

执行机构部分失效的挠性航天器多界依赖容错控制

李涛^{1,2†}, 张斌², 乔建忠³

(1. 大气环境与装备技术江苏省高校协同创新中心, 江苏 南京 210044;

2. 南京信息工程大学 信息与控制学院, 江苏 南京 210044;

3. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘要: 针对挠性航天器在轨运行时受到的外部干扰, 输入时滞以及执行机构部分失效问题, 本文提出了一种基于不确定参数的鲁棒 H_∞ 容错控制方法. 首先, 将执行机构部分失效容错控制问题转化为不确定参数的鲁棒控制问题. 然后, 设计了一个新型的多界依赖状态反馈鲁棒 H_∞ 控制算法. 此算法不仅依赖时滞积分不等式分割参数和时滞界信息, 还依赖部分失效因子. 因此, 本文设计的控制器能同时实现对输入时滞的敏感, 对部分失效故障的容错及对外部干扰的抑制. 最后, 通过一系列的仿真验证本文方法的有效性.

关键词: 容错控制; 挠性航天器; 输入时滞; 执行器部分故障

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Multi-bound-dependent fault-tolerant control for flexible spacecraft under partial loss of actuator effectiveness

LI Tao^{1,2†}, ZHANG Bin², QIAO Jian-zhong³

(1. Collaborative Innovation Center of Atmospheric Environment and Equipment Technology, Nanjing Jiangsu 210044, China;

2. School of Information and Control, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210044, China;

3. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: A fault tolerant control based on robust H_∞ control with uncertain parameters is proposed for an on-orbiting flexible spacecraft in the presence of partial loss of actuator effectiveness, external disturbance and input delays. Firstly, the fault tolerant control with loss of actuator effectiveness is transformed into robust control with uncertain parameters. Secondly, a new multi-bound-dependent robust state feedback H_∞ control algorithm is designed. This algorithm is not only dependent on the decomposition coefficient of the time delay integral inequality and time delay bounds, but also depends on the partial failure factor. Therefore, the controller designed in this paper can be sensitive to the input delays, be tolerant to actuator partial failure and be rejective to external disturbance. Finally, the effectiveness of the proposed design method is demonstrated in a spacecraft attitude control system subject to loss of actuator effectiveness.

Key words: fault-tolerant control; flexible spacecraft; input delays; partial loss of actuator effectiveness

1 引言(Introduction)

随着航天事业的不断发展, 现代航天器对控制系统的可靠性和安全性提出了更高的要求, 而系统的可靠性在很大程度上取决于航天器执行机构和传感器的运行状况^[1]. 由于航天器长期工作在真空、失重、高低温和强辐射的恶劣环境下以及长时间的工作都将引起系统部分零件的老化, 导致航天器执行机构或传感器产生故障, 从而影响航天器姿态控制的精度甚至影响整个控制系统的稳定性和可靠性, 因此, 实现对

这些故障的容错控制显得尤为重要^[2-3].

目前, 容错控制方法一般分为被动容错控制和主动容错控制^[4-5]. 所谓被动容错, 就是把各种故障的信息作为先验知识考虑进去, 这样一旦系统发生了所预料的故障, 就可以在不改变系统原有控制器参数与结构的条件下, 利用鲁棒控制技术使系统对故障的敏感性降至最低, 仍然可以稳定的工作. 在被动容错控制中不需要在线的故障信息, 这样就降低了设计难度^[6-7]. 文献[8]通过时间滞后法设计了一种被动容错

收稿日期: 2016-07-15; 录用日期: 2016-12-21.

†通信作者. E-mail: litaojia@163.com; Tel.: +86 25-58731409.

本文责任编辑: 宗群.

国家自然科学基金项目(61573189, 61603021), 江苏省杰出青年基金项目(BK20140045), 江苏省六大大才计划(2015-DZXX-013)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61573189, 61603021), Natural Science Foundation for Distinguished Young Scholars of Jiangsu Province (BK20140045) and Six Talent peaks Project in Jiangsu Province (2015-DZXX-013).

控制器,实现了4个飞轮同时发生故障下的姿态跟踪控制,然而所设计的控制器对执行机构的故障信息具有很高的需求.文献[9]虽然不需要知道故障信息且加入了外干扰力矩问题,但是需要知道故障的最小值,从而使得控制器设计具有一定局限性.近年来,控制界提出若干鲁棒容错控制方法.如:文献[10]针对航空发动机发生故障时系统的容错能力问题,设计了基于特征结构配置方法的容错控制系统.文献[11]提出了一种基于自适应滑模控制的鲁棒容错控制方法,对于在姿态调节的过程中执行机构部分故障的系统具有较强的容错能力.然而滑模控制使用不连续的控制来保证系统轨迹进入并保持滑模面,可能会激发系统的高频振荡.为了消除抖振,边界层法等光滑技术得到应用,在很大程度上保持暂态性,但丧失了渐近稳定性,所以如何抑制振荡也是滑模控制的一个难点问题.

另外,由于物理结构和执行器的能量消耗,输入时滞航天器中往往是存在的,它将会对航天器的性能以及对系统的稳定性产生较大的影响^[12-15].因此,将输入时滞考虑到姿态控制设计中具有实际意义.目前,在航天器姿态控制问题研究中对同时含有故障,扰动和输入时滞的研究成果还较少,该问题目前还是值得进一步深入研究.

受到上述问题启发,本文针对挠性航天器在轨运行时受到的外部干扰,输入时滞以及执行机构部分失效问题,建立了一个多界依赖的状态反馈容错控制算法,使得挠性航天器在执行机构发生部分失效故障时,能够继续保持系统渐近稳定,并能对外部干扰进行有效抑制.首先,将执行机构部分失效容错控制问题转化为不确定参数鲁棒控制问题.然后,利用时滞依赖李雅普诺夫泛函和不确定参数鲁棒 H_∞ 控制相结合的方法,设计了基于线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)被动容错反馈控制器.此法简单,易工程实现.最后,通过仿真实验,验证了本文设计状态反馈容错控制器的优越性.

注1 为了描述方便,文中 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 表示 \mathbf{P} 为 $m \times n$ 阶实数域 \mathbb{R} 矩阵, $\mathbf{0}_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 阶 $\mathbf{0}$ 矩阵,上标“ \mathbf{T} ”表示转置,对称矩阵的对称位置用“ $*$ ”表示, $l_2(\mathbf{E})$ 表示在 \mathbf{E} 上平方积分有限的函数集合.定义 $\text{sym}(\mathbf{AB}) = \mathbf{AB} + \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$. $\|\varpi(t)\|$ 表示向量 $\varpi(t)$ 的欧氏范数.

2 问题描述(Problem description)

考虑如图1所示的近似带有挠性附件的航天器模型,它由中心刚体与均匀悬臂梁式挠性附件构成,挠性梁为对称分布,建模时忽略太空重力的影响.图中 OXY 和 oxy 分别为惯性坐标系和本体坐标系, ox 与未变形的挠性附件的轴线重合,其原点位于挠性附件与中心刚体的连接处^[16].

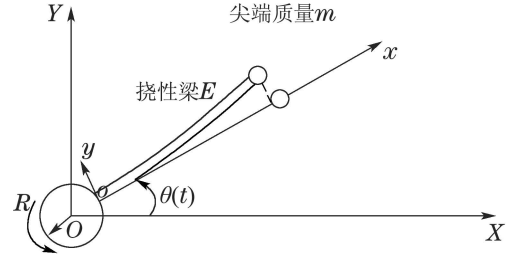


图1 带挠性附件航天器简化模型

Fig. 1 Simplified model of spacecraft with flexible appendages

利用拉格朗日方法推导挠性航天器的动力学模型为^[16]

$$\begin{cases} \mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{F}\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{u}^F(t - \tau(t)), \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{F}^T\ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 表示姿态角, $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为卫星的转动惯量, $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 为挠性附件的振动模态, $\mathbf{T} = \text{diag}\{2\xi_1\omega_1, 2\xi_2\omega_2, \dots, 2\xi_n\omega_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示模态阻尼矩阵, $\mathbf{A} = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示刚度矩阵, ω_i 为对应的振动模态的振动频率, ξ_i 为对应的振动模态的阻尼, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为航天器姿态与挠性结构之间的耦合系数矩阵, $\mathbf{u}^F(t - \tau(t))$ 是安装在挠性航天器反作用轮产生的控制力矩,其中 $\tau(t)$ 是时变时滞,且满足 $\tau_0 < \tau(t) < \tau_M$.将系统(1)进一步化简可得

$$(\mathbf{J} - \mathbf{F}\mathbf{F}^T)\ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{w}(t) + \mathbf{u}^F(t - \tau(t)), \quad (2)$$

其中 $\mathbf{w}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}(t))$.

这意味着可将挠性附件的振动作为对航天器本体的干扰 $\mathbf{w}(t)$,因此,在本文中假设 $\mathbf{w}(t)$ 属于 $l_2[0, \infty)$ 且满足 $\|\mathbf{w}(t)\| \leq \delta_w$, δ_w 为一常数.

将故障考虑到容错控制器的设计中^[17],本文建立如下故障模型:

$$\mathbf{u}^F(t - \tau(t)) = \mathbf{G}\mathbf{u}(t - \tau(t)), \quad (3)$$

其中 $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 表示执行器部分失效因子,且满足下面的条件:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \text{diag}\{g_1, g_2, \dots, g_m\}, \quad g_i \in [g_{xi}, g_{si}], \\ i &= 1, 2, \dots, m, \quad 0 \leq g_{xi} \leq g_i \leq g_{si} \leq 1, \end{aligned}$$

其中: g_i 是不确定的常数, g_{xi} 和 g_{si} 分别表示 g_i 的下限和上限.为简单起见,本文定义:

$$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{I} + \mathbf{L}), \quad |\mathbf{L}| \leq \bar{\mathbf{G}} \leq \mathbf{I}, \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}} &= \text{diag}\{\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_m\}, \\ \bar{\mathbf{G}} &= \text{diag}\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_m\}, \\ \hat{g}_i &= \frac{g_{xi} + g_{si}}{2}, \quad \bar{g}_i = \frac{g_{si} - g_{xi}}{g_{xi} + g_{si}}, \quad l_i = \frac{g_i - \hat{g}_i}{\hat{g}_i}, \\ |\mathbf{L}| &= \text{diag}\{|l_1|, |l_2|, \dots, |l_m|\}. \end{aligned}$$

当 $g_i = 0$,表示第 i 个驱动器失效,当 $g_i = 1$,表示第

i 个执行器正常工作. 当 $0 < g_i < 1$, 表示第 i 个执行器部分失效. 为描述方便, 定义如下向量:

$$\mathbf{x}(t) = [\boldsymbol{\theta}^T(t) \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}^T(t)]^T. \quad (5)$$

定义参考输出方程为

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (6)$$

由此可得, 系统的状态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{u}(t - \tau(t)) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (7)$$

其中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{I}_{m \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} \\ (\mathbf{J} - \mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1}_{m \times m} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I}_{m \times m} \quad \mathbf{0}_{m \times m}].$$

对于式(7)设计状态反馈控制器, 即

$$\mathbf{u}(t - \tau(t)) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t - \tau(t)), \quad (8)$$

$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times 2m}$ 即为需要求解的控制器的增益, 将该状态反馈控制器代入式(7), 可得如下闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{x}(t - \tau(t)) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (9)$$

本文的目的: 设计如(8)所示的控制器, 使得闭环系统即式(9)渐近稳定且满足 H_∞ 性能指标. 即

1) 当 $\mathbf{w}(t) = 0$ 时, 式(9)是渐近稳定的.

2) 对于任意非零的 $\mathbf{w}(t) \in l_2[0, +\infty)$ 和给定的常数 $\gamma > 0$, 在零初始条件 $\mathbf{x}(t) = 0 (t \in [0, \tau(t)])$ 下, 扰动输入 $\mathbf{w}(t)$ 到被控输出 $\mathbf{z}(t)$ 的 H_∞ 范数满足

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq \gamma \|\mathbf{w}(t)\|.$$

为完成上述目标, 还需要如下的引理.

引理 1^[18] 对于任意矩阵 $\mathbf{M} > 0$, 标量 $b > a$, 则对于任意向量函数 $\boldsymbol{\nu}(s)$, 有下面的不等式成立:

$$-\int_a^b \boldsymbol{\nu}^T(s) \mathbf{M} \boldsymbol{\nu}(s) ds \leq -\frac{1}{b-a} \tilde{\boldsymbol{\nu}}^T \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\nu}},$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\nu}} = \int_a^b \boldsymbol{\nu}(s) ds$.

引理 2^[19] 对任意矩阵 $\mathbf{R} > 0$, 对于 $x \in [\alpha, \beta]$, 始终满足下列不等式:

$$-\int_\alpha^\beta \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(s) ds \leq \frac{1}{\beta - \alpha} \boldsymbol{\varpi}^T \boldsymbol{\Upsilon} \boldsymbol{\varpi},$$

其中:

$$\boldsymbol{\varpi} = [\mathbf{x}^T(\beta) \quad \mathbf{x}^T(\alpha) \quad \tilde{\mathbf{x}}^T],$$

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \begin{bmatrix} -4\mathbf{R} & -2\mathbf{R} & 6\mathbf{R} \\ * & -4\mathbf{R} & 6\mathbf{R} \\ * & * & -12\mathbf{R} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta \mathbf{x}^T(s) ds.$$

引理 3^[20] 令 \mathbf{S}, \mathbf{E} 和 \mathbf{M} 为实矩阵, 并且有 $\|\mathbf{M}\| < \mathbf{I}$, 那么存在一个 $\epsilon > 0$, 满足

$$\mathbf{S}\mathbf{M}\mathbf{E} + \mathbf{E}^T \mathbf{M}^T \mathbf{S}^T \leq \epsilon^{-1} \mathbf{S}\mathbf{S}^T + \epsilon \mathbf{E}^T \mathbf{E}.$$

3 控制器设计与求解 (Controller design and solution)

为了求解控制器增益矩阵 \mathbf{K} , 本节提供了基于 LMI 的求解方法.

定理 1 对于任何给定的标量 $\gamma > 0, 0 \leq a \leq 1, \tau_0, \tau_M, \epsilon > 0$, 如果存在矩阵 $\mathbf{P} > 0, \mathbf{S}_1 > 0, \mathbf{S}_2 > 0, \mathbf{Q}_1 > 0, \mathbf{Q}_2 > 0$ 对于任意可逆矩阵 $\mathbf{H}_n (n=1, 2, 3, 4, 5)$ 使得下列矩阵不等式成立:

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Omega}} & \mathbf{S} & \epsilon \mathbf{E}^T & \mathbf{Z} & \mathbf{Y} \\ * & -\epsilon \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -\epsilon \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (10)$$

其中:

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{11} & \frac{1-3a\mathbf{S}_1}{\tau_0} & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{14} & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{15} & \mathbf{A}^T \mathbf{H}_4^T & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{17} \\ * & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{22} & \frac{-2a\mathbf{S}_2}{\tau_M - \tau_0} & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{24} & \frac{6a\mathbf{S}_1}{\tau_0} & \frac{6a\mathbf{S}_2}{\tau_M - \tau_0} & \mathbf{0} \\ * & * & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{33} & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{34} & \mathbf{0} & \frac{6a\mathbf{S}_2}{\tau_M - \tau_0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{44} & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{45} & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{46} & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{47} \\ * & * & * & * & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{55} & \mathbf{0} & -\mathbf{H}_3 \\ * & * & * & * & * & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{66} & -\mathbf{H}_4 \\ * & * & * & * & * & * & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{77} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{11} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{S}_{11} + \text{sym}(\mathbf{H}_1 \mathbf{A}),$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{14} = \mathbf{H}_1 \mathbf{B} \hat{\mathbf{G}} \mathbf{K} + \mathbf{A}^T \mathbf{H}_2^T,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{15} = \mathbf{A}^T \mathbf{H}_3^T - \frac{6a}{\tau_0} \mathbf{S}_1,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{17} = \mathbf{P} + \mathbf{A}^T \mathbf{H}_5^T - \mathbf{H}_1,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{22} = -\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{22},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{24} = \frac{(1-a)}{\tau_M - \tau_0} \mathbf{S}_2,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{33} = -\mathbf{Q}_2 + \mathbf{S}_{22},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{34} = \frac{(1-a)}{\tau_M - \tau_0} \mathbf{S}_2^T,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{44} = -\frac{2(1-a)}{\tau_M - \tau_0} \mathbf{S}_2 + \text{sym}(\mathbf{H}_2 \mathbf{B} \hat{\mathbf{G}} \mathbf{K}),$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{45} = \mathbf{K}^T \hat{\mathbf{G}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{H}_3^T,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{46} = \mathbf{K}^T \hat{\mathbf{G}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{H}_4^T,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{47} = \mathbf{K}^T \hat{\mathbf{G}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{H}_5^T - \mathbf{H}_2,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{55} = -\frac{12a}{\tau_0} \mathbf{S}_1, \quad \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{66} = -\frac{12a}{\tau_M - \tau_0} \mathbf{S}_2,$$

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{77} &= \tau_0 \mathbf{S}_1 + (\tau_M - \tau_0) \mathbf{S}_2 - \text{sym}(\mathbf{H}_5), \\ \mathbf{S}_{11} &= -\frac{(3a+1)}{\tau_0} \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_{22} = -\frac{(3a+1)}{\tau_M - \tau_0} \mathbf{S}_2, \\ \mathbf{S} &= [\hat{\mathbf{G}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{H}_1^T \ 0 \ 0 \ \hat{\mathbf{G}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{H}_2^T \ \hat{\mathbf{G}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{H}_3^T \\ &\quad \hat{\mathbf{G}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{H}_4^T \ \hat{\mathbf{G}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{H}_5^T]^T, \\ \mathbf{E} &= [0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{K} \ 0 \ 0 \ 0], \\ \mathbf{Z} &= [\mathbf{C}^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\ \mathbf{Y} &= [\mathbf{B}^T \mathbf{H}_1^T \ 0 \ 0 \ \mathbf{B}^T \mathbf{H}_2^T \ \mathbf{B}^T \mathbf{H}_3^T \\ &\quad \mathbf{B}^T \mathbf{H}_4^T \ \mathbf{B}^T \mathbf{H}_5^T]^T, \end{aligned}$$

则式(9)渐近稳定并在零初始条件下对于任意非零的 $\mathbf{w}(t) \in l_2[0, \infty)$, 满足 $\|\mathbf{z}(t)\| < \gamma \|\mathbf{w}(t)\|$.

证 首先考虑原系统的渐近稳定. 当干扰 $\mathbf{w}(t) = 0$ 时, 式(9)变为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{x}(t - \tau(t)), \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (11)$$

构造李雅普诺夫泛函为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t, \mathbf{x}(t)) &= \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \int_{t-\tau_0}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}(s) ds + \\ &\quad \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_0} \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(s) ds + \\ &\quad \int_{-\tau_0}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds d\theta + \\ &\quad \int_{-\tau_M}^{-\tau_0} \int_{t+\theta}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds d\theta. \end{aligned} \quad (12)$$

对李雅普诺夫泛函式(12)求导:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x}(t)) &= \\ &2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}(t) + \\ &\mathbf{x}^T(t - \tau_0) (-\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) \mathbf{x}(t - \tau_0) - \\ &\mathbf{x}^T(t - \tau_M) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(t - \tau_M) + \\ &\dot{\mathbf{x}}^T(t) (\tau_0 \mathbf{S}_1 + (\tau_M - \tau_0) \mathbf{S}_2) \dot{\mathbf{x}}(t) - \\ &\int_{t-\tau_0}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_0} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

对式(13)中的第6项和第7项作如下的处理:

$$\begin{aligned} &\int_{t-\tau_0}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds + \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_0} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds = \\ &a \left[\int_{t-\tau_0}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds + \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_0} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \right] + \\ &(1-a) \left[\int_{t-\tau_0}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds + \right. \\ &\left. \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_0} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

对式(14)中的第1项利用引理2进行化简可得

$$\begin{aligned} &-a \left[\int_{t-\tau_0}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds + \right. \\ &\left. \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_0} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \right] \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{a}{\tau_M - \tau_0} \boldsymbol{\eta}_2^T(t) \begin{bmatrix} -4\mathbf{S}_2 & -2\mathbf{S}_2 & 6\mathbf{S}_2 \\ * & -4\mathbf{S}_2 & 6\mathbf{S}_2 \\ * & * & -12\mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_2(t) + \\ &\frac{a}{\tau_0} \boldsymbol{\eta}_1^T(t) \begin{bmatrix} -4\mathbf{S}_1 & -2\mathbf{S}_1 & 6\mathbf{S}_1 \\ * & -4\mathbf{S}_1 & 6\mathbf{S}_1 \\ * & * & -12\mathbf{S}_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1(t), \end{aligned} \quad (15)$$

其中:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_1(t) &= [\mathbf{x}^T(t) \ \mathbf{x}^T(t - \tau_0) \ \tilde{\mathbf{x}}_1^T(t)]^T, \\ \boldsymbol{\eta}_2(t) &= [\mathbf{x}^T(t - \tau_0) \ \mathbf{x}^T(t - \tau_M) \ \tilde{\mathbf{x}}_2^T(t)]^T, \\ \tilde{\mathbf{x}}_1^T &= \frac{1}{\tau_0} \int_{t-\tau_0}^t \mathbf{x}^T(s) ds, \\ \tilde{\mathbf{x}}_2^T &= \frac{1}{\tau_M - \tau_0} \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_0} \mathbf{x}^T(s) ds. \end{aligned}$$

对式(14)中第2项用引理1进行化简:

$$\begin{aligned} &-(1-a) \left[\int_{t-\tau_0}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds + \right. \\ &\left. \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_0} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \right] = \\ &-(1-a) \int_{t-\tau_0}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \\ &(1-a) \left[\int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds + \right. \\ &\left. \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_0} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \right] \leq \\ &-\frac{(1-a)}{\tau_0} \int_{t-\tau_0}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) ds \mathbf{S}_1 \int_{t-\tau_0}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \\ &\frac{(1-a)}{\tau_M - \tau(t)} \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \dot{\mathbf{x}}^T(s) ds \mathbf{S}_2 \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \\ &\frac{(1-a)}{\tau(t) - \tau_0} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_0} \dot{\mathbf{x}}^T(s) ds \mathbf{S}_2 \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_0} \dot{\mathbf{x}}(s) ds. \end{aligned} \quad (16)$$

由 $\int_{t-\tau_0}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau_0)$ 及 $\tau(t) - \tau_0 < \tau_M - \tau_0$, $\tau_M - \tau(t) < \tau_M - \tau_0$, 可将式(16)转化为

$$\begin{aligned} &< \frac{(1-a)}{\tau_0} \boldsymbol{\eta}_3^T(t) \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_1 \\ * & -\mathbf{S}_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_3(t) + \\ &\frac{(1-a)}{\tau_M - \tau_0} \boldsymbol{\eta}_4^T(t) \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_2 & 0 \\ * & -2\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_2 \\ * & * & -\mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_4(t), \end{aligned} \quad (17)$$

其中:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_3(t) &= [\mathbf{x}^T(t) \ \mathbf{x}^T(t - \tau_0)]^T, \\ \boldsymbol{\eta}_4(t) &= [\mathbf{x}^T(t - \tau_0) \ \mathbf{x}^T(t - \tau(t)) \ \mathbf{x}^T(t - \tau_M)]^T. \end{aligned}$$

当不考虑干扰项, 式(11)可变为如下形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{x}(t - \tau(t)) - \dot{\mathbf{x}}(t) = 0. \quad (18)$$

对于任意矩阵 \mathbf{H} , 如下的等式恒成立:

$$2\xi^T(t) \mathbf{H} [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{x}(t - \tau(t)) - \dot{\mathbf{x}}(t)] = 0, \quad (19)$$

其中:

$$\xi = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau(t)) & \tilde{x}_1^T(t) & \tilde{x}_2^T(t) & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix}^T, \\ H = [H_1^T \ H_2^T \ H_3^T \ H_4^T \ H_5^T]^T.$$

对式(19)计算得

$$\begin{aligned} 2\xi^T(t)H(Ax(t) + BGKx(t-\tau(t)) - \dot{x}(t)) = & 2x^T(t)H_1Ax(t) + 2x^T(t-\tau(t))H_2Ax(t) + \\ & 2x^T(t)H_1BGKx(t-\tau(t)) - 2x^T(t)H_1\dot{x}(t) + \\ & 2x^T(t-\tau(t))H_2BGKx(t-\tau(t)) + \\ & 2\tilde{x}_1^T(t)H_3BGKx(t-\tau(t)) - 2\tilde{x}_1^T(t)H_3\dot{x}(t) + \\ & 2\tilde{x}_2^T(t)H_4BGKx(t-\tau(t)) - 2\tilde{x}_2^T(t)H_4\dot{x}(t) + \\ & 2\dot{x}^T(t)H_5BGKx(t-\tau(t)) - 2\dot{x}^T(t)H_5\dot{x}(t) + \\ & 2\dot{x}^T(t)H_5Ax(t) - 2x^T(t-\tau(t))H_2\dot{x}(t) + \\ & 2\tilde{x}_1^T(t)H_3Ax(t) + 2\tilde{x}_2^T(t)H_4Ax(t). \end{aligned} \quad (20)$$

联合式(13)(17)(20), 可知

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x(t)) + 2\xi^T(t)H(Ax(t) + \\ BGKx(t-\tau(t)) - \dot{x}(t)) \leq \zeta^T(t)\Omega\zeta(t), \end{aligned} \quad (21)$$

其中:

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau_0) & x^T(t-\tau_M) \\ x^T(t-\tau(t)) & \tilde{x}_1^T(t) & \tilde{x}_2^T(t) & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix}^T,$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & 0 & \Omega_{14} & \Omega_{15} & A^T H_4^T & \Omega_{17} \\ * & \Omega_{22} & -\frac{2aS_2}{\tau_M - \tau_0} & \Omega_{24} & \frac{6aS_1}{\tau_0} & \frac{6aS_2}{\tau_M - \tau_0} & 0 \\ * & * & \Omega_{33} & \Omega_{34} & 0 & \frac{6aS_2}{\tau_M - \tau_0} & 0 \\ * & * & * & \Omega_{44} & \Omega_{45} & \Omega_{46} & \Omega_{47} \\ * & * & * & * & \Omega_{55} & 0 & -H_3 \\ * & * & * & * & * & \Omega_{66} & -H_4 \\ * & * & * & * & * & * & \Omega_{77} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{11} = Q_1 + \text{sym}(H_1A) + S_{11},$$

$$\Omega_{14} = H_1BGK + A^T H_2^T,$$

$$\Omega_{15} = A^T H_3^T - \frac{6a}{\tau_0} S_1,$$

$$\Omega_{17} = P + A^T H_5^T - H_1,$$

$$\Omega_{22} = -Q_1 + Q_2 + S_{11} + S_{22},$$

$$\Omega_{24} = \frac{(1-a)}{\tau_M - \tau_0} S_2,$$

$$\Omega_{33} = -Q_2 + S_{22},$$

$$\Omega_{34} = \frac{(1-a)}{\tau_M - \tau_0} S_2^T,$$

$$\Omega_{44} = -\frac{2(1-a)}{\tau_M - \tau_0} S_2 + \text{sym}(H_2BGK),$$

$$\Omega_{45} = K^T G^T B^T H_3^T,$$

$$\Omega_{46} = K^T G^T B^T H_4^T,$$

$$\Omega_{47} = K^T G^T B^T H_5^T - H_2,$$

$$\Omega_{55} = -\frac{12a}{\tau_0} S_1, \quad \Omega_{66} = -\frac{12a}{\tau_M - \tau_0} S_2,$$

$$\Omega_{77} = (\tau_0 S_1 + (\tau_M - \tau_0) S_2) - \text{sym}(H_5).$$

由于矩阵中的G是不确定项, 本文通过下式进行转换:

$$G = \hat{G}(I + L), \quad (22)$$

因此, 式(21)中的矩阵Ω可简写为

$$\Omega = \hat{\Omega} + \Pi, \quad (23)$$

Ω̂已定义于式(10)中, 且

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Pi_{14} & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & \Pi_{45} & \Pi_{46} & \Pi_{47} \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

其中:

$$\Pi_{14} = H_1 B \hat{G} L K,$$

$$\Pi_{44} = \text{sym}(H_2 B \hat{G} L K),$$

$$\Pi_{45} = K^T L^T \hat{G}^T B^T H_3^T,$$

$$\Pi_{46} = K^T L^T \hat{G}^T B^T H_4^T,$$

$$\Pi_{47} = K^T L^T \hat{G}^T B^T H_5^T,$$

Π可进一步改写为

$$\Pi = \text{sym}(SLE), \quad (25)$$

其中矩阵S和E已在式(10)中给出. 通过引理3, 式(23)可化为

$$\Omega = \hat{\Omega} + \Pi \leq \hat{\Omega} + \epsilon^{-1} S S^T + \epsilon E^T E. \quad (26)$$

通过Schur补定理得到

$$\Omega \leq \begin{bmatrix} \hat{\Omega} & S & \epsilon E^T \\ * & -\epsilon I & 0 \\ * & * & -\epsilon I \end{bmatrix}. \quad (27)$$

由式(10)知, Ω < 0, 这意味这V̇(t, x(t)) < 0, 所以式(9)是渐近稳定的.

下面进一步考虑其H∞特性. 令

$$\Theta_\infty(t) = \int_0^t [z^T(s)z(s) - \gamma^2 w^T(s)w(s)] ds, \quad (28)$$

可以证明, 对于任意非零w(t) ∈ l₂[0, ∞), t > 0, 有

$$\Theta_\infty(t) \leq \int_0^t [z^T(s)z(s) - \gamma^2 w^T(s)w(s)] ds + V(t, x(t)). \quad (29)$$

值得注意的是, 对式(28)关于t求导后

$$z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) =$$

$$\varphi^T(t)\text{diag}\{C^T C, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\gamma^2 I\}\varphi(t), \tag{30}$$

其中

$$\varphi(t) = [s^T(t)w(t)]^T.$$

将干扰项代入式(19), 式(21)可以进一步简化为

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq \varphi^T(t) \begin{bmatrix} \Omega + \Omega_1 & Y \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \varphi(t), \tag{31}$$

其中 $\Omega_1 = \text{diag}\{C^T C, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$, Y 如式(10)所示. 利用Schur补定理, 式(31)可化为

$$\begin{bmatrix} \Omega + \Omega_1 & Y \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & Z & Y \\ * & -I & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \tag{32}$$

其中

$$Z = [C^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

结合式(27)和式(32), 得到

$$\Psi = \begin{bmatrix} \hat{\Omega} & S & \epsilon E^T & Z & Y \\ * & -\epsilon I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\epsilon I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}. \tag{33}$$

由式(10)可知, $\Psi < 0$, 可得 $z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(t, x(t)) < 0$ 成立, 结合式(29)可得 $\dot{\Theta}_\infty(t) < \dot{V}(t, x(t)) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)$. 于是得 $\dot{\Theta}_\infty(t) < 0$. 因此, 对于任意非零的 $w(t) \in l_2[0, \infty)$, 都有 $\|z(t)\| < \gamma \|w(t)\|$.

注 2 定理1是一个多界依赖的鲁棒控制算法. 此算法不仅依赖时滞积分不等式分割参数 a 和时滞界信息 τ_0, τ_M , 还依赖失效因子 \hat{G} . 值得指出的是通过调节分割参数 a 可以调整不同时滞积分不等式的权重, 从而实现降低结论保守性的作用.

注 3 与文献[21]相比, 本文进一步考虑了输入时滞和可能发生执行器部分失效故障问题, 从而对系统考虑的更加真实准确. 与文献[16]相比, 由于本文使用新的时滞处理方法, 因此本文的结果保守性更低, 其比较结果见后续的数值例子部分.

由于定理1还不是一个严格的LMI形式, 因此无法求解控制器增益. 为了将其化为更加严格的LMI形式, 于是, 基于定理1, 可以进一步得到如下定理.

定理 2 对于给定的标量 $\gamma > 0, 0 \leq a \leq 1, \tau_0, \tau_M, \epsilon > 0, \beta_n (n = 1, 2, 3, 4)$, 如果存在矩阵 $\bar{P} > 0, \bar{S}_1 > 0, \bar{S}_2 > 0, \bar{Q}_1 > 0, \bar{Q}_2 > 0$, 可逆矩阵 X 和任意矩阵 U 使得下列不等式满足:

$$\bar{\Psi} < 0,$$

其中:

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & \frac{(1-3a)\bar{S}_1}{\tau_0} & 0 & \bar{\Omega}_{14} & \bar{\Omega}_{15} & \beta_3 X A^T \\ * & \bar{\Omega}_{22} & -\frac{2a\bar{S}_2}{\tau_M - \tau_0} & \bar{\Omega}_{24} & 6\frac{a}{\tau_0}\bar{S}_1 & \frac{6a\bar{S}_2}{\tau_M - \tau_0} \\ * & * & \bar{\Omega}_{33} & \bar{\Omega}_{34} & 0 & \frac{6a\bar{S}_2}{\tau_M - \tau_0} \\ * & * & * & \bar{\Omega}_{44} & \bar{\Omega}_{45} & \bar{\Omega}_{46} \\ * & * & * & * & \bar{\Omega}_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & \bar{\Omega}_{66} \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ \bar{\Omega}_{17} & B\hat{G} & 0 & X C^T & B & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \bar{\Omega}_{47} & \beta_1 B\hat{G} & \epsilon U^T & 0 & \beta_1 B & \\ -\beta_2 X^T & \beta_2 B\hat{G} & 0 & 0 & \beta_2 B & \\ -\beta_3 X^T & \beta_3 B\hat{G} & 0 & 0 & \beta_3 B & \\ \bar{\Omega}_{77} & \beta_4 B\hat{G} & 0 & 0 & \beta_4 B & \\ * & -\epsilon I & 0 & 0 & 0 & \\ * & * & -\epsilon I & 0 & 0 & \\ * & * & * & -I & 0 & \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & \end{bmatrix},$$

且有

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{11} &= \bar{Q}_1 + \text{sym}(AX^T) + \bar{S}_{11}, \\ \bar{\Omega}_{14} &= B\hat{G}U + \beta_1 X A^T, \\ \bar{\Omega}_{15} &= \beta_2 X A^T + \frac{6a}{\tau_0}\bar{S}_1, \\ \bar{\Omega}_{17} &= \bar{P} + \beta_4 X A^T - X^T, \\ \bar{\Omega}_{22} &= -\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \bar{S}_{11} + \bar{S}_{22}, \\ \bar{\Omega}_{24} &= \frac{(1-a)}{\tau_M - \tau_0}\bar{S}_2, \\ \bar{\Omega}_{33} &= -\bar{Q}_2 + \bar{S}_{22}, \\ \bar{\Omega}_{34} &= \frac{(1-a)}{\tau_M - \tau_0}\bar{S}_2^T, \\ \bar{\Omega}_{44} &= -\frac{2(1-a)}{\tau_M - \tau_0}\bar{S}_2 + \beta_1 \text{sym}(B\hat{G}U), \\ \bar{\Omega}_{45} &= \beta_2 U^T \hat{G}^T B^T, \\ \bar{\Omega}_{46} &= \beta_3 U^T \hat{G}^T B^T, \\ \bar{\Omega}_{47} &= \beta_4 U^T \hat{G}^T B^T - \beta_1 X^T, \\ \bar{\Omega}_{55} &= -\frac{12a}{\tau_0}\bar{S}_1, \\ \bar{\Omega}_{66} &= -\frac{12a}{\tau_M - \tau_0}\bar{S}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{77} &= (\tau_0 \bar{S}_1 + (\tau_M - \tau_0) \bar{S}_2) - \beta_4 \mathbf{X}^T - \beta_4 \mathbf{X}, \\ \bar{S}_{11} &= -\frac{(1+3a)}{\tau_0} \bar{S}_1, \quad \bar{S}_{22} = -\frac{(1+3a)}{\tau_M - \tau_0} \bar{S}_2, \end{aligned}$$

则闭环系统式(9)是渐近稳定且在零初始条件下对于任意 $\mathbf{w}(t) \in l_2[0, \infty)$ 都有 $\|\mathbf{z}(t)\| < \gamma \|\mathbf{w}(t)\|$. 此时得到反馈增益矩阵如下:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}(\mathbf{X}^T)^{-1}. \tag{34}$$

证 在已获得的定理1中, 令

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= \beta_1 \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{H}_3 = \beta_2 \mathbf{H}_1, \\ \mathbf{H}_4 &= \beta_3 \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{H}_5 = \beta_4 \mathbf{H}_1, \end{aligned}$$

对 Ψ 左乘

$$\text{diag} \{ \mathbf{H}_1^{-1}, \mathbf{H}_1^{-1}, \mathbf{H}_1^{-1}, \mathbf{H}_1^{-1}, \mathbf{H}_1^{-1}, \mathbf{H}_1^{-1}, \mathbf{H}_1^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I} \},$$

右乘

$$\text{diag} \{ \mathbf{H}_1^{-T}, \mathbf{H}_1^{-T}, \mathbf{H}_1^{-T}, \mathbf{H}_1^{-T}, \mathbf{H}_1^{-T}, \mathbf{H}_1^{-T}, \mathbf{H}_1^{-T}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I} \},$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{H}_1^{-1}, \quad \bar{\mathbf{Q}}_1 = \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{Q}_1 \mathbf{H}_1^{-T}, \\ \bar{\mathbf{Q}}_2 &= \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{Q}_2 \mathbf{H}_1^{-T}, \quad \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{H}_1^{-T}, \\ \bar{\mathbf{S}}_1 &= \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{S}_1 \mathbf{H}_1^{-T}, \quad \bar{\mathbf{S}}_2 = \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{S}_2 \mathbf{H}_1^{-T}, \end{aligned}$$

于是 $\Psi < 0$ 可以化为式(33), 即闭环系统是稳定的, 并且在零初始条件下对于任何的 $\mathbf{w}(t) \in l_2[0, \infty)$ 都有 $\|\mathbf{z}(t)\| < \gamma \|\mathbf{w}(t)\|$.

4 仿真实验(Simulation experiment)

为了验证本文提出方法的有效性, 本节在 MATLAB 环境下对带挠性附件卫星姿态控制系统进行仿真研究. 以某型航天器为例, 卫星俯仰轴的主轴转动惯量为 $J = 35.72 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 由于低频振动模态占附件振动能量的主要部分, 在此忽略高频振动模态的影响, 仅考虑挠性帆板的前二阶挠性模态, 其振动模态参数振动频率为 ω_i , 阻尼比为 ξ_i , 耦合系数为 F_i 如表1所示, 假定航天器运行高度为500 km的高度轨迹, 轨道角速度为 $n = 0.0011 \text{ rad/s}$, 假定卫星初始姿态角和角速度分别为 $\theta(0) = 0.08 \text{ rad}$, $\dot{\theta}(0) = 0.001 \text{ rad/s}$. 主要参数如表1所示.

表1 振动模态参数列表

Table 1 List of vibration modal parameters

参数	振动模态	
	1	2
振动频率 $\omega_i / (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	3.17	7.38
阻尼比 ξ_i	0.0001	0.00015
耦合系数 F_i	1.27814	0.91756

4.1 不同失效因子 \hat{G} 对系统的影响 (Effects of different failure factor \hat{G} on the system)

取 \hat{G} 分别为 0.1, 0.4, 0.7, 1. 选取的最大延迟时间 $\tau_M = 0.8 \text{ s}$, $\tau_0 = 0.001 \text{ s}$, 并且取分解参数 a 为 0.1, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0.1$, $\gamma = 5$, $\epsilon = 10$, 其他参数如表2所示. 根据表2中的 \mathbf{X}, \mathbf{U}^T 可求的针对于不同 \hat{G} 的控制器增益值 \mathbf{K} . 图2-3是对应的姿态角(θ)和姿态角速度($\dot{\theta}$)的响应曲线. 从仿真图可以看出, 当失效因子 \hat{G} 值越小, 即执行机构失效部分越大, 姿态角、姿态角速度重新恢复到稳定状态所需的调节时间越长.

表2 不同 \hat{G} 值得到的 \mathbf{X}, \mathbf{U}^T
Table 2 \mathbf{X}, \mathbf{U}^T under the different \hat{G}

\hat{G}	\mathbf{X}	\mathbf{U}^T
0.1	$\begin{bmatrix} 0.0019 & -0.0003 \\ -0.0003 & 0.0001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0004 \end{bmatrix}$
0.4	$\begin{bmatrix} 0.0088 & -0.0018 \\ -0.0018 & 0.0007 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0003 \\ -0.0012 \end{bmatrix}$
0.7	$\begin{bmatrix} 0.0085 & -0.0017 \\ -0.0017 & 0.0006 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0003 \\ -0.0017 \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 0.0093 & -0.0019 \\ -0.0019 & 0.0007 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0003 \\ -0.0021 \end{bmatrix}$

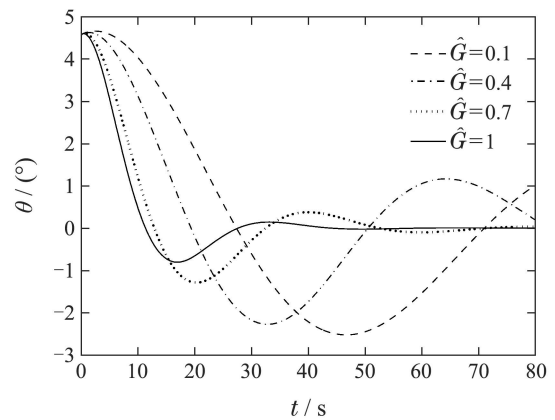


图2 不同 \hat{G} 下的姿态角

Fig. 2 Attitude angle under different \hat{G}

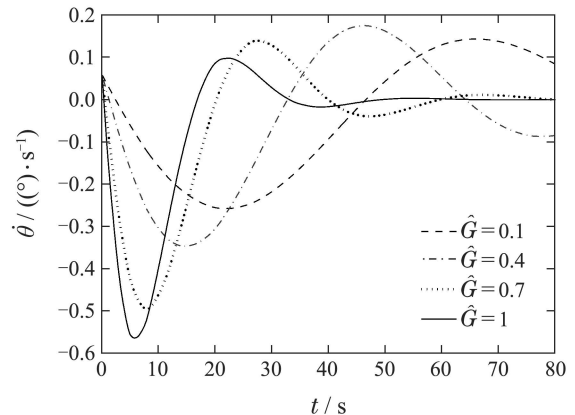


图3 不同 \hat{G} 下的姿态角速度

Fig. 3 Attitude angular velocity under different \hat{G}

4.2 不同时滞界 τ_M 对系统的影响 (Effects of different time delay bound τ_M on the system)

当选取 $\hat{G} = 0.7$, 并选取分解系数 a 为 0.1, $\gamma = 5$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0.1$, $\epsilon = 10$, $\tau_0 = 0.001$ s. 针对不同的最大容许时滞上界 τ_M , 求得相应 \mathbf{X} , \mathbf{U}^T 如表3所示, 利用 $\mathbf{K} = \mathbf{U}(\mathbf{X}^T)^{-1}$ 可进一步求的相应的控制器增益 \mathbf{K} . 图4-5是对应的姿态角(θ)和姿态角速度($\dot{\theta}$)的响应曲线. 从仿真图中可以发现, 当延迟时间增加时, 控制量随之减小, 姿态角、姿态角速度的调节镇定过程产生较大振荡, 可见控制器对时滞具有较高的敏感性.

表 3 不同 τ_M 值下得到的 \mathbf{X} , \mathbf{U}^T
Table 3 \mathbf{X} , \mathbf{U}^T under the different τ_M

τ_M/s	\mathbf{X}	\mathbf{U}^T
0.1	$\begin{bmatrix} 0.1153 & -0.0060 \\ -0.0060 & 0.0006 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0008 \\ -0.0028 \end{bmatrix}$
0.5	$\begin{bmatrix} 0.1175 & -0.0068 \\ -0.0068 & 0.0007 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0012 \\ -0.0027 \end{bmatrix}$
0.8	$\begin{bmatrix} 0.0085 & -0.0017 \\ -0.0017 & 0.0006 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0003 \\ -0.0017 \end{bmatrix}$

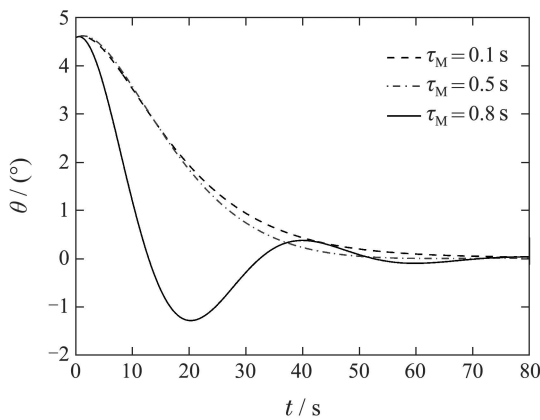


图 4 不同 τ_M 下的姿态角
Fig. 4 Attitude angle under different τ_M

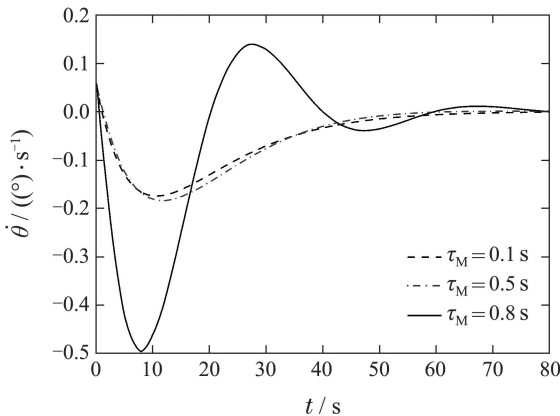


图 5 不同 τ_M 下的姿态角速度
Fig. 5 Attitude angular velocity under different τ_M

4.3 不同分解参数 a 对系统的影响 (Effects of different decomposition parameters a on the system)

当选取 $\hat{G} = 0.7$, 并选取 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0.1$, $\gamma = 5$, $\epsilon = 10$, $\tau_0 = 0.001$ s, $\tau_M = 0.5$ s, 针对不同分解参数 a 进行仿真实验, 结果如表4及图6-7所示. 其中表4是针对不同的 a , 求得的 \mathbf{X} , \mathbf{U}^T , 利用 $\mathbf{K} = \mathbf{U}(\mathbf{X}^T)^{-1}$ 可进一步求的相应的控制器增益 \mathbf{K} . 图6-7是对应的姿态角(θ)和姿态角速度($\dot{\theta}$)的响应曲线. 从仿真结果可知, 当 a 值取不同值时得出的仿真效果图并不是随着 a 越大效果越好, 亦或 a 越小, 效果越好. 分解参数 a 在对系统进一步优化上有着积极的作用.

表 4 不同 a 值下得到的 \mathbf{X} , \mathbf{U}^T
Table 4 \mathbf{X} , \mathbf{U}^T under the different a

a	\mathbf{X}	\mathbf{U}^T
0.1	$\begin{bmatrix} 0.1175 & -0.0068 \\ -0.0068 & 0.0007 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0012 \\ -0.0027 \end{bmatrix}$
0.2	$\begin{bmatrix} 0.1103 & -0.0058 \\ -0.0058 & 0.0006 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0012 \\ -0.0027 \end{bmatrix}$
0.3	$\begin{bmatrix} 0.1138 & -0.0061 \\ -0.0061 & 0.0006 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0013 \\ -0.0027 \end{bmatrix}$

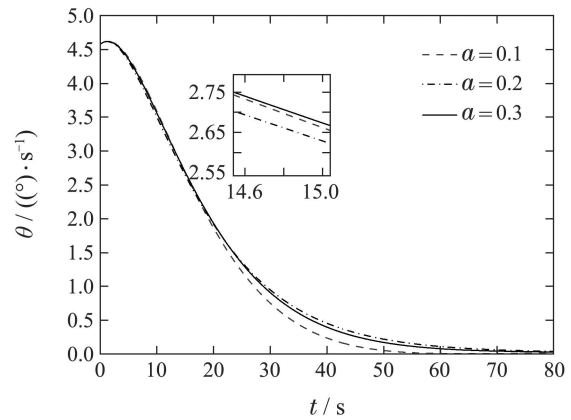


图 6 不同 a 下的姿态角
Fig. 6 Attitude angle under different a

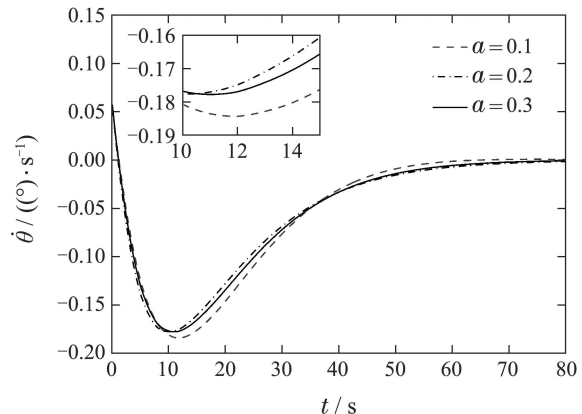


图 7 不同 a 下的姿态角速度
Fig. 7 Attitude angular velocity under different a

4.4 与现有方法比较(Compared with existing methods)

选取相同的参数并在相同的干扰条件下, 图8-9是本文所设计的控制器与文献[16]所设计的控制器以及工业上常用的PID控制器的比较仿真图. 分解参数 a 取其值为0.1, 由于文献[16]没有考虑执行机构失效的问题, 令 $\hat{G} = 1$, 图8-9分别对应的姿态角(θ)和姿态角速度($\dot{\theta}$)的响应曲线.

图8-9中: a) 表示文献[16]的仿真结果; b) 表示文献[21]用PD控制响应的效果图, 其中PD参数分别为 $P = 4.3515$, $D = 17.2488$; c) 表示相同条件下本文的效果图. 从仿真比较图中可以看出, 本文所设计的控制器与文献[16]相比, 无论是在振荡幅度还是在调节时间上都更具有优势, 然而由于对干扰的抑制效果不强, 因此在稳定时还有较小的振荡. 与文献[21]的PD控制方法相比, 本文在振荡幅度和对干扰的抑制效果上都有较大的优势.

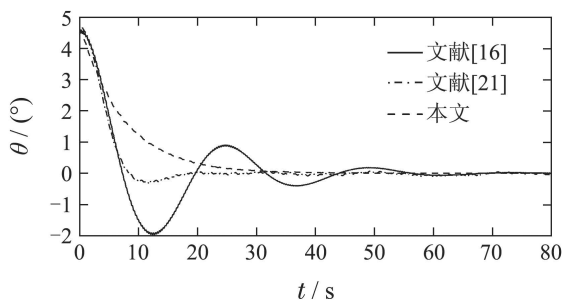


图8 姿态角的比较图

Fig. 8 Comparison chart of attitude angle

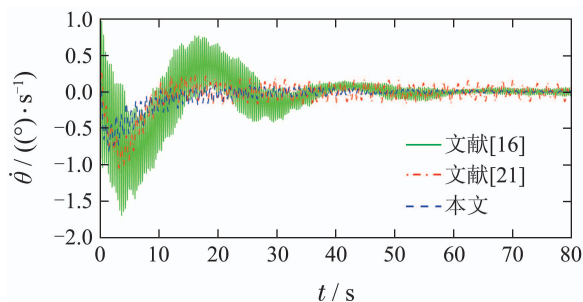


图9 姿态角速度的比较图

Fig. 9 Comparison chart of attitude angular velocity

5 结论(Conclusions)

本文针对执行器部分失效的挠性航天器, 设计了多界依赖的鲁棒容错状态反馈控制器. 在此控制器的作用下, 能确保闭环系统渐近稳定且满足给定干扰抑制指标. 本文所提的方法与其他方法相比, 控制器设计更灵活, 保守性也更低. 仿真结果也进一步显示了失效因子、时滞、时滞积分不等式分解参数对姿态角、姿态角速度的影响, 同时与其他控制方法相比, 也有较好的优势.

参考文献(References):

- [1] WU Yunli, LI Jiajia, ZENG Haibo, et al. Robust H-infinity control design for spacecrafts with large flexible netted antennas [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(3): 365 - 371. (武云丽, 李佳嘉, 曾海波, 等. 带有大型挠性网状天线航天器的鲁棒H ∞ 控制方法 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(3): 365 - 371.)
- [2] TAN Chunlin, HU Taibin, WANG Dapeng, et al. Analysis on foreign spacecraft in-orbit failures [J]. *Spacecraft Engineering*, 2011, 20(4): 130 - 136. (谭春林, 胡太彬, 王大鹏, 等. 国外航天器在轨故障统计与分析 [J]. *航天器工程*, 2011, 20(4): 130 - 136.)
- [3] CHEN W, JIANG J. Fault-tolerant control against stuck actuator faults [J]. *IEEE Proceedings—Control Theory and Applications*, 2005, 152(2): 138 - 146.
- [4] BLANK M, IZADI-ZAMANABADI R, BOGH S A, et al. Fault-tolerant control systems-A holistic view [C] // *Tutorial Workshop on Supervision, Fault Detection and Diagnosis of Technical Systems at the IFAC World Congress*. San Francisco: [s. n.], 1997, 5(5): 693 - 702.
- [5] ZHANG Y M, JIANG J. Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control system [J]. *Annual Reviews in Control*, 2008, 32(2): 229 - 252.
- [6] LIU Huolong. *A study on design of passive fault-tolerant control system based on LMI approach* [D]. Shenyang: Northeastern University, 2010. (刘火龙. 基于LMI技术的被动容错控制系统设计方法研究 [D]. 沈阳: 东北大学, 2010.)
- [7] MAO Haijie, LI Wei, FENG Xiaolin. Review of active fault tolerant control for nonlinear system [J]. *Transducer and Microsystem Technologies*, 2014, 33(4): 6 - 13. (毛海杰, 李伟, 冯小林. 非线性系统主动容错控制综述 [J]. *传感器与微系统*, 2014, 33(4): 6 - 13.)
- [8] JIN J H, KO S H, RYOO C K. Fault tolerant control for satellites with four reaction wheels [J]. *Control Engineering Practice*, 2008, 16(10): 1250 - 1258.
- [9] CAI W C, LIAO X H, SONG Y D. Indirect robust adaptive fault-tolerant control for attitude tracking of spacecraft [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2008, 31(5): 1456 - 1463.
- [10] FU Qiang. Robustness design of passive fault tolerant control system for aero engine [J]. *Measurement and Control Technology*, 2013, 32(5): 32 - 35. (傅强. 航空发动机被动容错控制系统鲁棒性设计 [J]. *测控技术*, 2013, 32(5): 32 - 35.)
- [11] XIAO Bing, HU Qinglei, MA Guangfu. Robust fault tolerant attitude control for spacecraft under partial loss of actuator effectiveness [J]. *Control and Decision*, 2011, 26(6): 801 - 805. (肖冰, 胡庆雷, 马广富. 航天器执行器机构部分失效故障的鲁棒容错控制 [J]. *控制与决策*, 2011, 26(6): 801 - 805.)
- [12] LI X F, GUO L, ZHANG Y M. A composite disturbance observer and control scheme for flexible spacecraft with time-varying input delay [C] // *The 31th Chinese Control Conference*. Hefei: IEEE, 2012: 2824 - 2829.
- [13] DONG C, XU L, CHEN Y, et al. Networked flexible spacecraft attitude maneuver based on adaptive fuzzy sliding mode control [J]. *Acta Astronautica*, 2009, 65(11): 1561 - 1570.
- [14] ZHANG Bin, LI Tao, ZHENG Bochao. H ∞ control of flexible spacecraft with disturbance and input delay [J]. *Information and Control*, 2016, 45(4): 407 - 414. (张斌, 李涛, 郑柏超. 具有干扰和输入时滞的挠性航天器H ∞ 控制 [J]. *信息与控制*, 2016, 45(4): 407 - 414.)

- [15] WANG Lijun, LI Qing, TONG Chaonan, et al. Overview of active disturbance rejection control for systems with time-delay [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(12): 1521 – 1533.
(王丽君, 李擎, 童朝南, 等. 时滞系统的自抗扰控制综述 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(12): 1521 – 1533.)
- [16] ZHANG R, LI T, GUO L. H_∞ control for flexible spacecraft with time-varying input delay [J/OL]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, Article ID: 839108.
- [17] ZHANG R, QIAO J, LI T, et al. Robust fault-tolerant control for flexible spacecraft against partial actuator failures [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 76(3): 1753 – 1760.
- [18] FENG Z G, LAM J. Stability and dissipativity analysis of distributed delay cellular neural networks [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, 22(6): 976 – 981.
- [19] ZENG H B, HE Y, WU M, et al. Free-matrix-based integral inequality for stability analysis of systems with time-varying delay [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(10): 2768 – 2771.
- [20] SAKTHIVEL R, VADIVEL R, MATHIYALAGAN K, et al. Fault-distribution dependent reliable H_∞ control for TS fuzzy systems [J]. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 2014, 136(2): 021021.
- [21] LIU H, GUO L, ZHANG Y M. An anti-disturbance PD control scheme for attitude control and stabilization of flexible spacecrafts [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 67(3): 2081 – 2088.

作者简介:

李涛 (1979–), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究领域为时滞系统的控制及故障诊断, E-mail: litaojia@163.com;

张斌 (1992–), 男, 硕士研究生, 研究领域为时滞抗干扰方向, E-mail: zb100965@126.com.cn;

乔建忠 (1983–), 男, 博士, 讲师, 研究领域为航天器容错控制、抗干扰控制, E-mail: qiaojianzhong83@163.com.