

# 匹配条件不满足时线性系统未知输入观测器设计

张建成, 朱芳来<sup>†</sup>

(同济大学 电子与信息工程学院, 上海 201804)

**摘要:** 针对一类不满足观测器匹配条件的线性系统, 讨论了未知输入观测器设计方法. 首先, 为了突破观测器匹配条件的限制, 提出了一种与未知输入相对阶无关的辅助输出构造方法. 然后, 把未知输入看作系统状态的一部分, 将原系统转化为一个不含未知输入的增维线性描述系统. 针对这样的系统转化, 对一系列等价前提条件进行了详细的讨论. 之后, 针对该增维线性描述系统, 构造Luenberger观测器来估计原系统的状态和未知输入. 同时, 借助于高阶滑模微分器, 来估计辅助输出中的未知信号. 最后, 对一个单连杆柔性机械手模型进行了数值仿真, 仿真结果表明了方法的有效性.

**关键词:** 未知输入观测器; 观测器匹配条件; 辅助输出; 未知输入重构

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Linear system unknown input observer design when the observer matching condition is not satisfied

ZHANG Jian-cheng, ZHU Fang-lai<sup>†</sup>

(College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

**Abstract:** This paper discusses unknown input observer design method for a class of linear systems with unknown inputs when the observer matching condition (OMC) is not satisfied. Firstly, in order to break through the restriction of the OMC, a new auxiliary output construction method, which has nothing to do with the concept of relative degree with respect to the unknown input, is proposed. Then, the original system is transformed into an augmented linear descriptor system which contains no unknown inputs. In view of the transformation of the systems, a series of equivalent preconditions are discussed in detail. After this, a Luenberger observer is designed for the augmented linear descriptor system to estimate both the state and the unknown input simultaneously. Besides, a high-order sliding mode differentiator is used to estimate the unknown information of the auxiliary output. Finally, a simulation example of a single-link flexible joint robotic is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** unknown input observer; observer matching condition; auxiliary output; unknown input reconstruction

### 1 引言(Introduction)

自从未知输入观测器(unknown input observer, UIO)设计思想于1960年代提出以来, 对它的研究一直是控制领域研究热点之一. 由于动态系统参数不确定性、外部扰动和执行器故障均可以看作系统的未知输入(unknown input, UI)<sup>[1-6]</sup>, 未知输入观测器设计理论在故障检测和隔离<sup>[1-4]</sup>、基于观测器的控制<sup>[7]</sup>等方面有着广泛的应用.

在早期, 学者们仅仅关注于如何抑制未知输入的影响以达到系统状态估计之目的<sup>[8-11]</sup>. 例如, 文献[8]假定未知输入满足给定的常系数微分方程, 然后通过

扩展原系统的状态向量来设计观测器. 随后, 人们针对线性或非线形系统, 研究状态和未知输入同时估计的未知输入观测器设计问题<sup>[12-23]</sup>. 例如, 在文献[12-13]中, Trinh等通过设计降维观测器实现了状态和未知输入同时重构. 与此同时, 基于高增益、高阶滑模和线性矩阵不等式等技术的未知输入观测器设计方法得到发展<sup>[14-25]</sup>. 例如, Fridman等针对最小相位的多输入多输出仿射非线性系统设计了高阶滑模观测器<sup>[18-19]</sup>. 随后, Shtessel等改进了这些方法, 并将其用于解决一类非最小相位系统的观测器设计问题<sup>[20]</sup>. 借助于线性矩阵不等式技术, 文献[25]解决了一类

Lipshitz非线性系统未知输入观测器设计问题. 同样地, 利用该技术, 文献 [23] 分别研究了几类线性和 Lipschitz非线性离散系统未知输入观测器设计问题, 并且得出了全维观测器存在, 相应的降维观测器也存在的结论. 此外, 为了减弱一般非线性系统设计 Lipschitz 条件, 近年来许多学者提出了单边 Lipschitz 条件下的未知输入观测器设计问题<sup>[26-28]</sup>. 例如, Zhang 等人讨论了一类单边 Lipschitz 非线性系统全维和降维观测器设计问题, 且通过对单边 Lipschitz 条件性质的分析, 提出了能降低观测器设计保守性的设计方法<sup>[26]</sup>. 最近, 随着研究的深入, 经典的未知输入观测器设计理论还被广泛推广到切换系统<sup>[29-30]</sup>、描述系统<sup>[31]</sup>、线性参数变化(linear parameter-varying, LPV)系统和 T-S(Takagi-Sugeno)模糊系统<sup>[32-33]</sup>等.

需要指出的是, 无论是早期仅需估计状态、还是之后的状态和未知输入同时估计之未知输入观测器设计, 都是在一个称之为观测器匹配条件(observer matching condition, OMC)的假设下提出的<sup>[15-16, 34-42]</sup>. 该条件在文献 [24] 中首次被提到, 并且已经证明该条件结合最小相位条件(minimum phase condition, MPC)是未知输入观测器可设计的充分必要条件. 一方面, 观测器匹配条件可以为观测器设计中的未知输入解耦提供很大便利, 并且在该条件下已经有很多很好的观测器设计方法得到提出<sup>[8, 17, 24-25, 35, 42]</sup>. 但是, 另一方面, 观测器匹配条件又是一个限制性很强的秩条件, 许多实际系统并不满足. 因此, 如何突破观测器匹配条件的限制同时又不失该匹配条件下的设计便利成为学者们研究的热点<sup>[15-16, 34, 38-40]</sup>. 例如, 基于输出关于未知输入的相对阶概念, Kalsi 等定义了一种辅助输出使得该输出矩阵满足观测器匹配条件<sup>[15]</sup>. 然后, 针对辅助输出中的不可测部分, 该文献设计了一种高增益微分器来给出其估计值. 同样借助于基于相对阶概念的辅助输出的构造方法, Zhu 提出了一种降维未知输入观测器设计方法, 然后设计了高增益高阶滑模观测器来估计辅助输出的不可测向量<sup>[16]</sup>. 除此之外, 该辅助输出方法还被用于故障检测中<sup>[34]</sup>. 文献 [15-16, 34, 38] 方法的共同之处在于辅助输出构造均是基于输出相对未知输入的相对阶的概念的, 并且假定辅助输出分布矩阵满足观测器匹配条件. 许多情况下, 对于这种辅助输出, 观测器匹配条件可以满足. 然而, 存在这样的系统, 即便使用 [15-16, 34, 38] 中的方法构造出辅助输出, 该系统依然不满足匹配条件.

本文试图提出一种基于新的辅助输出的未知输入观测器设计方法, 在观测器匹配条件不满足时, 甚至文献 [15-16, 34, 38] 中传统辅助输出方法失效时, 本文的方法仍然可以估计状态和未知输入. 文章余下部分安排如下: 第2节介绍研究背景和待讨论的问题; 第3节给出新的辅助输出构造方法和观测器设计; 在第4节, 给出仿真算例验证方法的有效性.

## 2 研究背景和问题提出(Background and problem proposition)

考虑如下具有未知输入的线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D\omega(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  和  $\omega \in \mathbb{R}^q$  分别为状态、可测输出、控制输入和未知输入向量;  $A, B, C$  和  $D$  为具有适当维数的常数矩阵.

**引理 1**<sup>[24]</sup> 若系统(1)的系数矩阵  $A, C, D$  满足:

I) 最小相位条件. 系统  $(A, C, D)$  的不变零点都具有负实部; 或者, 等价地, 对于所有具有非负实部的复数  $s$  都有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + \text{rank}(D).$$

II) 观测器匹配条件.

$$\text{rank}(CD) = \text{rank}(D) = q,$$

则系统(1)存在渐近收敛观测器.

**注 1** 在未知输入观测器设计中最小相位条件 I) 保证观测器误差系统的稳定性, 而观测器匹配条件 II) 保证了未知输入可解耦性质<sup>[8, 17, 24-25, 35, 42]</sup>.

**定义 1**  $(r_1, r_2, \dots, r_p)$  称为输出  $y$  相对于未知输入  $\omega$  的相对阶, 如果对于  $i = 1, 2, \dots, p$  有

$$\begin{cases} c_i A^j D = 0, j = 0, 1, \dots, r_i - 2, \\ c_i A^{r_i - 1} D \neq 0. \end{cases}$$

**假设 1** 假定存在正数  $\gamma_i (1 \leq \gamma_i \leq r_i)$  使得  $\text{rank}(C_a D) = \text{rank}(D) = q$  成立, 其中

$$C_a = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_1 A^{\gamma_1 - 1} \\ \vdots \\ c_p \\ \vdots \\ c_p A^{\gamma_p - 1} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

如引言中所述, 观测器匹配条件 II) 是一个限制性较强的条件, 许多实际系统并不满足. 为了突破该条件的限制, 文献 [15-16, 34] 和文献 [38] 基于相对阶的概念, 通过构造辅助输出的方法有效地处理了该问题. 其基本思想是: 在假设 1 下构造辅助输出  $y_a = C_a x$ , 将辅助输出看成系统输出来设计观测器, 然后再通过其它方法估计辅助输出中的未知信息. 基于这样的思想, 文献 [15-16, 34] 和文献 [38] 在一定程度上很好地处理了观测器条件不满足时的未知输入观测器设计问题. 然而值得强调的是, 即便对于假设 1 中的辅助输出, 观测器匹配条件依然不满足的系统是存在的. 如下, 给

出一个例子来说明该情形.

**例 1** 考虑具有如下系数矩阵的系统(1):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -10 & -10 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

容易验证, 该系统不满足观测器匹配条件, 即  $\text{rank}(CD) \neq \text{rank}(D)$ . 考虑文献 [15–16, 34] 和文献 [38] 中的辅助输出方法, 因为输出  $y$  相对阶为  $(r_1, r_2, r_3) = (2, 1, 1)$ , 选定  $\gamma_i = r_i (i = 1, 2, 3)$ , 那么按照假设1, 矩阵  $C_a$  应为

$$C_a = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 A \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

基于该辅助输出, 发现仍然有  $\text{rank}(C_a D) \neq \text{rank}(D)$ , 即假设1不成立. 因此文献 [15–16, 34] 和文献 [38] 所提出的辅助输出方法无法解决系统(1)的未知输入观测器设计问题.

本文的目的在于提出一种新的辅助输出构造方法, 当观测器匹配条件不满足且传统辅助输出方法不可行时, 该方法依然能够估计出系统状态和未知输入.

### 3 观测器设计(Observer design)

#### 3.1 观测器匹配条件成立时未知输入观测器设计(UIO design when OMC holds)

在本小节, 暂时假设观测器匹配条件成立, 即  $\text{rank}(CD) = \text{rank}(D)$ . 那么对于式(1), 计算输出向量的微分为

$$\dot{y}(t) = CAx(t) + CBu(t) + CD\omega(t).$$

令  $\bar{y}_1 = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} - CBu \end{bmatrix}$ ,  $C_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$  和  $F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ CD \end{bmatrix}$ ,

然后系统(1)可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D\omega(t), \\ \bar{y}_1(t) = C_1 x(t) + F_1 \omega(t). \end{cases} \quad (3)$$

**引理 2** 假定  $(A, C, D)$  为最小相位, 那么系统  $(A, C_1, D, F_1)$  也为最小相位, 即

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C_1 & F_1 \end{bmatrix} = n + \text{rank} \begin{bmatrix} -D \\ F_1 \end{bmatrix}$$

对于所有具有非负实部的  $s$  都成立.

**证** 根据最小相位的定义, 对于所有具有非负实

部的  $s$ , 有

$$n + q \geq \text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C_1 & F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \\ CA & CD \end{bmatrix} \geq$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q,$$

因此, 系统  $(A, C_1, D, F_1)$  为最小相位系统. 证毕.

引入扩充的状态变量  $\bar{x} = [x^T \ \omega^T]^T \in \mathbb{R}^{n+q}$ , 并记  $T = [I_n \ 0_{n \times q}]$ ,  $\bar{A} = [A \ D] \in \mathbb{R}^{n \times (n+q)}$  和  $\bar{C}_1 = [C_1 \ F_1] \in \mathbb{R}^{2p \times (n+q)}$ , 那么系统(3)可以重写为一个描述动态系统

$$\begin{cases} T\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + Bu(t), \\ \bar{y}_1(t) = \bar{C}_1\bar{x}(t). \end{cases} \quad (4)$$

引理3和引理4对于下面的讨论是必要的.

**引理 3** 对于矩阵  $\bar{C}_1$  和  $T$ , 存在矩阵  $G_1 \in \mathbb{R}^{(n+q) \times n}$  和  $H_1 \in \mathbb{R}^{(n+q) \times 2p}$  使得

$$G_1 T + H_1 \bar{C}_1 = I_{n+q}. \quad (5)$$

**证** 方程(5)可以写为

$$[G_1 \ H_1] \begin{bmatrix} T \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix} = I_{n+q}.$$

因为  $\text{rank}(CD) = \text{rank}(D)$ , 有

$$n + q \leq \text{rank} \begin{bmatrix} T \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ C_1 & F_1 \end{bmatrix} \leq n + q,$$

它意味着  $W_1 = \begin{bmatrix} T \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix}$  是列满秩矩阵. 因此  $\Phi_1 = (W_1^T W_1)^{-1} \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$  存在且  $[G_1 \ H_1] = \Phi_1 W_1^T$  为方程(5)的解. 于是  $G_1$  和  $H_1$  的解就分别表述为

$$G_1 = \Phi_1 W_1^T \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{2p \times n} \end{bmatrix}, H_1 = \Phi_1 W_1^T \begin{bmatrix} 0_{n \times 2p} \\ I_{2p} \end{bmatrix}.$$

**引理 4** 系统  $(A, C_1, D, F_1)$  为最小相位, 当且仅当矩阵对  $(G_1 \bar{A}, \bar{C}_1)$  是可检测的.

**证** 事实上, 有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_{n+q} - G_1 \bar{A} \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} s\Phi_1^{-1} - \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & F_1 \end{bmatrix}^T \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{2p \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} s(I_n + C_1^T C_1) - A & sC_1^T F_1 - D \\ sF_1^T C_1 & sF_1^T F_1 \\ C_1 & F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I & 0 & -sC_1^T \\ 0 & I & -sF_1^T \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \times$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} s(I_n + C_1^T C_1) - A & sC_1^T F_1 - D \\ sF_1^T C_1 & sF_1^T F_1 \\ C_1 & F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C_1 & F_1 \end{bmatrix}.$$

这样  $\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C_1 & F_1 \end{bmatrix} = n + q$  成立, 当且仅当

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_{n+q} - G_1 \bar{A} \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix} = n + q. \quad \text{证毕.}$$

基于引理3, 描述系统(4)可以转变为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = G_1 \bar{A} \hat{x}(t) + G_1 B u(t) + H_1 \dot{\bar{y}}_1(t), \\ \bar{y}_1(t) = \bar{C}_1 \hat{x}(t). \end{cases} \quad (6)$$

**定理1** 假定  $(A, C, D)$  为最小相位, 选定增益矩阵  $L_1$  使得  $G_1 \bar{A} - L_1 \bar{C}_1$  为 Hurwitz, 那么

$$\begin{cases} \dot{z} = G_1 \bar{A} \hat{x} + G_1 B u + L_1 (\bar{y}_1 - \bar{C}_1 \hat{x}), \\ \hat{x} = z + H_1 \bar{y}_1 \end{cases} \quad (7)$$

为系统(1)的渐近收敛观测器, 因而系统(1)的状态和未知输入估计分别为  $\hat{x}(t) = [I_n \ 0_{n \times q}] \hat{x}(t)$  和  $\hat{\omega}(t) = [0_{q \times n} \ I_q] \hat{x}(t)$ .

**证** 令  $\tilde{x} = \bar{x} - \hat{x}$ , 有  $\dot{\tilde{x}} = (G_1 \bar{A} - L_1 \bar{C}_1) \tilde{x}$ . 因为  $G_1 \bar{A} - L_1 \bar{C}_1$  为 Hurwitz, 于是当  $t \rightarrow \infty$  时有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$ , 即  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$  和  $\hat{\omega}(t) \rightarrow \omega(t)$ . 证毕.

**注2** 需要指出, 观测器匹配条件在上面的观测器设计中起着重要作用. 事实上, 从引理3的证明中可以发现, 正是因为观测器匹配条件的成立才能保证方程(5)关于  $G_1 \in \mathbb{R}^{(n+q) \times n}$  和  $H_1 \in \mathbb{R}^{(n+q) \times 2p}$  有解, 进而才可将原系统转化成不含未知输入的系统(6). 基于系统(6), 可以设计一个结构简单的 Lunberger 观测器同时估计出系统状态和未知输入.

### 3.2 观测器匹配条件不成立时未知输入观测器设计 (UIO design when OMC does not hold)

在第3.1节, 在  $\text{rank}(CD) = \text{rank}(D)$  条件下, 即在  $\text{rank}(F_1) = q$  时, 已经给出了未知输入观测器的设计方法. 在本小节, 将通过提出新的辅助输出构造来突破该条件的限制, 即当  $\text{rank}(CD) \neq \text{rank}(D)$  时给出状态和未知输入同时估计. 首先, 给出算法1以此构造  $\bar{y}_l, C_l, F_l$ .

#### 算法1

**第1步** 考虑方程

$$\dot{y} = CAx + CBu + CD\omega.$$

令

$$y_1 = \dot{y} - CBu, \quad \bar{y}_1 = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}, \quad M_1 = CD, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ M_1 \end{bmatrix},$$

于是  $\bar{y}_1 = C_1 x + F_1 \omega$ .

**第2步** 对  $y_1$  求取一阶微分得

$$M_1^\perp (\ddot{y} - CB\dot{u}) =$$

$$M_1^\perp CA^2 x + M_1^\perp CABu + M_1^\perp CAD\omega,$$

其中  $X^\perp$  表示  $X$  的正交矩阵, 即  $X^\perp X = 0$ . 进而有

$$M_1^\perp (\ddot{y} - CB\dot{u} - CABu) = M_1^\perp CA^2 x + M_1^\perp CAD\omega.$$

令

$$y_2 = M_1^\perp (\ddot{y} - CB\dot{u} - CABu), \quad \bar{y}_2 = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} C_1 \\ M_1^\perp CA^2 \end{bmatrix}, \quad M_2 = M_1^\perp CAD, \quad F_2 = \begin{bmatrix} F_1 \\ M_2 \end{bmatrix},$$

这样有  $\bar{y}_2 = C_2 x + F_2 \omega$ .

$\vdots$

**第k步** 对  $y_{k-1}$  求取一阶微分得

$$M_{k-1}^\perp \cdots M_1^\perp (y^{(k)} -$$

$$CBu^{(k-1)} - \cdots - CA^{k-1}Bu) =$$

$$M_{k-1}^\perp \cdots M_2^\perp M_1^\perp CA^k x +$$

$$M_{k-1}^\perp \cdots M_2^\perp M_1^\perp CA^{k-1}D\omega.$$

然后令

$$y_k = M_{k-1}^\perp \cdots M_1^\perp (y^{(k)} -$$

$$CBu^{(k-1)} - \cdots - CA^{k-1}Bu),$$

$$\bar{y}_k = \begin{bmatrix} \bar{y}_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix}, \quad C_k = \begin{bmatrix} C_{k-1} \\ M_{k-1}^\perp \cdots M_2^\perp M_1^\perp CA^k \end{bmatrix},$$

$$M_k = M_{k-1}^\perp \cdots M_2^\perp M_1^\perp CA^{k-1}D,$$

$$F_k = \begin{bmatrix} F_{k-1} \\ M_k \end{bmatrix},$$

有  $\bar{y}_k = C_k x + F_k \omega$ .

**注3** 注意到  $M_k^\perp$  为行满秩矩阵, 并且其行数会随着  $k$  增加而减少. 因此, 无论在何种情况下, 该算法都会在有限步内结束(假设最长为  $N$  步, 则  $N \leq 2p$ , 这儿不妨令  $N = 2p$ ).

**假设2** 假设存在正整数  $l$  ( $1 \leq l \leq N$ ) 使得  $\text{rank}(F_l) = q$ .

在假设2下, 可以得到一个新的系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + D\omega, \\ \bar{y}_l = C_l x + F_l \omega. \end{cases} \quad (8)$$

由于  $F_l$  是列满秩矩阵, 对于系统(8), 可以仿照第3.1节的方法设计未知输入观测器. 下面给出其观测器设计步骤而略去证明.

**引理5** 如果  $(A, C, D)$  为最小相位, 那么  $(A, C_l, D, F_l)$  也是最小相位系统.

引入增广的状态向量  $\bar{x} = [x^T \ \omega^T]^T$ , 并记  $\bar{A} = [A \ D]$ ,  $T = [I_n \ 0_{n \times q}]$  和  $\bar{C}_l = [C_l \ F_l]$ . 这样, 系统(8)可以写为

$$\begin{cases} T\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + Bu(t), \\ \bar{y}_l(t) = \bar{C}_l\bar{x}. \end{cases} \quad (9)$$

**引理6** 对于矩阵  $\bar{C}_l$  和  $T$ , 存在两个矩阵  $G_l \in \mathbb{R}^{(n+q) \times n}$  和  $H_l \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (l+1)p}$  使得

$$G_l T + H_l \bar{C}_l = I_{n+q}.$$

然后, 系统(9)变换为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = G_l \bar{A} \hat{x}(t) + G_l Bu(t) + H_l \dot{\bar{y}}_l(t), \\ \bar{y}_l(t) = \bar{C}_l \hat{x}. \end{cases} \quad (10)$$

**引理7** 系统  $(A, C_l, D, F_l)$  为最小相位, 当且仅当矩阵对  $(G_l \bar{A}, \bar{C}_l)$  是可检测的.

**定理2** 假定  $(A, C, D)$  为最小相位, 基于假设2, 引理5-7, 取增益矩阵  $L_l$  使得  $G_l \bar{A} - L_l \bar{C}_l$  为Hurwitz, 那么动态系统

$$\begin{cases} \dot{z} = G_l \bar{A} \hat{x} + G_l Bu + L_l (\bar{y}_l - \bar{C}_l \hat{x}), \\ \hat{x} = z + H_l \bar{y}_l \end{cases} \quad (11)$$

为系统(1)的渐近收敛观测器, 因而系统(1)的状态和未知输入估计分别为  $\hat{x}(t) = [I_n \ 0_{n \times q}] \hat{x}(t)$  和  $\hat{\omega}(t) = [0_{q \times n} \ I_q] \hat{x}(t)$ .

注意到辅助输出  $\bar{y}_l$  不仅包含可测量的输出  $y$  和控制输入  $u$ , 还包含它们的各阶微分  $y^{(l)}, u^{(l)}$ . 为了估计出这些微分信息, 笔者引入高阶滑模微分器<sup>[43]</sup> (也称为超螺旋算法, super twisted algorithm, STA).

假定  $f(t)$  是具有导数且其各阶导数均有界的信号, 则高阶滑模微分器具有如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_0 = \varphi_1 - h_1, \\ \dot{\varphi}_1 = \varphi_2 - h_2, \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_{\alpha-1} = \varphi_\alpha - h_\alpha, \\ \dot{\varphi}_\alpha = -h_{\alpha+1}, \end{cases} \quad (12)$$

其中:

$$\begin{cases} h_0 = \varphi_0 - f(t), \\ h_j = \lambda_j \cdot |h_{j-1}|^{(\alpha-j+1)/(\alpha-j+2)} \cdot \text{sgn } h_{j-1}, \end{cases}$$

$j = 1, 2, \dots, \alpha + 1$ . 文献[43]中已经证明: 适当地选取增益参数, 算法(12)可以实现  $f(t)$  的从1阶到  $\alpha$  阶微分的有限时间精确估计, 即, 经过有限时间以后, 有

$$\varphi_0 = f(t), \varphi_1 = \dot{f}(t), \dots, \varphi_\alpha = f^{(\alpha)}(t).$$

将提出的未知输入观测器设计方法总结为算法2.

## 算法2

**第1步** 设定  $l = 1$ ;

**第2步** 如果  $l \leq N$ , 那么进入第3步; 否则设计失败;

**第3步** 根据算法1计算出矩阵  $C_l$  和  $F_l$ . 如果  $\text{rank}(F_l) = q$ , 进入第4步; 否则, 令  $l = l + 1$ , 并进入第2步;

**第4步** 计算矩阵  $G_l, H_l$ , 并选取增益矩阵  $L_l$  使得  $G_l \bar{A} - L_l \bar{C}_l$  为Hurwitz矩阵;

**第5步** 设计高阶滑模微分器(12)和观测器(11), 根据定理2得到  $x(t)$  和  $\omega(t)$  的估计.

**注4** 本文提出了一种新的辅助输出方法来处理观测器匹配条件不满足时未知输入观测器设计问题. 相比于文献[15-16, 34]和文献[38]中的传统的辅助输出构造方法, 本文提出的方法不再依赖于系统输出相对于未知输入的相对阶这一概念, 因此对一类传统辅助输出方法无解的系统, 本文给出了新的解决方案.

## 4 仿真结果(Simulation results)

本节考虑一个单连杆柔性机械手实验模型<sup>[26]</sup>来验证所提方法的有效性, 其动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_m &= \omega_m, \\ \dot{\omega}_m &= \frac{k}{J_m} (\theta_\ell - \theta_m) - \frac{B_{vf}}{J_m} \omega_m + \frac{K_1}{J_m} (u + \Delta u), \\ \dot{\theta}_\ell &= \omega_\ell, \\ \dot{\omega}_\ell &= -\frac{k}{J_\ell} (\theta_\ell - \theta_m) - \frac{mgh}{J_\ell} \sin \theta_\ell, \end{aligned}$$

其中:  $J_m, J_\ell$  表示电机和连杆的转动惯量,  $\theta_m, \theta_\ell$  为电机和连杆的转动角速度.  $u$  为电机的控制电压,  $\Delta u$  为未知的执行器故障(未知输入).

为了处理非线性项, 将  $\omega = [\Delta u \ \sin \theta_\ell]^T$  看做未知输入. 然后令  $x = [\theta_m \ \omega_m \ \theta_\ell \ \omega_\ell]^T$ , 取系统参数  $J_m = 3.7 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$ ,  $J_\ell = 9.3 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$ ,  $m = 0.21 \text{ kg}$ ,  $k = 0.18 \text{ Nm/rad}$ ,  $B_{vf} = 0.046 \text{ Nm/V}$ ,  $K_\tau = 0.08 \text{ Nm/V}$ , 则单连杆机械手模型可以表示为系统(1), 其系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -19.5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 21.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 21.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

其中:  $u(t) = \sin t$ ,  $\Delta u = 0.3 \sin(2t)$ .

显然, 对于该系统观测器匹配条件不满足, 即  $\text{rank}(CD) \neq \text{rank}(D)$  且  $(\gamma_1, \gamma_2) = (1, 1)$ , 因此  $C_a =$

$C$ . 这意味着文献[15-16, 34, 38]提出的辅助输出构造方法仍然不能解决该系统的观测器设计问题. 接下来将按照本文算法2给出该系统观测器设计和估计结果以显示所提方法的优越性.

由于 $\text{rank}(CD) = 1$ 而 $\text{rank} \begin{bmatrix} (CD)^\perp \\ (CD)^\perp CAD \end{bmatrix} = 2$ .

根据算法2, 有 $\bar{y}_2 = C_2x + F_2\omega$ , 其中:

$$\bar{y}_2 = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} - CBu \\ (CD)^\perp(\ddot{y} - CB\dot{u} - CABu) \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.3929 & -0.1071 & 0.0714 & -0.0714 & 0.0000 \\ 0.0714 & 0.0714 & 0.2857 & -0.2857 & -0.0000 \\ -0.1071 & 0.3929 & 0.0714 & -0.0714 & -0.0000 \\ 0.2143 & 0.2143 & -0.1429 & 0.1429 & -0.0000 \\ 1.1225 & -1.1275 & 0.0364 & 0.0099 & 0.0463 \\ 9.8929 & -9.6071 & -0.4286 & -0.5714 & -0.0000 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0.1856 & 0.6775 & 0.6371 & -0.8902 & -0.0705 \\ 0.0088 & -0.0390 & 0.8360 & 0.0204 & 0.7139 \\ -0.5040 & 1.2880 & 0.0608 & -0.3124 & -0.0706 \\ 0.6695 & -0.9415 & -0.1551 & 0.6918 & 0.1447 \\ 1.6209 & -1.5920 & 1.1686 & -1.1065 & 0.0581 \\ 14.1240 & -14.2767 & 9.6448 & -9.6608 & 0.4280 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 19.5000 & 1.0000 & -19.5000 & 0 & 0 & -1.0000 \\ 19.5000 & 0 & -19.5000 & 1.0000 & 0 & -1.0000 \\ -68.1000 & -1.2500 & 68.1000 & 0 & 21.6000 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

使得矩阵 $G_2\bar{A} - L_2\bar{C}_2$ 的特征值为

$$\{-0.5, -0.6, -0.7, -0.8, -0.9, -1\}.$$

构造高阶滑模微分器(12)和观测器(11), 因此可以得到 $x$ 的状态估计和未知输入 $\omega$ 的重构, 见图1-4. 图1-4表明无论是系统状态还是未知输入重构, 其估计效果是令人满意的. 因此, 本文提出的新的辅助输出方法是有效的.

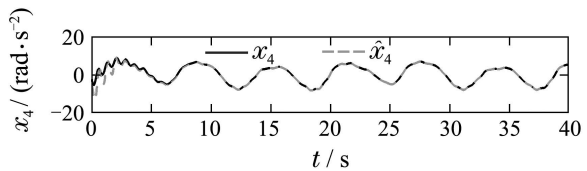
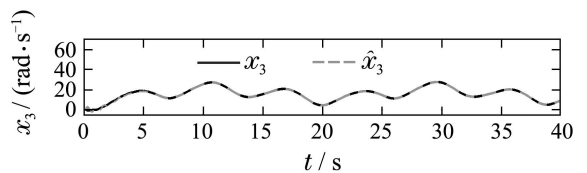
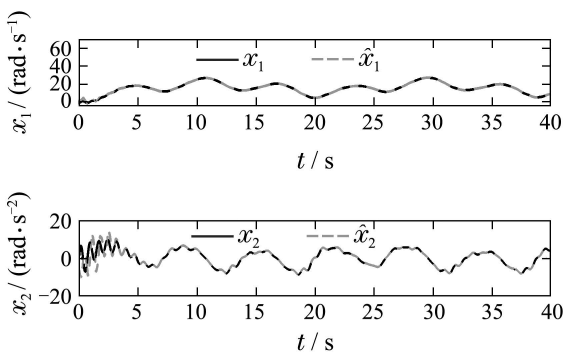
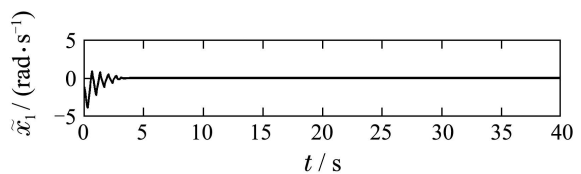


图1 状态 $x_i$ 和其估计 $\hat{x}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )

Fig. 1 State  $x_i$  and its estimation  $\hat{x}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )



$$C_2 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ (CD)^\perp CA^2 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0_{p \times q} \\ CD \\ (CD)^\perp CAD \end{bmatrix}.$$

计算相关矩阵 $G_2, H_2, L_2$ 和 $\bar{C}_2$ 如下:

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0.6071 & -0.0714 & 0.1071 & -0.2143 \\ -0.0714 & 0.7143 & -0.0714 & 0.1429 \\ 0.1071 & -0.0714 & 0.6071 & -0.2143 \\ -0.2143 & 0.1429 & -0.2143 & 0.4286 \\ 1.1275 & 0.0215 & -1.1225 & -0.0050 \\ 9.6071 & 0.4286 & -9.8929 & 0.2857 \end{bmatrix},$$

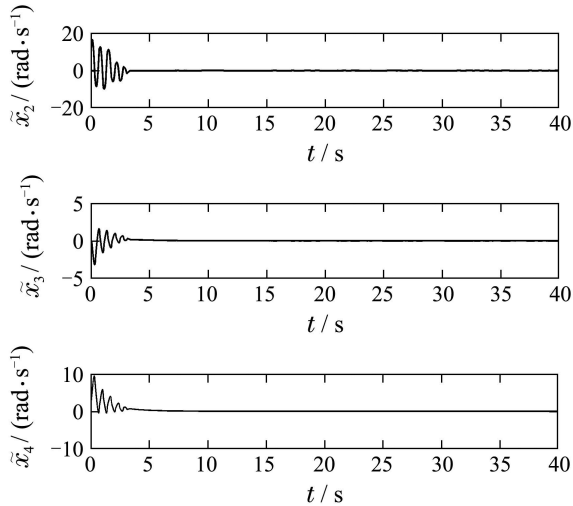


图2 状态 $x_i$ 的估计误差 $\tilde{x}_i(i = 1, 2, 3, 4)$   
Fig. 2 State estimation error  $\tilde{x}_i(i = 1, 2, 3, 4)$

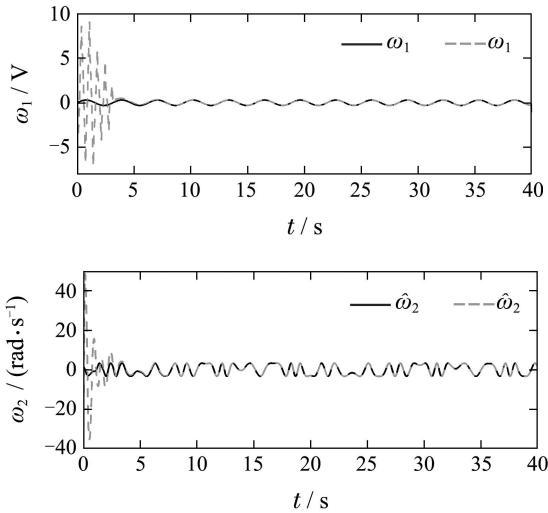


图3 未知输入 $\omega_i$ 和其估计 $\hat{\omega}_i(i = 1, 2)$   
Fig. 3 Unknown input  $\omega_i$  and its estimation  $\hat{\omega}_i(i = 1, 2)$

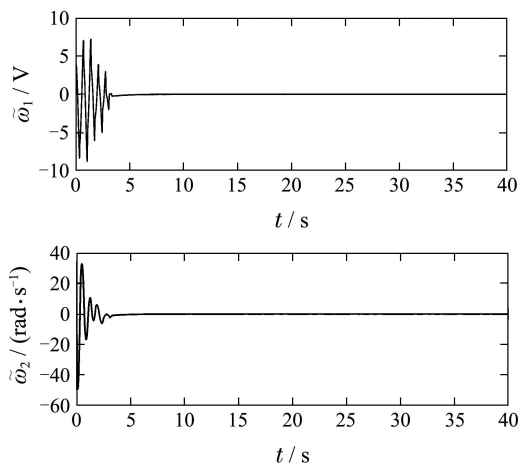


图4 未知输入 $\omega_i$ 的估计误差 $\tilde{\omega}_i(i = 1, 2)$   
Fig. 4 Estimation error  $\tilde{\omega}_i$  of the UI  $\omega_i(i = 1, 2)$

### 5 结论(Conclusions)

本文提出了一种基于新的辅助输出构造的未知

输入观测器设计方法来处理观测器匹配条件不满足时状态和未知输入同时估计的问题. 针对文献[15–16, 34]和文献[38]等文献所给出的传统辅助输出方法不能解决的问题, 本文的方法提供了一种新的解决方案. 该方案不再依赖于输出相对于未知输入的相对阶概念. 此外, 与文献[15–16, 34]和文献[38]方法不同之处还体现在: 本文的方法, 只要估计出了扩充系统的状态, 就达到了同时估计原系统状态和未知输入的目的. 如何将本文中的方法推广到同时含有未知输入和测量噪声的系统中去, 是我们进一步研究的议题.

### 参考文献(References):

- [1] EDWARDS C, SPURGEAN S, PATTON R. Sliding mode observers for fault detection and isolation [J]. *Automatica*, 2000, 36(4): 541 – 553.
- [2] NG K, TAN C, OETOMO D. Disturbance decoupled fault reconstruction using cascaded sliding mode observers [J]. *Automatica*, 2012, 48(5): 794 – 799.
- [3] MENON P, EDWARDS C. A sliding mode observer for monitoring and fault estimation in a network of dynamical systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(17): 2669 – 2685.
- [4] ALWI H, EDWARDS C. Robust fault reconstruction for linear parameter varying systems using sliding mode observers [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(14): 1947 – 1968.
- [5] LIU Cong, LI Yinghui, ZHU Xihua, et al. Adaptive sliding-mode observer for actuator fault reconstruction in nonlinear system with mismatched uncertainties [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(4): 431 – 437.  
(刘聪, 李颖晖, 朱喜华, 等. 基于自适应滑模观测器的不匹配非线性系统执行器故障重构 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(4): 431 – 437.)
- [6] YANG Junqi, ZHU Fanglai. Linear-matrix-inequality observer design of nonlinear systems with unknown input and measurement noise reconstruction [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(4): 538 – 544.  
(杨俊起, 朱芳来. 未知输入和可测噪声重构之线性矩阵不等式非线性系统观测器设计 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(4): 538 – 544.)
- [7] YANG J, LI S H, SU J Y, et al. Continuous nonsingular terminal sliding mode control for systems with mismatched disturbances [J]. *Automatica*, 2013, 49(7): 2287 – 2291.
- [8] WANG S, DAVISON E, DORATO P. Observing the states of systems with unmeasurable disturbance [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, 20(5): 716 – 717.
- [9] BHATTACHARYYA S. Observer design for linear systems with unknown inputs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, 23(3): 483 – 484.
- [10] HOSTETTER G, MEDITCH J. Observing systems with unmeasurable inputs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1973, 18(3): 307 – 308.
- [11] PANUSKA V. A new form of the extended Kalman filter for parameter estimation in linear systems with correlated noise [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1980, 25(2): 229 – 235.
- [12] TRINH H, HA Q. State and input simultaneous estimation for a class of time-delay systems with uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2007, 54(6): 527 – 531.
- [13] TRINH H, TRAN T, FERNANDO T. Disturbance decoupled observers for systems with unknown inputs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(10): 2397 – 2402.

- [14] YAN X, EDWARDS C. Adaptive sliding-mode-observer-based fault reconstruction for nonlinear systems with parametric uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2008, 55(11): 4029 – 4036.
- [15] KALSI K, LIAN J, HUI S, et al. Sliding-mode observers for systems with unknown inputs: a high-gain approach [J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 347 – 353.
- [16] ZHU F. State estimation and unknown input reconstruction via both reduced-order and high-order sliding mode observers [J]. *Journal of Process Control*, 2012, 22(1): 296 – 302.
- [17] HOU M, PATTON R. Input observability and input reconstruction [J]. *Automatica*, 1998, 34(6): 789 – 794.
- [18] FRIDMAN L, SHTESSEL Y, EDWARDS C, et al. State estimation and input reconstruction in nonlinear systems via higher order sliding mode observer [C] // *Proceedings of the 2007 American Control Conference*. New York: IEEE, 2007.
- [19] FRIDMAN L, SHTESSEL Y, EDWARDS C, et al. Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2008, 18(4/5): 399 – 412.
- [20] SHTESSEL Y, BAEV S, EDWARDS C, et al. Hosm observer for a class of nonminimum phase causal nonlinear mimo systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(2): 543 – 548.
- [21] HA Q, TRINH H. State and input simultaneous estimation for a class of nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2004, 40(10): 1779 – 1785.
- [22] YANG J, CHEN Y, YU K. State and unknown information estimation for non-linear systems with both input uncertainty and output disturbance [J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2016, 33(2): 427 – 439.
- [23] GUO S, ZHU F. Reduced-order observer design for discrete-time descriptor systems with unknown inputs: an linear matrix inequality approach [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2015, 137(8): 084503.
- [24] KUDVA P, VISWANADHAM N, RAMAKRISHNA A. Observers for linear systems with unknown inputs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1980, 25(1): 113 – 115.
- [25] CORLESS M, TU J. State and input estimation for a class of uncertain systems [J]. *Automatica*, 1998, 34(6): 757 – 764.
- [26] ZHANG W, SU H, ZHU F, et al. Unknown input observer design for one-sided Lipschitz nonlinear systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79(2): 1469 – 1479.
- [27] SHARMA V, AGRAWAL V, SHARMA B, et al. Unknown input nonlinear observer design for continuous and discrete time systems with input recovery scheme [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(1): 645 – 658.
- [28] NGUYEN M, TRINH H. Reduced-order observer design for one-sided Lipschitz time-delay systems subject to unknown inputs [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2016, 10(10): 1097 – 1105.
- [29] GORP J, DEFOORT M, VELUVOLU K, et al. Hybrid sliding mode observer for switched linear systems with unknown inputs [J]. *Journal of The Franklin Institute*, 2014, 351(8): 3987 – 4008.
- [30] YANG J, CHEN Y, WANG X. Active mode identification and continuous state estimation for switched linear systems with unknown inputs and slow switching signal [J]. *Circuits System & Signal Processing*, 2015, 34(7): 2193 – 2211.
- [31] GUPTA M, TOMAR N, BHAUMIK S. Full- and reduced-order observer design for rectangular descriptor systems with unknown inputs [J]. *Journal of The Franklin Institute*, 2015, 352(3): 1250 – 1264.
- [32] CHADLI M, KARIMI H. Robust observer design for unknown inputs Takagi-Sugeno models [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2013, 21(1): 158 – 164.
- [33] ICHALAL D, MAMMAR S. On unknown input observers for LPV systems [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, 62(9): 5870 – 5879.
- [34] BAGHERPOUR E, HAIRIYAZDI M, MAHJOOB M. Residual generation with unknown input observer for linear systems in the presence of unmatched uncertainties [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2014, 28(12): 5159 – 5167.
- [35] DAROUACH M, ZASADZINSKI M, XU S. Full-order observers for linear systems with unknown inputs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(3): 606 – 609.
- [36] WALCOTT B, ZAK S. State observation of nonlinear uncertain dynamical systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, 32(2): 166 – 170.
- [37] HUI S, ZAK S. Observer design for systems with unknown inputs [J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2005, 15(4): 431 – 446.
- [38] PARK T, KIM D. Design of unknown input observers for linear systems with unmatched unknown inputs [J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2014, 36(3): 399 – 410.
- [39] PARK T. Designing fault detection observers for linear systems with mismatched unknown inputs [J]. *Journal of Process Control*, 2013, 23(8): 1185 – 1196.
- [40] HAN Dong, ZHU Fanglai. Simultaneous estimation of states and unknown inputs for linear systems based on auxiliary outputs [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(6): 932 – 943. (韩冬, 朱芳来. 基于辅助输出的线性系统状态 and 未知输入同时估计方法[J]. *自动化学报*, 2012, 38(6): 932 – 943.)
- [41] YANG Junqi, ZHU Fanglai. State estimation and simultaneous unknown input and measurement noise reconstruction [J]. *Control and Decision*, 2013, 28(8): 1145 – 1151. (杨俊起, 朱芳来. 状态估计与未知输入和可测噪声同时重构方法[J]. *控制与决策*, 2013, 28(8): 1145 – 1151.)
- [42] LI F, ZHAO G, HUANG J. Exact state estimation for linear systems with unbounded disturbances [J]. *Circuits Systems & Signal Processing*, 2015, 34(5): 1519 – 1533.
- [43] LEVANT A. High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control [J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(9/10): 924 – 941.

#### 作者简介:

**张建成** (1984–), 男, 博士研究生. 主要从事未知输入观测器设计、滑模控制等方面的研究, E-mail: 1987jcz@tongji.edu.cn;

**朱芳来** (1965–), 男, 教授, 博士生导师. 主要从事非线性系统鲁棒控制、观测器设计、基于模型的故障检测与隔离等方面的研究, E-mail: zhufanglai@tongji.edu.cn.