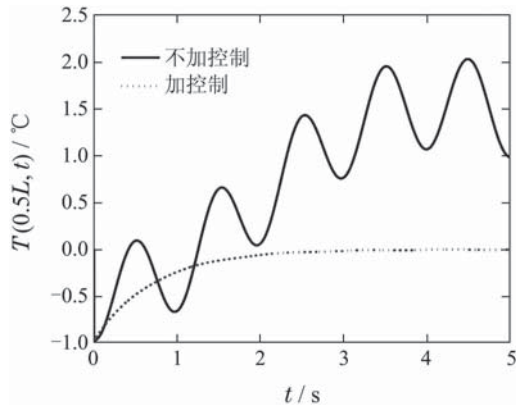


图4 $T(x, t)$ 在 $x = 0.5L$ 处随时间变量的变换规律
Fig. 4 Temperature variation $T(x, t)$ at $x = 0.5L$

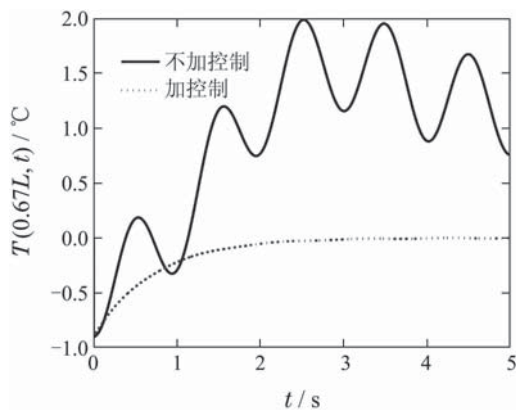


图5 $T(x, t)$ 在 $x = 0.67L$ 处随时间变量的变换规律
Fig. 5 Temperature variation $T(x, t)$ at $x = 0.67L$

从图3-5可以看出,尽管控制器设计在边界位置上($x=L$ 处),但在 $x=0.2L$, $x=0.5L$ 以及 $x=0.67L$ 处,系统状态的震荡也有十分明显的减小,表现出了边界控制方法在分布参数系统的独特优势.此外,为了展示系统状态随空间位置的变化规律,时间 t 分别取 $t=1\text{ s}$, $t=2\text{ s}$ 以及 $t=3\text{ s}$ 进行比较,仿真结果如图6-8所示.从图6-8可以看出,系统的状态在控制作用下3 s的时间内即收敛到了0.

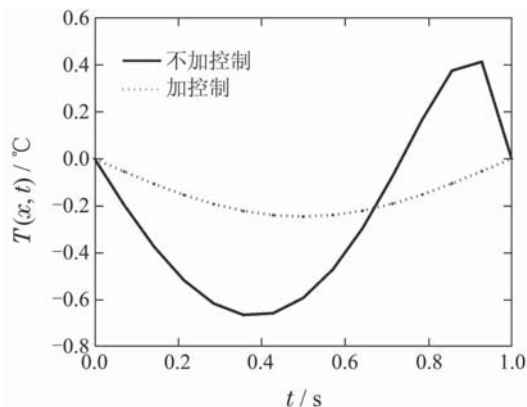


图6 $T(x, t)$ 在 $t = 1\text{ s}$ 处随空间变量的变换规律
Fig. 6 Temperature variation $T(x, t)$ at $t = 1\text{ s}$

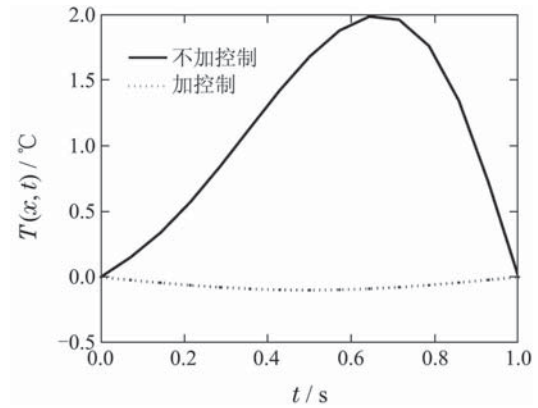


图7 $T(x, t)$ 在 $t = 2\text{ s}$ 处随空间变量的变换规律
Fig. 7 Temperature variation $T(x, t)$ at $t = 2\text{ s}$

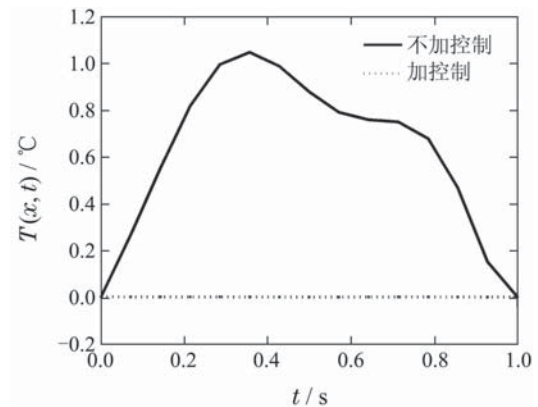


图8 $T(x, t)$ 在 $t = 3\text{ s}$ 处随空间变量的变换规律
Fig. 8 Temperature variation $T(x, t)$ at $t = 3\text{ s}$

以上仿真结果表明尽管有外界扰动的存在,本文所设计的控制算法对稳定热方程是有效的.

5 结论(Conclusions)

本文研究了具有未知的分布式扰动的一类非齐次的偏微分方程的主动控制问题.基于无穷维分布参数系统模型,构造了一种新型的基于障碍-积分型李雅普诺夫函数的边界控制策略.所设计的边界控制器不仅避免了控制溢出效应,还有效地解决了边界约束问题.采用了李雅普诺夫直接法证明了控制系统的稳定性.最后,对所设计的边界控制算法进行了数值模拟,验证了其有效性.

参考文献(References):

- [1] HUANG D, XU J X, LI X, et al. D-type anticipatory iterative learning control for a class of inhomogeneous heat equations [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2397 - 2408.
- [2] WANG J M, LIU J J, REN B, et al. Sliding mode control to stabilization of cascaded heat PDE-ODE systems subject to boundary control matched disturbance [J]. *Automatica*, 2015, 52: 23 - 34.
- [3] WANG J M, REN B, KRSTIC M. Stabilization and Gevrey regularity of a Schrödinger equation in boundary feedback with a heat equation [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 179 - 185.
- [4] LI Xiaoguang, LIU Jinkun. Continuum backstepping control algorithms in partial differential equation orientation: a review [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(7): 825 - 832.

- (李晓光, 刘金琨. 面向偏微分方程的连续反演控制算法综述, 控制理论与应用 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(7): 825 – 832.)
- [5] HUA Chen, LI Ning, LI Shaoyuan. Time-space ARX modeling and predictive control for distributed parameter system [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(12): 1711 – 1716.
(华晨, 李柠, 李少远. 分布参数系统的时空ARX建模及预测控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(12): 1711 – 1716.)
- [6] HUANG D, XU J X. Steady-state iterative learning control for a class of nonlinear PDE processes [J]. *Journal of Process Control*, 2011, 21(8): 1155 – 1163.
- [7] TIAN Senping, WU Xinsheng. Iterative learning control of distributed parameter systems based on geometric analysis [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1082 – 1085.
(田森平, 吴忻生. 基于几何分析的分布参数系统的迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(8): 1082 – 1085.)
- [8] WU H, WANG J W, LI H X. Design of distributed H_∞ fuzzy controllers with constraint for nonlinear hyperbolic PDE systems [J]. *Automatica*, 2012, 48(10): 2535 – 2543.
- [9] NGUYEN Q C, HONG K S. Adaptive boundary control for flexible two-link manipulator based on partial differential equation dynamic model [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, 20(4): 1124 – 1131.
- [10] WU Yilin, LIU Yu, WU Xinsheng. Adaptive boundary control of a flexible riser coupled with time-varying internal fluid [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(5): 618 – 624.
(郭依林, 刘屿, 吴忻生. 基于时变内流的柔性立管自适应边界控制 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(5): 618 – 624.)
- [11] ZHANG L, LIU J. Adaptive boundary control for flexible two-link manipulator based on partial differential equation dynamic model [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7(1): 43 – 51.
- [12] HE W, GE S S. Robust adaptive boundary control of a vibrating string under unknown time-varying disturbance [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, 20(1): 48 – 58.
- [13] GAO Hongxia, ZHAO Zhijia, WU Xinsheng, et al. Robust boundary control for flexible fluid-transporting marine riser based on internal fluid dynamics [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(6): 785 – 791.
(高红霞, 赵志甲, 吴忻生, 等. 基于内流动力学的海洋输油柔性立管鲁棒边界控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(6): 785 – 791.)
- [14] GE S S, HE W, HOW B V E, et al. Boundary control of a coupled nonlinear flexible marine riser [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, 18(5): 1080 – 1091.
- [15] HE W, GE S S, HOW B V E, et al. Robust adaptive boundary control of a flexible marine riser with vessel dynamics [J]. *Automatica*, 2011, 47(4): 722 – 732.
- [16] HE W, ZHANG S, GE S S. Boundary control of a flexible riser with application to marine installation [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013, 60(12): 5802 – 5810.
- [17] ZHANG L, LIU J. Observer-based partial differential equation boundary control for a flexible two-link manipulator in task space [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2012, 6(13): 2120 – 2133.
- [18] TEE K P, GE S S, TAY E H. Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(4): 918 – 927.
- [19] REN B, GE S S, TEE K P, et al. Adaptive neural control for output feedback nonlinear systems using a barrier Lyapunov function [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(8): 1339 – 1345.
- [20] TEE K P, REN B, GE S S. Control of nonlinear systems with time-varying output constraints [J]. *Automatica*, 2011, 47(11): 2511 – 2516.
- [21] RARN, C D. *Mechatronic Control of Distributed Noise and Vibration* [M]. New York, USA: Springer, 2001.
- [22] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, POLYA G. *Inequalities* [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1959.

作者简介:

张爽 (1984–), 女, 讲师, 主要研究方向为分布参数控制系统、非线性控制, E-mail: zhangshuang.ac@gmail.com;

李滚 (1976–), 男, 副教授, 主要研究方向为分布参数系统、导航制导与控制, E-mail: ligun@uestc.edu.cn.