

# 含多正弦扰动的航天器无拖曳控制系统性能极限研究

邹奎<sup>1,2†</sup>, 苟兴宇<sup>1,2</sup>, 范达<sup>3</sup>

(1. 北京控制工程研究所, 北京 100190; 2. 空间智能控制技术重点实验室, 北京 100190;

3. 钱学森空间技术实验室, 北京 100094)

**摘要:** 本文研究了航天器无拖曳控制系统的性能极限问题. 将空间环境扰动描述为一个阶跃分量、一个平稳随机分量和多个正弦分量的线性组合, 利用残余非保守力的稳态方差度量扰动抑制性能, 并运用Wiener-Hopf设计方法求解最小灵敏度函数. 为确保残余非保守力的渐近平稳性, 将最小灵敏度函数表示为反馈系统的频域拓扑结构, 并推导了闭环系统的极限指标. 结合无拖曳控制指标, 讨论了加速度计模式下的传感器、执行器的指标分解问题.

**关键词:** 无拖曳控制; 谱分解; Wiener-Hopf; 指标分解

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Performance limitations for spacecraft drag-free control system in the presence of multi-sinusoidal disturbance

ZOU Kui<sup>1,2†</sup>, GOU Xing-yu<sup>1,2</sup>, FAN Da<sup>3</sup>

(1. Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China;

2. Science and Technology on Space Intelligent Control Laboratory, Beijing 100190, China;

3. Qian Xueshen Laboratory of Space Technology, Beijing 100094, China)

**Abstract:** This paper is to contribute to the understanding of performance limitations for spacecraft drag-free control system. Environmental disturbance is modeled as a linear combination of a step component, a stationary stochastic component and several sinusoids with different frequencies. Disturbance rejection is measured by the steady-state variance of the residual non-gravitational force, and Wiener-Hopf design method is used to solve the minimizing sensitivity function. To guarantee the asymptotic stationarity of the residual non-gravitational force, the minimizing sensitivity function accounting for the topological structure of the feedback system is used to derive the limiting performance. By using the drag-free control requirement, performance budgeting of actuator and sensor in accelerometer mode are discussed.

**Key words:** drag-free control; spectral decomposition; Wiener-Hopf; performance budgeting

### 1 引言(Introduction)

本文研究航天器无拖曳控制系统的性能极限问题. 无拖曳控制是当前和未来若干空间任务中的一项关键技术, 尤其在科学模式阶段无拖曳控制扮演着重要角色. 随着无拖曳控制技术在引力探测器 B (gravity probe B, GP-B) 卫星、重力场与稳态洋流探测器 (gravity field and steady-state ocean circulation explorer, GOCE) 卫星和激光干涉空间天线探险者 (laser interferometer space antenna pathfinder, LISA pathfinder) 卫星中的应用, 毫无疑问的是无拖曳控制对传感器和执行器的指标要求均非常严格<sup>[1-2]</sup>. 以GOCE卫星为例, 要求无拖曳控制系统对测量频段的随机扰动抑

制精度优于 $0.025 (\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-2})/\text{Hz}^{1/2}$ , 从而要求配置静电引力梯度计、离子推力器在对应频段上的噪声指标分别优于 $2 \times 10^{-12} (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})/\text{Hz}^{1/2}$ 与 $5 \text{ mN}/\text{Hz}^{1/2}$  <sup>[1,3]</sup>. 理论上讲, 对于最小相位系统而言当传感器与执行器理想时, 系统输出的稳态方差可以被抑制到任意小的期望值<sup>[4]</sup>. 然而, 对于非最小相位系统即便配置有理想的传感器与执行器, 稳态输出方差也不能被抑制到任意小<sup>[4-5]</sup>. 事实上, 系统开环传递函数的非最小相位零点、不稳定极点和延时均对控制系统的极限性能与控制带宽强加一个基础约束, 从而致使控制系统的某种折中变得困难<sup>[6]</sup>. 对于扰动抑制问题, 文献[7]研究了单输入单输出 (single-input single-output, SISO)

收稿日期: 2016-08-03; 录用日期: 2017-01-11.

†通信作者. E-mail: iukzou@sina.com; Tel.: +86 13671097511.

本文责任编辑: 胡跃明.

国家自然科学基金项目(51505472)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (51505472).

不确定系统对单位输出扰动的抑制极限, 文献[8]研究了单输入多输出 (single-input multi-output, SIMO) 系统对脉冲输入扰动的抑制极限, 文献[9-11]等利用信息论方法研究了离散线性系统、随机切换系统对平稳随机扰动的抑制极限。

航天器无拖曳控制性能极限的研究包括: 1) 在已知回路中配置的传感器与执行器噪声指标的前提下, 求解无拖曳控制系统对扰动抑制的极限, 任何合理的无拖曳控制指标提法必不违背该性能极限约束; 2) 在未知传感器与执行器噪声指标的情形下, 探索所有可能实现这一无拖曳控制指标的传感器与执行器噪声性能配置, 即无拖曳控制系统部件噪声联合指标分解. 当反馈回路中无传感器噪声时, 文献[5]利用系统稳态输出方差度量对平稳随机扰动的抑制性能, 推导了系统带宽约束下的扰动抑制的极限. 由于航天器所受环境的拖曳是随机的和非平稳的, 采用文献[5]的相关结论分析无拖曳控制系统的性能极限是非常困难的. 目前关于无拖曳控制性能极限的研究尚未见到文献报道. 本文将空间环境扰动近似处理为一个阶跃分量、一个平稳随机分量和多个正弦分量的线性组合, 每个正弦分量具有不同的频率, 借鉴文献[4]中提出的 Wiener-Hopf 设计方法求解闭环系统的最小灵敏度函数, 并推导出对含多正弦扰动的抑制极限. 进一步结合无拖曳控制指标约束, 讨论加速度计模式下的传感器、执行器指标分解问题。

本文的符号含义:  $s$  表示 Laplace 变换算子, 有理传递函数矩阵  $M(s)$  的转置、共轭转置分别表示为  $M'(s)$  和  $M^*(s)$ , 右半复开平面、右半复闭平面、左半复开平面和左半复闭平面表示分别为  $\text{Re}(s) > 0$ ,  $\text{Re}(s) \geq 0$ ,  $\text{Re}(s) < 0$ ,  $\text{Re}(s) \leq 0$ ,  $\mathcal{E}\{\cdot\}$  表示取期望算子, 有理多项式传递函数  $a(s)$  的阶次表示为  $\deg a$ ,  $\mathcal{RH}_\infty$  表示所有有理传递函数构成的空间, 符号  $\|\cdot\|_2$  表示定义在  $\mathcal{RH}_\infty$  空间上的  $\mathcal{H}_2$  范数,  $O(\cdot)$  表示同阶无穷小。

## 2 问题描述(Problem statements)

### 2.1 无拖曳控制(Drag-free control)

航天器无拖曳控制系统由航天器本体及包含在其空腔中的测试质量构成, 封闭的空腔致使测试质量不受诸如大气阻力、太阳光压力等外界环境的干扰, 若忽略能够作用在测试质量上来自于航天器本体的摄动如自引力、杂散电磁耦合力和能够穿透这层屏蔽的摄动如由宇宙射线引起的库伦力、洛伦兹力等, 可以认为测试质量的轨道是相对较纯的引力轨道. 为了实现航天器的自由飞行, 作用在航天器上的所有非保守力和力矩必须被补偿, 即无拖曳控制<sup>[3, 12-14]</sup>. 实现航天器无拖曳飞行的一种方案是让航天器跟踪测试质量, 即位移模式. 位移模式下测试质量与航天器之间的相对位移可由位移传感器测量而得, 同时二者之间的耦合作用是必不可少的, 通常可用一个具有负刚度

特性的弹簧来近似等效这种耦合作用. 对于精度要求极高的空间任务如演变的激光干涉空间天线(evolved LISA, eLISA)卫星等, 还必须考虑自引力梯度对负刚度的贡献. 测试质量与航天器之间的负刚度致使开环传递函数在右半复平面上具有一个极点, 该不稳定的极点只有在开环传递函数具有非最小相位环节时才会影响系统的极限性能<sup>[15]</sup>. 另一种方案是加速度计模式, 即让测试质量跟踪航天器, 测试质量是主动受控的且与航天器之间构成一台悬浮加速度计, 该加速度计的读数能客观反映航天器的残余非保守力加速度的大小, 然后反馈加速度计的读数给无拖曳控制器对其进行补偿。

图1表示无拖曳控制系统的原理框图, 图中  $M$ ,  $m$  分别表示航天器与测试质量的质量,  $\vec{G}_{SC}$ ,  $\vec{G}_{TM}$  分别表示航天器和测试质量所受天体的引力,  $\vec{r} - \vec{R}$  表示测试质量相对于航天器的相对位移,  $\vec{d}_{ext}$  表示除推力器噪声外的所有作用在航天器上的非保守力,  $\vec{d}_{int}$  表示作用在测试质量上的扰动力. 图1中加速度计模式下的反馈用虚线表示, 位移模式下的反馈用实线表示.  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$ ,  $\vec{n}_3$  分别表示推力器噪声、位置传感器噪声和加速度计读数噪声。

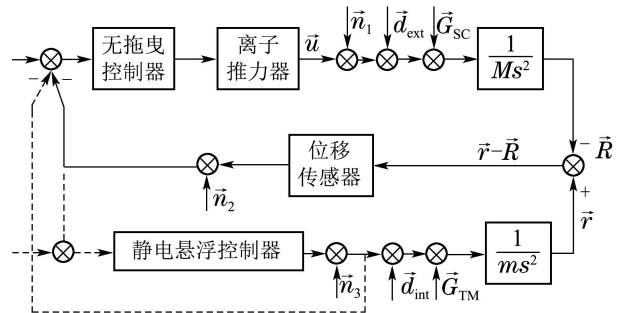


图1 航天器无拖曳控制系统基本框图

Fig. 1 Diagram of drag-free translation control system

### 2.2 扰动建模(Modeling of the disturbance)

对于低轨飞行的航天器, 热层大气的拖曳力是最主要的摄动源, 必须用一个非平稳的随机过程对其进行建模<sup>[16]</sup>. 参照文献[17]提出的分量式结构可将非平稳随机过程描述如下:

$$d(t) = d_0(t) + d_p(t) + d_s(t), \quad (1)$$

其中:  $d_0(t)$  表示慢时变分量或趋势分量,  $d_p(t)$  表示周期分量,  $d_s(s)$  表示平稳随机分量. 为了便于理论推导且不失工程意义, 本文将  $d_0(t)$  处理为直流分量,  $d_p(t)$  处理为多正弦分量叠加的形式:

$$d_p(t) = \sum_{i=1}^n (a_i \sin(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)), \quad (2)$$

其中:  $\omega_i$  为正弦扰动的频率且  $\omega_i \neq \omega_j (i \neq j)$ ,  $a_i, b_i$  为常值, 反映了幅值与相位信息. 由于将  $d_0(t)$ ,  $d_p(t)$  处理为确定信号, 其功率谱将在特征频点奇异, 并构成  $d(t)$  功率谱中的奇异部分<sup>[18]</sup>.

2.3 性能指标(Performance index)

不失一般性, 考虑如图2所示的SISO反馈系统. 图中:  $P(s)$ 为被控对象,  $T(s)$ 为执行器动力学,  $H(s)$ 为传感器动力学,  $N_1(s), N_2(s)$ 分别为执行器与传感器噪声传递函数,  $n_1, n_2$ 为驱动白噪声,  $u, d, e$ 和 $y$ 分别表示执行器输出、大气拖曳、残余非保守力和系统输出. 表示 $n_1, n_2, u, d, e$ 和 $y$ 的有理谱密度分别为 $G_{n_1}(-s^2), G_{n_2}(-s^2), G_u(-s^2), G_d(-s^2), G_e(-s^2)$ 和 $G_y(-s^2)$ .

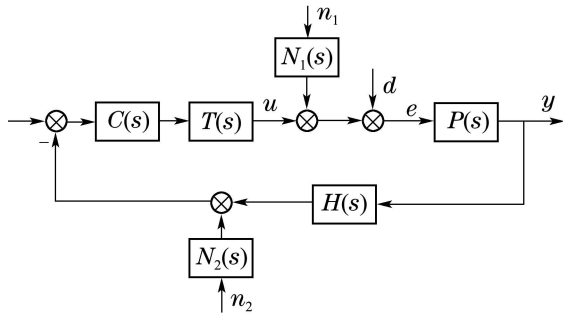


图2 SISO反馈系统  
Fig. 2 SISO feedback system

**假设 1**  $n_1, n_2$ 和 $d$ 两两相互独立;

**假设 2**  $P(s), T(s), H(s), N_1$ 和 $N_2$ 是有理传递函数,  $T(s), H(s), N_1$ 和 $N_2$ 在 $\text{Re}(s) \geq 0$ 上解析且 $P(s), T(s)$ 和 $H(s)$ 没有共同的非最小相位零点. 同时称 $P(s), T(s)$ 和 $H(s)$ 是容许的.

假设执行器输出为 $u(s)$ , 残余非保守力为

$$e(s) = u(s) + d(s) + n_1(s). \quad (3)$$

采用残余非保守力的方差度量扰动抑制性能

$$E_e = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \mathcal{E}\{e^*(s)e(s)\}ds. \quad (4)$$

考虑推力器受最大推力速率的约束, 在指标中可对推力速率进行惩罚

$$E_u = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Q(-s^2)\mathcal{E}\{u^*(s)u(s)\}ds, \quad (5)$$

其中:  $Q(-s^2) = -s^2/(-s^2/\omega_q^2 + 1)$ , 要求 $\omega_q$ 大于最大拖曳力变化率的频率, 于是

$$E = E_e + kE_u. \quad (6)$$

根据图2可得

$$e(s) = S(d + N_1n_1) - (1 - S)\frac{N_2}{PH}n_2, \quad (7)$$

$$u(s) = -(1 - S)(d + N_1n_1 + \frac{N_2}{PH}n_2), \quad (8)$$

其中 $S(s)$ 为闭环灵敏度函数:

$$S = \frac{1}{1 + TPHC}. \quad (9)$$

将式(7)-(8)代入式(6)得

$$2\pi jE = \int_{-j\infty}^{j\infty} S^*SG_a ds +$$

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} (1 - S^*)(1 - S)G_b ds, \quad (10)$$

其中:

$$G_a = G_d + N_1^*N_1G_{n_1}, \quad (11)$$

$$G_b = \frac{N_2^*N_2}{P^*PH^*H}G_{n_2} + kQ(G_d + N_1^*N_1G_{n_1} + \frac{N_2^*N_2}{P^*PH^*H}G_{n_2}). \quad (12)$$

位移模式下 $P(s)$ 可近似处理为自由谐振子 $P(s) = 1/(s^2 + \omega^2)^{[19]}$ , 由于静电负刚度的存在导致 $\omega^2 < 0$ ,  $H(s) = 1, N_2(s) = 1 + s^{-1}$ ; 加速度计模式下为确保内环加速度计稳定, 首先须通过静电悬浮控制器镇定测试质量与航天器之间的相对运动, 然后利用无拖曳控制器补偿环境拖曳力. 此时 $P(s) = M^{-1}$ , 加速度计对构成的重力梯度仪的动力学可描述为 $H(s) = (\alpha ps + p^2)/(s^2 + \alpha ps + p^2)^{-1}$ , 梯度仪的噪声分为高频、中频和低频3个部分, 对应的噪声驱动模型为 $N_{21} = s^2/(s^2 + \alpha ps + p^2)^{-1}, N_{22} = (\alpha ps + p^2)/(s^2 + \alpha ps + p^2)^{-1}, N_{23} = s^{-1}$ . 它们分别被白噪声 $n_{21}, n_{22}$ 和 $n_{23}$ 驱动<sup>[1]</sup>. 实际中加速度计、位移桥电路的低频偏差与漂移噪声谱均是 $1/f$ 噪声, 由于其谱不是有理的, 为处理方便利可用能对其谱线进行包络的随机游走模型近似.

$$\text{令 } P(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)}, H(s) = \frac{n_h(s)}{d_h(s)}, T(s) = \frac{n_t(s)}{d_t(s)},$$

$C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$ , 图2所示闭环系统的稳定性必须要求特征方程

$$\Delta(s) = d_p(s)d_h(s)d_t(s)d_c(s) + n_p(s)n_h(s)n_t(s)n_c(s) \quad (13)$$

是严格Hurwitz的, 即在 $\text{Re}(s) \geq 0$ 上没有零点.

**定义 1** 若存在控制器 $C(s)$ 使得由 $P(s), T(s)$ 和 $H(s)$ 构成的闭环系统渐近稳定且具有灵敏度函数 $S(s)$ , 那么称 $S(s)$ 是可实现的.

**引理 1** 对于传递函数 $P(s), T(s)$ 和 $H(s)$ , 灵敏度函数 $S(s)$ 是可实现的当且仅当: 1)  $S(s)$ 在 $\text{Re}(s) \geq 0$ 上解析; 2) 多项式 $d_p(s)d_h(s)d_t(s)$ 在 $\text{Re}(s) \geq 0$ 上的零点是 $S(s)$ 的零点, 至少具有相同的重数; 3) 多项式 $n_p(s)n_h(s)n_t(s)$ 在 $\text{Re}(s) \geq 0$ 上的零点是 $1 - S(s)$ 的零点, 至少具有相同的重数<sup>[4]</sup>.

**假设 3**  $\omega$ 很大时,  $G_b(-s^2) = O(\omega^{2l}), l \geq 0$ .

**假设 4**  $\omega$ 很大时,  $G_a(-s^2) = O(\omega^{-2v}), v \geq 0$ .

**假设 5**  $T(s)$ 在虚轴上无零点且 $P(s)H(s)$ 在虚轴上的零点 $j\omega_x \neq \pm j\omega_i$ .

**假设 6**  $G_a(s) + G_b(s)$ 在 $j\omega$ 轴上非零.

下面推导使指标(6)最小的灵敏度函数并计算极限

指标.

### 3 Wiener-Hopf求解(Wiener-Hopf solving)

**定义 2** 如果一个随机过程  $x(t)$  满足: 1) 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $E_x(t) \rightarrow 0$ ; 2) 当  $t \rightarrow \infty$  时, 对于所有的  $\tau$  极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{cov}(x(t)x(t+\tau)) = \sigma(\tau)$  都存在, 那么称随机过程  $x(t)$  是渐近平稳的. 该定义表明时间无穷大时, 随机过程的期望趋于零且协方差函数存在, 更多详细信息可参考文献[9].

任意有理传递函数  $A(s)$  可以进行Laurent展开, 将其在  $\text{Re } s \geq 0$  上解析的部分表示为  $\{A(s)\}_+$ , 其余部分表示为  $\{A(s)\}_-$ , 于是有

$$A(s) = \{A(s)\}_+ + \{A(s)\}_-. \quad (14)$$

**定理 1** 令

$$n(s) = n_h(s)n_t(s)n_p(s), \quad (15)$$

$$d(s) = d_h(s)d_t(s)d_p(s), \quad (16)$$

$$\chi(s) = d(s)n(s). \quad (17)$$

将  $\chi(s)$  分解为

$$\chi(s) = \chi_l(s)\chi_r(s), \quad (18)$$

其中: 多项式  $\chi_l(s)$  表示包括  $\chi$  在  $\text{Re}(s) < 0$  上的所有零点,  $\chi_r(s)$  包括  $\chi(s)$  在  $\text{Re}(s) \geq 0$  上的所有零点. 令

$$\varphi(s) = s \prod_{i=1}^n (s^2 + \omega_i^2), \quad (19)$$

进行谱分解

$$\varphi\varphi^* \chi_r \chi_r^* (G_a + G_b) = \Omega \Omega^*, \quad (20)$$

其中  $\Omega$  在  $\text{Re}(s) > 0$  上没有零点和极点, 在假设条件1-5 成立的前提下, 有

1) 最小的灵敏度函数为

$$S_m = \varphi \frac{\left\{ \frac{\chi_r \chi_r^* \varphi^* G_b}{\Omega^*} \right\}_+ + f}{\Omega}, \quad (21)$$

$f(s)$  是一个实系数多项式, 可由  $E < \infty$  和  $S_m(s)$  是可实现的唯一确定.

2) 最小灵敏度函数  $S_m(s)$  的实现

$$C_m(s) = \frac{1 - S_m(s)}{P(s)T(s)F(s)S_m(s)}, \quad (22)$$

$C_m(s)$  是最优的控制器, 虽然  $C_m(s)$  可以是非正则的、不稳定的, 但是闭环结构总是稳定的, 而且灵敏度函数  $S_m(s)$  是正则的且在  $\text{Re } s \geq 0$  上解析.

**证** 候选的灵敏度函数  $S(s)$  必须是可实现的, 为确保残余非保守力是渐近平稳的, 灵敏度函数的分子必须包含因子  $\varphi(s) = s \prod_{i=1}^n (s^2 + \omega_i^2)$  以渐近补偿扰动中的直流分量和正弦分量. 假设最小灵敏度函数为  $S_m(s)$ ,  $\varepsilon$  为任意实数, 则  $S(s)$  可以表示为

$$S(s) = S_m(s) + \varepsilon \chi_r(s) \varphi(s) \delta(s), \quad (23)$$

其中  $\delta(s)$  在  $\text{Re } s \geq 0$  上解析, 容易检验  $S(s)$  是可实现的. 因  $\chi_r(s) = n_r(s)d_r(s)$ , 其中  $d_r(s), n_r(s)$  分别为包含多项式  $d_p(s)d_h(s)d_t(s), n_p(s)n_h(s)n_t(s)$  在  $\text{Re } s \geq 0$  上零点的多项式. 显然多项式  $d_r(s)$  的零点是  $S(s)$  的零点, 多项式  $n_r(s)$  的零点是  $1 - S(s)$  的零点.  $\delta(s)$  的相对阶要求足够高以确保  $S(s)$  是正则的. 将  $S(s)$  代入式(11)中, 再让  $E$  对  $\varepsilon$  求变分, 有

$$\frac{dE}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (24)$$

注意到

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} A^*(s) ds = \int_{-j\infty}^{j\infty} A(s) ds, \quad (25)$$

那么

$$\pi j \frac{dE}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 2 \int_{-j\infty}^{j\infty} X^*(s) \delta^* ds, \quad (26)$$

其中

$$X^*(s) = S_m(\chi_r \varphi)^* (G_a + G_b) - (\chi_r \varphi)^* G_b. \quad (27)$$

由于  $\delta^*(s)$  在  $\text{Re } s \leq 0$  上解析, 要求  $X^*(s)$  必须在  $\text{Re } s \leq 0$  上解析, 先假设这个条件成立, 后面再进行检验. 对式(27)同乘  $\chi_r$  得

$$S_m \varphi^* \chi_r \chi_r^* (G_a + G_b) - \chi_r \chi_r^* \varphi^* G_b = \chi_r X^*(s). \quad (28)$$

进行谱分解

$$\chi_r \chi_r^* (G_a + G_b) = \frac{\Omega \Omega^*}{\varphi \varphi^*}. \quad (29)$$

根据假设6可知  $\Omega$  在  $\text{Re } s = 0$  上没有零点, 注意到  $G_a + G_b$  在  $j\omega$  轴上不解析的模态都被  $\varphi \varphi^*$  抵消, 故  $\Omega$  在  $\text{Re } s = 0$  上也没有极点. 因此, 谱分解式(29)总是可确保  $\Omega$  在  $\text{Re } s \geq 0$  上既没有零点也没有极点, 那么

$$S_m \frac{\Omega}{\varphi} - \frac{\chi_r \chi_r^* \varphi^* G_b}{\Omega^*} = \frac{\chi_r X^*(s)}{\Omega^*}. \quad (30)$$

式(30)可重写为

$$S_m \frac{\Omega}{\varphi} - \left\{ \frac{\chi_r \chi_r^* \varphi^* G_b}{\Omega^*} \right\}_+ = \left\{ \frac{\chi_r \chi_r^* \varphi^* G_b}{\Omega^*} \right\}_- + \frac{\chi_r X^*(s)}{\Omega^*}. \quad (31)$$

将上式左边记为  $f(s)$ , 由于  $S_m \Omega$  在  $\text{Re } s \geq 0$  上解析, 上面等式左边表明  $\varphi(s)f(s)$  在  $\text{Re } s \geq 0$  上解析, 而等式右边表明  $\varphi(s)f(s)$  在  $\text{Re } s < 0$  上解析, 因此  $\varphi(s)f(s)$  在整个复平面上解析, 即  $\varphi(s)f(s)$  是实系数多项式. 那么, 最小灵敏度函数可表示为

$$S_m = \varphi \frac{\{\Psi\}_+ + f}{\Omega}, \quad (32)$$

$$\Psi = \frac{\chi_r \chi_r^* \varphi^* G_b}{\Omega^*}, \quad (33)$$

显然 $S_m(s)$ 在 $\text{Re } s \geq 0$ 上解析.

令

$$\left\{ \frac{\chi_r \chi_r^* \varphi^* G_b}{\Omega^*} \right\}_+ = \frac{h(s)}{g(s)}, \quad \Omega = \frac{a(s)}{b(s)}, \quad (34)$$

那么

$$S_m = \frac{\varphi(s)h(s)b(s) + \varphi(s)f(s)g(s)b(s)}{a(s)g(s)}. \quad (35)$$

容易验证

$$\deg g \geq \deg h, \quad (36)$$

$$\deg a = \deg b + \deg \chi_r + \deg \varphi + l. \quad (37)$$

为保证 $S_m$ 是正则的, 必须要求

$$\deg a + \deg g \geq \max\{\deg(\varphi h b), \deg(\varphi f g b)\}, \quad (38)$$

于是可得

$$\deg f \leq \deg \chi_r + l. \quad (39)$$

为了保证 $E < \infty$ , 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 有

$$S_m^*(j\omega)S_m(j\omega)G_a(\omega^2) \rightarrow 0, \quad (40)$$

$$(1 - S_m^*(j\omega))(1 - S_m(j\omega))G_b(\omega^2) \rightarrow 0. \quad (41)$$

再结合假设3和4可知 $1 - S_m^*(j\omega) = O(\omega^{-(l+1)})$ , 这表明补灵敏度函数的相对阶大于 $l + 1$ . 为了确保 $S_m(s)$ 是可实现的, 根据引理1并结合条件 $(1 - S_m^*(j\omega)) = O(\omega^{-(l+1)})$ , 共 $\deg \chi_r + l + 1$ 个约束, 如果取 $\deg f = \deg \chi_r + l$ 就可唯一确定多项式 $f(s)$ .

下面检验 $X^*(s)$ 在 $\text{Re } s \leq 0$ 上解析. 将式(32)代入式(27)中, 得

$$X^*(s) = \frac{\{\Psi\}_+ + f \Omega \Omega^*}{\Omega} \frac{\Omega^*}{\chi_r} - \frac{\Omega^*}{\chi_r} \Psi = \frac{\Omega^*}{\chi_r} (f - \Psi_-). \quad (42)$$

由此可见 $X^*(s)$ 在 $\text{Re } s < 0$ 内解析, 下面只需要进一步说明 $X^*(s)$ 在 $j\omega$ 轴上也是解析的. 因此, 要求 $\chi_r(s)$ 和 $f(s) - \Psi_-(s)$ 在 $j\omega$ 轴上的零点相同, 当选择 $f(s)$ 使得 $S_m(s)$ 是可实现的, 这自然使得 $X^*(s)$ 在 $j\omega$ 轴上也是解析的. 说明如下: 假设 $s = j\omega_x$ 是 $\chi_r(s)$ 的 $\mu$ 重零点, 根据假设2和5,  $s = j\omega_x$ 要么是 $P(s)$ 的极点, 要么是 $P(s)H(s)$ 的零点. 下面分情况讨论: 1) 假设 $s = j\omega_x$ 是 $P(s)$ 的极点, 那么最小灵敏度函数 $S_m$ 具有 $\mu$ 重零点 $s = j\omega_x$ , 注意到

$$(f + \Psi_+) \varphi = (\Psi + f - \Psi_-) \varphi. \quad (43)$$

又因 $P(s)$ 的极点是 $G_b$ 的零点, 因此 $\Psi$ 至少具有 $\mu$ 重零点, 那么 $f - \Psi_-$ 也至少具有 $\mu$ 重零点 $s = j\omega_x$ . 2) 假设 $s = j\omega_x$ 是 $P(s)H(s)$ 的 $\nu$ 重零点, 那么 $1 - S_m$ 必须具有

$\nu$ 重零点 $s = j\omega_x$ , 又因

$$1 - S_m = 1 - \frac{\Psi}{\Omega} \varphi - \frac{f - \Psi_-}{\Omega} \varphi, \quad (44)$$

于是

$$1 - \frac{\Psi}{\Omega} \varphi = \frac{G_a}{(G_a + G_b)}. \quad (45)$$

结合式(11)-(12), 可知上式右边具有 $\nu$ 重零点 $s = j\omega_x$ , 因此 $1 - \frac{\Psi}{\Omega} \varphi$ 必须具有零点 $s = j\omega_x$ , 从而可知 $f - \Psi_-$ 必须具有 $\nu$ 重零点 $s = j\omega_x$ . 于是 $X^*(s)$ 在 $\text{Re } s \leq 0$ 内解析. 证毕.

为计算极限指标, 可令 $k = 0$ 并将 $G_a(-s^2)$ 和 $G_b(-s^2)$ 进行有理谱分解

$$G_a(-s^2) = \alpha^*(s)\alpha(s), \quad (46)$$

$$G_b(-s^2) = \beta^*(s)\beta(s), \quad (47)$$

于是极限指标可以表示为

$$E_m = \|S_m \alpha(s)\|_2^2 + \|(1 - S_m)\beta(s)\|_2^2. \quad (48)$$

任何设定的无拖曳控制指标 $\gamma^2$ 必须满足

$$\gamma^2 \geq E_m. \quad (49)$$

#### 4 算例(Example)

以重力梯度测量卫星为例, 仅考虑沿飞行方向的无拖曳控制, 图2中各传递函数为

$$T(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(s/\omega_t)^2 + 2\zeta_t(s/\omega_t) + 1}, \quad (50)$$

$$N_1(s) = \frac{s/\omega_1 + 1}{(s/\omega_2 + 1)(s/\omega_t + 1)}, \quad (51)$$

$$P(s) = \frac{1}{M}, \quad (52)$$

$$H(s) = \frac{\alpha p s + p^2}{s^2 + \alpha p s + p^2}, \quad (53)$$

$$N_{21}(s) = \frac{1}{s}, \quad (54)$$

$$N_{22}(s) = \frac{\alpha p s + p^2}{s^2 + \alpha p s + p^2}, \quad (55)$$

$$N_{23}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \alpha p s + p^2}, \quad (56)$$

其中:

$$\tau = 0.01 \text{ s}, \quad \zeta_t = 0.7, \quad (2\pi)^{-1}\omega_t = 10 \text{ Hz},$$

$$(2\pi)^{-1}\omega_1 = 0.28 \text{ Hz}, \quad (2\pi)^{-1}\omega_2 = 2.8 \text{ mHz},$$

$$\alpha = 1.4, \quad (2\pi)^{-1}p = 20 \text{ Hz}, \quad M = 1000 \text{ kg}.$$

$N_1(s)$ ,  $N_{21}(s)$ ,  $N_{22}(s)$ 和 $N_{23}(s)$ 分别被高斯白噪声 $n_1$ ,  $n_{21}$ ,  $n_{22}$ 和 $n_{23}$ 驱动. 假设梯度计的联合驱动噪声 $n_{21}$ ,  $n_{22}$ 和 $n_{23}$ 能保证梯度计的有效测量带宽为5 mHz至0.1 Hz, 记 $n_1$ ,  $n_{21}$ ,  $n_{22}$ 和 $n_{23}$ 的方差分别为 $\sigma_1^2$ ,

$\sigma_{21}^2, \sigma_{22}^2$  和  $\sigma_{23}^2$ , 那么各频段的驱动噪声方差比为

$$\sigma_{21}^2/\sigma_{22}^2 = 1.588 \times 10^{-4},$$

$$\sigma_{23}^2/\sigma_{22}^2 = 6.434 \times 10^9.$$

对于低轨飞行的重力梯度测量卫星, 主要考虑由轨道周期引起的直流分量、地球非球形摄动  $J_2, J_3$  项引起的正弦分量和中高频轨道摄动引起的随机分量, 假设大气拖曳各分量为

$$d_0(t) = -8 \times 10^{-3}, \quad (57)$$

$$d_1(t) = -3 \times 10^{-3} \sin(\omega_0 t), \quad (58)$$

$$d_2(t) = 2 \times 10^{-3} \cos(2\omega_0 t), \quad (59)$$

其单位是N. 当  $f > 5\omega_0(2\pi)^{-1} \approx 1$  mHz时, 引力异常的谱密度具有  $-(40 \div 20)$  dB/dec的下降斜率, 导致大气拖曳的谱密度同样具有  $-(40 \div 20)$  dB/dec的下降斜率, 因此假设随机分量模型为

$$N_s(s) = \frac{s/\omega_n + 1}{(s/\omega_s + 1)^2}, \quad (60)$$

其中:  $\omega_s = 2\pi f_s, f_s > 1$  mHz,  $(2\pi)^{-1}\omega_n = 0.03$  Hz.  $N_s(s)$ 由白噪声  $n_s$  驱动, 方差为  $\sigma_s^2 = 1.5915 \times 10^{-4}$ . 进行谱分析可得大气拖曳力的单边功率谱密度平方根曲线如图3所示, 大气拖曳力的功率谱密度函数为

$$G_d = \mathcal{A}, \quad (61)$$

其中:

$$\mathcal{A} = 2.9822 \times 10^{-9} p_1(s)p_1(-s)p_2(s)p_2(-s) \cdot$$

$$p_3(s)p_3(-s)p_4(s)p_4(-s)/$$

$$p_5(s)p_5(-s)\varphi(s)\varphi(-s),$$

$$p_1(s) = s + 0.1621,$$

$$p_2(s) = s + 0.01195,$$

$$p_3(s) = s^2 + 0.001809s + 1.558 \times 10^{-6},$$

$$p_4(s) = s^2 + 0.001113s + 4.531 \times 10^{-6},$$

$$p_5(s) = s^2 + 0.08796s + 0.003948,$$

$$\varphi(s) = s(s^2 + 1.579 \times 10^{-6})(s^2 + 6.317 \times 10^{-6}).$$

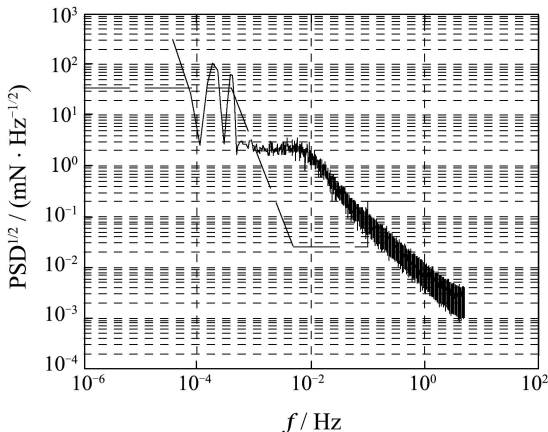


图3 大气拖曳力的PSD<sup>1/2</sup>曲线  
Fig. 3 PSD<sup>1/2</sup> curve of the airdrag

令执行器与传感器的驱动白噪声  $n_1, n_2$  的单边功率谱密度分别记为  $\gamma_1^2, \gamma_2^2$ , 那么

$$G_a = G_d + \frac{-0.003231s^2 + 1}{0.8184s^4 - 3231s^2 + 1} \cdot \gamma_1^2, \quad (62)$$

$$G_b = \frac{2.0788 \times 10^{11} q_1(s)q_1(-s)q_2(s)q_2(-s)}{s^2(s - 89.76)(s + 89.76)} \cdot \gamma_2^2, \quad (63)$$

其中:

$$q_1(s) = s + 0.0126,$$

$$q_2(s) = s^2 + 0.6274s + 0.1969.$$

由此可知  $l = 1$ . 将执行器动力学的延时环节用一阶 Padé 近似,

$$e^{-s\tau} = \frac{-\tau s/2 + 1}{\tau s/2 + 1}, \quad (64)$$

$$\text{易知 } \chi_r(s) = \frac{s - 200}{200}.$$

取  $\gamma_1 = 5$  mN/Hz<sup>1/2</sup>,  $\gamma_2 = 2 \times 10^{-12}$  (m \cdot s<sup>-2</sup>)/Hz<sup>1/2</sup>, 并对  $\chi_r \chi_r^*(G_a + G_b)$  进行谱分解, 得

$$\Omega = \frac{4.5594 \times 10^{-9} \prod_{i=0}^7 r_i(s)}{(s + 89.76)(s + 62.83)(s + 0.01759)p_5(s)}, \quad (65)$$

其中:

$$r_0(s) = s + 200,$$

$$r_1(s) = s + 63.06,$$

$$r_2(s) = s + 17.49,$$

$$r_3(s) = s + 0.004023,$$

$$r_4(s) = s^2 + 0.001934s + 1.769 \times 10^{-6},$$

$$r_5(s) = s^2 + 0.001176s + 4.691 \times 10^{-6},$$

$$r_6(s) = s^2 + 0.1221s + 0.003802,$$

$$r_7(s) = s^2 + 28.75s + 580.5.$$

此时,

$$\left\{ \frac{\chi_r \chi_r^* \varphi^* G_b}{\Omega^*} \right\}_+ = \frac{0.00243}{s + 89.76}. \quad (66)$$

应用定理1可得最小灵敏度函数为

$$S_m = \varphi \frac{\left\{ \frac{\chi_r \chi_r^* \varphi^* G_b}{\Omega^*} \right\}_+ + f}{\Omega},$$

其中多项式  $f(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ , 最小灵敏度函数  $S_m(s)$  必须满足满足条件

$$1 - S_m(200) = 0, \quad (67)$$

$$1 - S_m(s) = O\left(\frac{1}{s^2}\right). \quad (68)$$

结合式(67)和式(68)可唯一确定多项式  $f(s)$  的系数, 于是  $a_2 = 4.559 \times 10^{-9}$ ,  $a_1 = 7.144 \times 10^{-7}$ ,  $a_0 =$

$-1.625 \times 10^{-5}$ . 那么最小灵敏度函数为

$$S_m = \frac{\varphi b(h + gf)}{ag}, \quad (69)$$

其中:

$$a(s) = 4.5594 \times 10^{-9}(s+200)(s+63.06)(s+17.49) \cdots (s+0.004023)(s^2+0.001934s+1.769 \times 10^{-6}) \cdots (s^2+0.1221s+0.003802)(s^2+28.75s+580.5) \cdots (s^2+0.001176s+4.691 \times 10^{-6}),$$

$$b(s) = (s+89.76)(s+62.83)(s+0.01759) \cdots (s^2+0.08796s+0.003948),$$

$$h(s) = 0.00243,$$

$$g(s) = s + 89.76.$$

图4中反映了最小灵敏度函数与补灵敏度函数的幅值对数曲线, 可见大气拖曳的直流分量和低频正弦分量均被补偿, 补灵敏度函数  $1 - S_m(s)$  无法消除传感器低频漂移与偏差, 在实际的工程中只能容忍这些偏差与漂移. 下面计算残余非保守力的性能极限, 根据式(46)–(48)得到

$$\alpha(s) = \frac{0.00031887r_3(s)r_4(s)r_5(s)r_6(s)r_8(s)}{(s+62.83)(s+0.01759)p_5(s)}, \quad (70)$$

$$\beta(s) = \frac{9.1187 \times 10^{-7}q_1(s)q_2(s)}{s(s+89.76)}, \quad (71)$$

其中  $r_8(s) = s + 20.4$ . 由于  $\beta(s)$  中含有积分因子  $s^{-1}$ , 直接采用式(48)计算极限性能将导致  $E_m \rightarrow \infty$ , 一个有效的办法是用  $(s + \varepsilon)^{-1}$  代替该积分, 这里取  $\varepsilon$  为很小的数, 取  $\varepsilon = 1 \times 10^{-12}$  得

$$\beta_1(s) = \frac{9.1187 \times 10^{-7}q_1(s)q_2(s)}{(s + \varepsilon)(s + 89.76)}.$$

扰动抑制极限为

$$E_m \approx \|S_m \alpha(s)\|_2^2 + \|(1 - S_m)\beta_1(s)\|_2^2 = 2.144 \times 10^{-9},$$

于是当离子推力器与梯度计的噪声指标分别取为  $\gamma_1 = 5 \text{ mN/Hz}^{1/2}$ ,  $\gamma_2 = 2 \times 10^{-12} (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})/\text{Hz}^{1/2}$  时的性能极限  $E_m = 2.144 \times 10^{-9}$ . 因此, 当部件联合噪声指标  $(\gamma_1, \gamma_2) = (5 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-12})$ , 合理的无拖曳控制时域指标(稳态残余非保守力的方差  $\gamma^2$ ) 必须满足

$$\gamma^2 \geq 2.144 \times 10^{-9}. \quad (72)$$

通过式(48)可以计算出部件联合噪声指标  $(\gamma_1, \gamma_2)$  的范围, 下面针对最小灵敏度函数  $S_m(s)$  对部件联合噪声指标  $(\gamma_1, \gamma_2)$  进行指标分解.

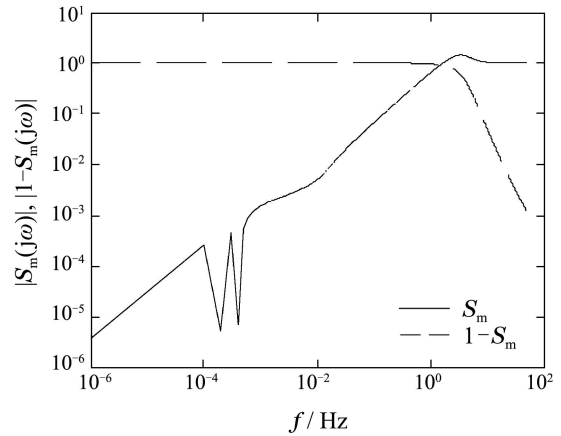


图 4 最小灵敏度函数的幅值对数曲线

Fig. 4 Magnitude of the minimum sensitivity function in dual-logarithm axes

对大气拖曳进行谱分解

$$G_d = \alpha_1(s)\alpha_1^*(s) \quad (73)$$

并假设无拖曳控制指标  $\gamma^2$  是合理的, 那么

$$\|S_m \alpha_1\|_2^2 + \|S_m N_1\|_2^2 \gamma_1^2 + \|(1 - S_m)N_2(s)\|_2^2 \gamma_2^2 \leq \gamma^2. \quad (74)$$

显然, 满足无拖曳控制时域指标约束的部件联合噪声指标分布在一个扇形区域内, 如图 5 所示. 这表明, 只要配置无拖曳控制系统中的传感器与执行器的联合噪声指标分布在对应的扇形内, 总是可以找到灵敏度函数满足无拖曳控制时域指标.

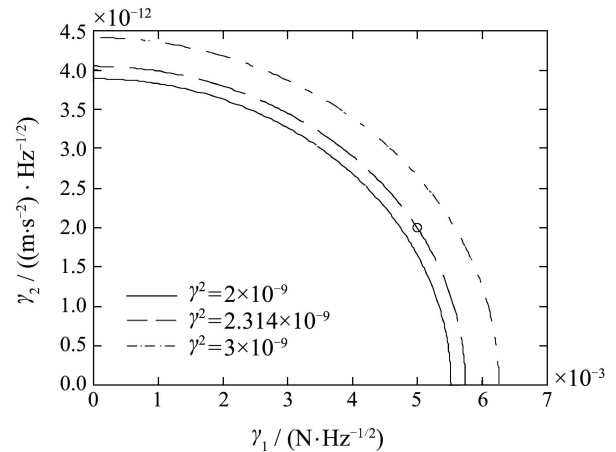


图 5 部件联合噪声指标分布区域

Fig. 5 Performance budgeting of sensor and actuator noise

## 5 结论(Conclusions)

本文研究了航天器无拖曳控制系统的性能极限问题, 将环境拖曳描述为一个阶跃分量、一个平稳随机分量和多个正弦分量的线性组合, 得出如下结论: 1) 运用Wiener-Hopf设计方法推导了闭环控制回路的最小灵敏度函数表达式, 推导过程适用于最小相位/非最小相位系统、稳定/不稳定的系统; 2) 利用残余非保守力的稳态方差度量扰动抑制性能, 导出了扰动抑制

性能极限的表达式; 3) 对无拖曳控制系统加速度计工作模式下的传感器、执行器的噪声进行指标分解。

### 参考文献(References):

- [1] CANUTO E, MASSOTTI L. All-propulsion design of the drag-free and attitude control of the European satellite GOCE [J]. *Acta Astronautica*, 2009, 64(2/3): 325 – 344.
- [2] ARMANO M, AUDLEY H, AUGERC G, et al. The LISA pathfinder mission [J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2015, 610(1): 1 – 18.
- [3] CANUTO E. Drag-free and attitude control for the GOCE satellite [J]. *Automatica*, 2008, 44(7): 1766 – 1780.
- [4] YOULA D C, BONGIORNO J J, JABR H A. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers, part I: the single-input-output case [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, 21(1): 3 – 13.
- [5] DAVISON D E, KABAMBA P T, MEERKOV S M. Limitations of disturbance rejection in feedback systems with finite bandwidth [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(6): 1132 – 1144.
- [6] MIDDLETON R H. Trade-offs in linear control system design [J]. *Automatica*, 1991, 27(2): 281 – 292.
- [7] GOODWIN G C, SALGADO M E, YUZ J I. Performance limitations for linear feedback system in the presence of plant uncertainty [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(8): 1312 – 1319.
- [8] BAKHTIAR T, HARA S.  $H_2$  regulation performance limitations for SIMO linear time-invariant feedback control systems [J]. *Automatica*, 2008, 44(3): 659 – 670.
- [9] MARTINS N C, DAHLEH M A, DOYLE J C. Fundamental limitations of disturbance attenuation in the presence of side information [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 52(1): 56 – 66.
- [10] MARTINS N C, DAHLEH M A. Feedback control in the presence of noisy channel: “Bode-like” fundamental limitations of performance [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(7): 1604 – 1615.
- [11] LI D P, HOVAKIMYAN N. Bode-like integral for stochastic switched systems in the presence of limited information [J]. *Automatica*, 2013, 49(1): 1 – 8.
- [12] LANGE B. The drag-free satellite [J]. *AIAA Journal*, 1964, 2(9): 1590 – 1606.
- [13] LI J, BENCZE W J, DEBRA D B, et al. On-orbit performance of gravity probe B drag-free translation control and orbit determination [J]. *Advances in Space Research*, 2007, 40(1): 1 – 10.
- [14] GUILHERME M S, FILHO W C L, THEIL S. Strategies for in-orbit calibration of drag-free control systems [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2008, 12(5): 365 – 375.
- [15] CHEN J, QIU L, TOKER O. Limitations on maximal tracking accuracy [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(2): 326 – 331.
- [16] CANUTO E, MOLANO A, MASSOTTI L. Drag-free control of the GOCE satellite: noise and observer design [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, 18(2), 501 – 509.
- [17] NG C N, YOUNG P C. Recursive estimation and forecasting of non-stationary time series [J]. *Journal of Forecasting*, 1990, 9(9): 173 – 204.
- [18] ASTROM K J. *Introduction to Stochastic Control Theory* [M]. New York and London: Academic Press, 1970.
- [19] FICHTER W, SCHEICHER A. Closed loop performance and limitations of the LISA pathfinder drag-free control system [C] // *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. Hilton Head, South Carolina: AIAA, 2007: 1 – 17.

### 作者简介:

邹奎 (1987–), 男, 博士研究生, 研究方向为航天器无拖曳控制技术 with 系统性能极限理论, E-mail: iukzou@sina.com;

苟兴宇 (1970–), 男, 研究员, 博士生导师, 研究方向为航天器姿态、轨道动力学与控制, 目前正在从事重力场测量卫星及引力波探测卫星相关控制技术研究, E-mail: gouxy@bice.org.cn;

范达 (1985–), 男, 助理研究员, 研究方向为静电悬浮加速度计、无拖曳控制和超静平台, E-mail: fanda4312@sina.com.