

模型参数失配有界下的扩展集员估计方法

宋莎莎, 赵忠盖[†], 刘 飞

(江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122)

摘要: 在非线性模型参数失配下, 直接采用滤波算法很难获到理想的估计状态. 本文基于扩展集员估计方法, 在状态估计中引入参数的不确定信息, 提出一种参数失配有界下的状态估计方法. 该方法应用区间或集合运算的法则, 计算由参数失配引起的偏差范围, 并将其用椭球集外包. 在状态估计的预测步, 通过该偏差椭球集与先验椭球区间的并运算, 得到预测椭球区间; 在状态估计的更新步, 利用观测椭球集对预测椭球区间进行更新, 从而得到后验椭球集合以及状态估计值. 最后, 在数值仿真和发酵模型中的仿真应用验证了算法的有效性.

关键词: 参数失配有界; 状态估计; 扩展集员估计; 区间运算

中图分类号: TP301.6 文献标识码: A

Extended set membership filtering method for process with bounded-mismatch parameters

SONG Sha-sha, ZHAO Zhong-gai[†], LIU Fei

(Key Laboratory of Advanced Control for Light Industry Processes, Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: Given a nonlinear model with mismatch parameters, it is difficult to obtain an accurate state estimation via the general filtering methods. In this paper, based on the extended set membership estimation method, a novel state estimation method is proposed for the processes with bounded-mismatch parameters by introducing the uncertainty information of parameter. In the proposed method, the deviation scope caused by the parameter mismatch is calculated by the interval operation and interval expansion functions, then it is enclosed by a ellipsoid set. In the prediction step of state estimation, the prediction ellipsoid is obtained by the summation of the parameter deviation ellipsoid set and the interval of the priori ellipsoid; In the update step, by using the observation ellipsoid set to update the priori ellipsoid, the posterior ellipsoid set and then the state estimate are derived. The applications in a numerical example and a fermenter process show the effectiveness of the proposed method.

Key words: bounded-mismatch parameters; state estimation; extended set membership filter; interval arithmetic

1 引言(Introduction)

实际工业过程中, 由于外界环境、工作条件以及系统动态变化等因素, 系统参数变化现象普遍存在. 例如, 在填冲床蒸馏试验中, 填充床颗粒有效面积的变化会引起等效的理论板高度的变化, 最终影响蒸馏物的成分^[1]. 模型偏差和不确定性的参数变化都将影响状态估计的性能. 为获得理想的状态估计效果, 在估计中必须考虑参数的变化. 基于似然函数最大化原则^[2], Andrieu提出用期望最大化(expectation maximization, EM)算法离线辨识模型的参数^[3]. 但是, 如果似然函数为非凸性, 则无法获得最优的估计值^[4-5]. 此外, 以贝叶斯为基础的参数估计方法, 如状态增广和

双状态参数估计也得到了广泛应用. Tulsyan提出状态增广的方法, 在线估计状态和参数值^[6]. 但是待估计的参数个数受限, 且在观测矩阵是病态的情况下, 估计的参数准确性较低. Kantas采用粒子滤波(particle filter, PF)算法对状态和参数估计, 并概述了状态和参数估计之间的相关性^[7]. Olivier提出了双PF算法并行估计状态和参数^[8]. 上述方法适合解决随机不确定问题^[9-10], 并且在线辨识参数时仅假定其服从一定的先验分布, 未考虑参数的有界不确定性.

针对有界不确定性问题, 非概率的方法得到了广泛应用, 比如集员估计(set membership filter, SMF)方法^[11-14], 它以包含系统真实状态的外界定椭球集合为

收稿日期: 2016-11-18; 录用日期: 2017-03-13.

[†]通信作者. E-mail: gaizihao@jiangnan.edu.cn; Tel.: 13812072925.

本文责任编辑: 刘允刚.

国家自然科学基金项目(61573169)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61573169).

基础, 仅要求系统噪声满足有界性. 此方法下得到的状态估计是一个椭球集合, 且集合内的值都是可解. Scholte将上述算法由线性系统推广至非线性系统, 提出了一种扩展集员算法(extended SMF, ESMF)^[15], 该方法利用泰勒展开, 将非线性系统进行线性化处理, 并利用区间分析技术估计高阶项的线性化误差范围, 用椭球外包后与噪声椭球集相结合组成虚拟过程误差椭球集, 然后与线性化椭球集进行并运算, 最后利用测量值信息更新椭球集, 从而得到估计结果. 但是, 上述方法考虑的是噪声在有界区间内的不确定问题, 目前还没有针对参数失配有界下的状态估计算法.

本文考虑参数在有界区间内的不确定性, 提出一种基于ESMF的非线性状态估计方法. 在预测步, 利用简单区间扩展函数得到其失配引起的预测状态偏差范围, 将其当作有界不确定性问题处理. 利用非概率的ESMF算法把模型中的不确定部分(如噪声、初始状态、参数失配引起的有界偏差范围等)用椭球集表示, 结合区间分析技术和椭球并运算性质, 得到更加准确的先验椭球集. 在更新步, 由测量值信息得到包含真实状态的观测集, 为了得到最小化椭球集, 将此观测集与先验椭球集取交集, 不失一般性, 以更新的后验椭球集中心作为当前时刻的状态估计值. 最后用数值仿真和连续发酵过程仿真验证了所提算法的有效性.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑参数失配有界下的状态空间模型如下:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\theta}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统状态和测量值; $\mathbf{f}(\cdot)$, $\mathbf{h}(\cdot)$ 分别是状态转移函数和测量函数, \mathbf{w}_{k-1} 和 \mathbf{v}_k 分别是系统的状态噪声和测量噪声; 参数 $\boldsymbol{\theta}_{k-1} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l\}$, l 表示失配的参数个数, 其中: $\theta_1 \in [a_1, b_1]$, $\theta_2 \in [a_2, b_2], \dots, \theta_l \in [a_l, b_l]$, a_1, a_2, \dots, a_l 表示各个参数变化的下界值, b_1, b_2, \dots, b_l 是参数的上界值. 为了简化公式, 下文均以单个参数为例, 进行说明.

3 区间运算和椭球集表示方法(Interval arithmetic and preliminaries of ellipsoidal techniques)

3.1 区间量及其运算(Interval quantity and its operation)

定义1 实数集 \mathbb{R} 中的有界闭集合 X 如下表示^[16]:

$$X = [\underline{x}, \bar{x}] = \{\bar{x}, \underline{x} \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}, \quad (3)$$

\bar{x} 和 \underline{x} 分别是区间 X 的最大值和最小值. 区间 X 的宽度 $w(\cdot)$ 、中心 $m(\cdot)$, 定义为

$$w(X) = \bar{x} - \underline{x}, \quad (4)$$

$$m(X) = (\bar{x} + \underline{x})/2. \quad (5)$$

所有实值区间记为 \mathbb{IR} . 对 $X = [\underline{x}, \bar{x}]$, $Y = [\underline{y}, \bar{y}]$, $X, Y \in \mathbb{IR}$, 有

$$X \circ Y = \{x \circ y | x \in X, y \in Y\}, \quad (6)$$

式中“ \circ ”表示实数间的基本运算符, $\circ \in \{+, -, \times, /\}$.

3.2 简单区间扩展函数(Simple interval extension function)

对于给定的由基本函数和四则运算组成的实函数 $f(\cdot)$, 将每一个实变量用区间变量代替, 每个基本函数和运算法则都用相应的区间基本函数和区间运算法则代替, 即得简单扩展函数^[17].

3.2.1 函数界限(Function boundaries)

一般, 若 $f(\cdot)$ 为 n 个实变量的实值连续函数, $x_i \in X_i (i = 1, \dots, n)$, 则有

$$\begin{aligned} \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in X_i\} \subseteq \\ f(X_1, X_2, \dots, X_n). \end{aligned} \quad (7)$$

单个变量 $x_i \in X_i$ 是有界的, 因此实函数 $f(\cdot)$ 的界限可以通过计算求得. 将 $f(\cdot)$ 进行简单区间扩展, 通过计算扩展函数的区间值, 可得函数 $f(\cdot)$ 的界限. 值得注意的是, 为了避免区间扩张(intervals overestimation)现象^[18-19], 在简单区间扩展函数中, 应尽可能地减少同一区间变量在函数中出现的次数.

3.3 椭球集合及其运算性质(Ellipsoid set and its operation properties)

区间量 X 以及通过简单区间函数得到的函数界限都满足有界性, 参考文献[11], 将此类定界区域用椭球集合表示.

3.3.1 椭球定界集合描述(Ellipsoid set description)

定义2 对一定范围的变量 \mathbf{x} 采用椭球定界的方法描述. 椭球集 $E(\mathbf{c}, P)$ 如下:

$$E(\mathbf{c}, P) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | (\mathbf{x} - \mathbf{c})^T P^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \leq 1\}, \quad (8)$$

式中: \mathbf{c} 为椭球中心, P 为正定的椭球包络矩阵.

因此模型的过程和测量噪声、初始状态用如下椭球集表示:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{k-1} \in E(\mathbf{0}, Q_{k-1}) \Leftrightarrow \mathbf{w}_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1} \mathbf{w}_{k-1} \leq 1, \\ \mathbf{v}_k \in E(\mathbf{0}, R_k) \Leftrightarrow \mathbf{v}_k^T R_k^{-1} \mathbf{v}_k \leq 1, \\ \mathbf{x}_0 \in E(\hat{\mathbf{x}}_0, P_0) \Leftrightarrow (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T P_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0) \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

3.3.2 椭球交运算和并运算(Ellipsoid operations and operations)

1) 椭球交运算.

定义两个椭球分别为 $E(\mathbf{c}_1, P_1)$ 和 $E(\mathbf{c}_2, P_2)$, 它们的交集用外包椭球 $E(\mathbf{c}, P)$ 近似, 即

$$E(\mathbf{c}, P) \supseteq E(\mathbf{c}_1, P_1) \cap E(\mathbf{c}_2, P_2), \quad (10)$$

其中:

$$\begin{cases} \mathbf{c} = \mathbf{c}_1 + P_1(P_1 + \frac{1-\rho}{\rho}P_2)^{-1}(\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1), \\ P = \Psi(\rho)(I - P_1(P_1 + \frac{1-\rho}{\rho}P_2)^{-1})\frac{P_1}{1-\rho}, \\ \Psi(\rho) = 1 - (\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1)^T(\frac{P_1}{\rho} + \frac{P_2}{1-\rho})^{-1}(\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1). \end{cases} \quad (11)$$

当两个椭球有非空交集时, $\Psi(\rho) > 0$, $\rho \in (0, 1)$. 同时参数 ρ 的选取直接影响了覆盖交集部分的椭球大小. 参考文献[20], 为了得到最小化椭球, 采用最小化性能指标 $\Psi(\rho)$ 上界的形式来求取 ρ :

$$\rho = \arg \min_{\rho \in (0,1)} \sup(\Psi(\rho)), \quad (12)$$

可得 ρ 的计算公式为

$$\rho = \frac{\sqrt{P_{1,\max}}}{\sqrt{P_{1,\max}} + \sqrt{P_{2,\max}}}, \quad (13)$$

$P_{1,\max}$ 和 $P_{2,\max}$ 分别是 P_1 和 P_2 的最大奇异值.

2) 椭球并运算.

定义两个椭球分别为 $E(\mathbf{c}_1, P_1)$ 和 $E(\mathbf{c}_2, P_2)$, 它们的交集用外包椭球 $E(\mathbf{c}, P)$ 近似, 其中

$$E(\mathbf{c}, P) \supseteq E(\mathbf{c}_1, P_1) \oplus E(\mathbf{c}_2, P_2), \quad (14)$$

其中:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2, P = \frac{P_1}{\alpha} + \frac{P_2}{1-\alpha}. \quad (15)$$

对参数 $\alpha \in (0, 1)$ 的选取, 可以使得外包椭球满足一定的最优准则. 这里采取最小化迹的原则, 即

$$\alpha = \arg \min_{\alpha \in (0,1)} \text{tr}(P), \quad (16)$$

从而得到 α 为

$$\alpha = \frac{\sqrt{\text{tr}(P_1)}}{\sqrt{\text{tr}(P_1)} + \sqrt{\text{tr}(P_2)}}. \quad (17)$$

4 参数失配有界下扩展集员估计方法 (Extended set membership filtering (ESMF) method for process with bounded-mismatch parameters)

4.1 ESMF算法概述 (An overview of the ESMF algorithm)

ESMF算法以外定界椭球为基础, 得到的状态估计是一个椭球集合, 且椭球集内的值都是可行解. 其估计时包括预测步和更新步.

预测步 已知前一个时刻系统状态满足 $\mathbf{x}_{k-1} \in E(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, P_{k-1})$ 椭球集合, 并结合状态转移方程 $\mathbf{f}(\cdot)$ 预测 k 时刻状态满足的最小化先验椭球集 $\mathbf{x}_k \in E(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}, P_{k,k-1})$. 其中: $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 和 P_{k-1} 分别表示 $k-1$ 时刻的状态估计值和其椭球集的包络矩阵, $\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}$ 和 $P_{k,k-1}$ 表示 k 时刻状态的预测值和先验椭球集的包络矩阵. 当状态方程是非线性时, 将其在当前估计点处线性化展开成泰勒级数的形式, 利用区间分析技术得到高阶项的线性化误差范围. 模型中的不确定部分

包括线性化一次项、高阶误差项和噪声项, 分别用线性化椭球、线性化误差椭球和噪声椭球将各个部分外包. 先验椭球集实际上是3个椭球的并运算得到.

更新步 预测步得到系统的状态 \mathbf{x}_k 在先验椭球集 $E(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}, P_{k,k-1})$ 内, 此时利用测量值和观测方程 $\mathbf{h}(\cdot)$, 得到状态满足观测集 $S_k = \{\mathbf{x}_k | (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k))^T \hat{R}_k^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)) \leq 1\}$, 将两者取交集, 得到后验椭球集 $E(\hat{\mathbf{x}}_k, P_k)$.

但上述是在模型准确下的估计, 如果状态转移方程中参数存在有界失配时, 应考虑其变化对预测状态的影响.

4.2 参数失配有界下预测先验椭球集 (Predict a priori ellipsoid set under the bounded-mismatch model parameter)

4.2.1 参数失配有界对预测值影响 (Influence of the bounded-mismatch model parameter on prediction)

在式(1)的状态转移模型中, 参数 θ_{k-1} 满足有界性, 但未知其分布信息. 模型参数的准确性影响了状态估计的精度. 在状态估计的预测步, 仅以随机方式选取参数值, 参数可信度低. 此外, 当选取值与真实的参数值偏差较大时, 引起先验椭球集偏离真实的状态, 降低估计精度.

由式(7)知, 当 $\theta_{k-1} \in [a, b]$ 时, 令 $X = [a, b]$, 得 $\mathbf{f}(\theta_{k-1}) \subseteq \mathbf{F}(X)$, $\mathbf{F}(\cdot)$ 是 $\mathbf{f}(\cdot)$ 的简单区间扩展函数. 即参数有界变化时, 利用简单区间函数可以计算有界范围. 式(1)转化如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \theta_{k-1}) = \\ &\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \theta_m) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \theta_{k-1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \theta_m) = \\ &\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \theta_m) + \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中参数 $\theta_m = m(X)$. 状态估计的预测步不仅考虑状态在参数变化区间中心点的估计值, 还利用参数有界性, 计算偏离中心的范围, 从而得到更加准确的先验集.

4.2.2 参数偏差椭球集 (Parameter deviation ellipsoid set)

参数失配有界情况下, 导致状态的预测值存在偏差. 以参数变化范围的中心点为基准, 求取参数在有界范围内变化, 引起偏离中心的差值, 并用椭球集外包. 计算 $k-1$ 时刻, 参数引起的偏差 $\boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \theta_{k-1}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \theta_m). \quad (19)$$

利用简单区间扩展函数, 计算得

$$\sigma_{k-1} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, X) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \theta_m), \quad (20)$$

$$\sigma_{k-1}^i = [\sigma_{k-1}^i, \bar{\sigma}_{k-1}^i], \quad (21)$$

其中: σ_{k-1} 是 $n \times 1$ 的区间矩阵, σ_{k-1}^i 表示其第 i 行区间元素, $i = 1, 2, \dots, n$; 并记 $a_\sigma^i = m(\sigma_{k-1}^i)$, $b_\sigma^i =$

$$\frac{1}{2}w(\sigma_{k-1}^i), \mathbf{a}_\sigma = [a_\sigma^1 \ a_\sigma^2 \ \cdots \ a_\sigma^n]^T.$$

考虑覆盖有界偏差区域的椭球体积最小, 用如下椭球 $E(\mathbf{a}_\sigma, \Delta_{k-1})$ 表示偏差 $\boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}$:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} - \mathbf{a}_\sigma)^T \Delta_{k-1}^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} - \mathbf{a}_\sigma) \leq 1, \quad (22)$$

$$[\Delta_{k-1}]^{i,i} = 2(b_\sigma^i)^2, [\Delta_{k-1}]^{i,j} = 0 (i \neq j), \quad (23)$$

其中记号 $[\Delta_{k-1}]^{i,j}$ 表示 Δ_{k-1} 的 (i, j) 元素.

4.2.3 参数失配有界下线性化误差椭球集 (Linearization error ellipsoid set under the bounded-mismatch model parameter)

对非线性状态方程在当前估计点做泰勒展开, 基于区间最大化技术^[21-22], 获得线性化产生的拉格朗日余子的最大区间.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k = & \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \theta_m) + A_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \\ & R_f(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, X_{k-1}, \theta_m) + \\ & \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

矩阵 A_{k-1} 为

$$A_{k-1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \theta_m)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}}, \quad (25)$$

其中拉格朗日余子式取值区间为

$$\begin{aligned} R_f(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, X_{k-1}, \theta_m) = \\ \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \frac{\partial^2 \mathbf{f}(X_{k-1})}{\partial^2 \mathbf{x}_{k-1}} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \end{aligned} \quad (26)$$

X_{k-1} 表示 $k-1$ 时刻状态分量的不确定区间, 如下表示:

$$X_{k-1}^i = [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^i - \sqrt{P_{k-1}^{i,i}} \ \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^i + \sqrt{P_{k-1}^{i,i}}], \quad (27)$$

记号 $P_{k-1}^{i,i}$ 表示 P_{k-1} 的 (i, i) 元素, $i = 1, 2, \dots, n$. 对于多维状态系统, 有

$$\begin{aligned} R_f = \frac{1}{2} \text{diag}\{X_{k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, X_{k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \dots, \\ X_{k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}\} \begin{pmatrix} N_{\text{es}1} \\ \vdots \\ N_{\text{es}n} \end{pmatrix} (X_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $N_{\text{es}i}$ 为 $\mathbf{f}(\cdot)$ 的 Hessian 矩阵

利用区间分析技术得到线性化误差的边界, 并用椭球将线性化误差外包, 得到外包椭球 $E(\mathbf{0}, \bar{Q}_{k-1})$:

$$[\bar{Q}_{k-1}]^{i,i} = 2(R_f)^2, [\bar{Q}_{k-1}]^{i,j} = 0 (i \neq j). \quad (29)$$

4.2.4 参数失配有界下先验椭球集 (A priori ellipsoid set under the bounded-mismatch model parameter)

状态方程参数在失配有界下, 考虑参数失配所引起的偏差, 先验椭球集由线性化椭球、线性化误差椭

球、噪声椭球和参数偏差椭球集 4 个椭球的并运算得到. 其中把线性化误差椭球、噪声椭球、参数偏差椭球集三者并集当作虚拟过程偏差椭球 $\hat{\mathbf{w}}_{k-1} \in E(\mathbf{a}_\sigma, \hat{Q}_{k-1})$, 其边界椭球为

$$\hat{Q}_{k-1} = \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{\bar{Q}_{k-1}}{1-\alpha} + \frac{Q_k}{\alpha} \right) + \frac{\Delta_{k-1}}{\beta}. \quad (30)$$

利用最小迹椭球原理, 如下选取参数 α, β :

$$\alpha = \frac{\sqrt{\text{tr}(Q_k)}}{\sqrt{\text{tr}(Q_k)} + \sqrt{\text{tr}(\bar{Q}_{k-1})}}, \quad (31)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\text{tr}(\Delta_{k-1})}}{\sqrt{\text{tr}(\Delta_{k-1})} + \sqrt{\text{tr}\left(\frac{\bar{Q}_{k-1}}{1-\alpha} + \frac{Q_k}{\alpha}\right)}}. \quad (32)$$

最终的先验椭球集 $E(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}, P_{k,k-1})$, 融合了线性化椭球 $E(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \theta_m), A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^T)$ 和虚拟过程噪声椭球, 并且其椭球中心 $\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}$ 作为当前时刻的状态预测值, 如下:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{a}_\sigma, \quad (33)$$

$$P_{k,k-1} = \frac{A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^T}{1-\chi} + \frac{\hat{Q}_{k-1}}{\chi}, \quad (34)$$

$$\chi = \frac{\sqrt{\text{tr}(\hat{Q}_{k-1})}}{\sqrt{\text{tr}(\hat{Q}_{k-1})} + \sqrt{\text{tr}(A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^T)}}. \quad (35)$$

4.3 参数失配有界下更新椭球集 (Update ellipsoid set under the bounded-mismatch model parameter)

更新过程: 使用观测值更新过程其实质是将先验椭球集与观测集做交集, 用后验椭球集覆盖其交集部分. 椭球集内的值都是可行解, 现未有优化的准则关于如何在椭球集内选取最优估计值, 参考文献[15], 考虑公式的简化, 将其中心作为 k 时刻的估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$, 具体如下:

$$\begin{aligned} \xi_k = & 1 - (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}))^T \times \\ & \left(H_k \frac{P_{k,k-1}}{1-\rho} H_k^T + \frac{\hat{R}_k}{\rho} \right)^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1})), \end{aligned} \quad (36)$$

$$K_k = \frac{P_{k,k-1}}{1-\rho} H_k^T \left(H_k \frac{P_{k,k-1}}{1-\rho} H_k^T + \frac{\hat{R}_k}{\rho} \right)^{-1}, \quad (37)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} + K_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1})), \quad (38)$$

$$P_k = \xi_k (I - K_k H_k) \frac{P_{k,k-1}}{1-\rho}, \quad (39)$$

其中: $H_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}}$ 为观测方程的雅克比矩阵, K_k 表示滤波增益, P_k 是表征后验椭球形状的矩阵. $\xi_k \leq 0$ 时, 椭球边界无意义, 说明对噪声边界和初始状态不准确, 因此该参数可用于评价算法的性能^[23].

根据椭圆交运算性质, 选取参数 ρ 得到最小化椭圆, 如下:

$$\rho = \frac{\sqrt{d_1}}{\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}}, \quad (40)$$

d_1 和 d_2 分别是矩阵 \hat{R}_k 和 $H_k P_{k,k-1} H_k^T$ 的最大奇异值. 上述参数 $\alpha, \beta, \chi, \rho$ 的存在会加剧数值的不稳定, 可能出现 P_k 不满足正定性或者对角元素出现负值的情况. Zhou等人基于对称正定矩阵 P 可被分解为 $P=UDU^T$ 的原理, U 为单位上三角矩阵, D 为对角矩阵, 提出了基于UD分解的自适应ESMF方法^[20]. 该算法将各包络矩阵作UD分解, 并在迭代的每一步以包络矩阵的UD分解因子代替原包络矩阵进行更新, 改进了传统ESMF算法的数值稳定性问题, 在此本文不做详细介绍.

综上, 模型参数失配有界下的状态估计示意图如图1所示, tf 表示仿真步长.

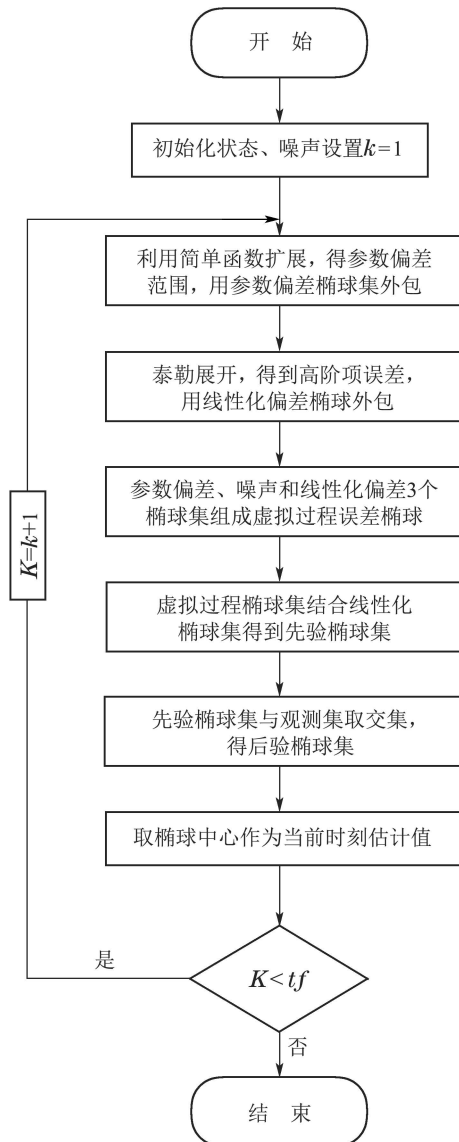


图1 参数失配下ESMF算法估计示意图

Fig. 1 ESMF state estimation in parameter mismatch

5 仿真验证(Simulation studies)

5.1 数值仿真(Numeric example)

非线性系统的模型如下:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - 0.2C(k)x_1^2(k), \\ x_2(k+1) = x_2(k) + 0.1C(k)x_1^2(k), \\ y_1(k+1) = x_1(k+1), \\ y_2(k+1) = 3x_2(k+1), \end{cases} \quad (41)$$

其中: 假设初始状态的边界约束为 $3I$, 状态的初始值 $x_0 = [3 \ 1]^T$, 状态的初始估计值 $x_0^- = [2 \ 0.5]^T$, 状态噪声 $w_k \sim U(10^{-3} \times [1; 1], 10^{-3} \times [1; 1])$, 测量噪声 $v(k) \sim U(10^{-2} \times [1; 1], 10^{-2} \times [1; 1])$. 模型参数 $C(k) \in [0.06, 0.26]$. 仿真时设置: $k \leq 30, C(k) = 0.11, 30 < k \leq 70, C(k) = 0.06, k > 70, C(k) = 0.26$. 选择均方根误差RMSE作为性能指标: $RMSE = \sqrt{\sum_{k=1}^{tf} (e_k)^2 / tf}$, e_k 表示第 k 时刻估计值与真实值的偏差. 仿真结果如图2-3所示.

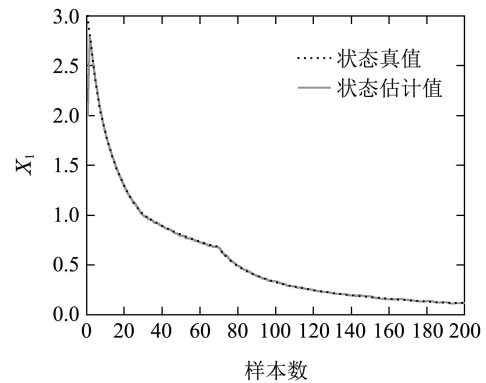


图2 x_1 的状态估计
Fig. 2 State estimation of x_1

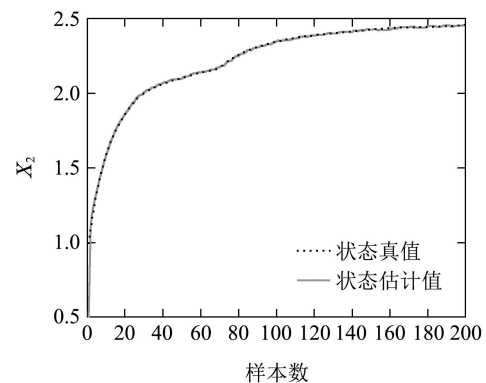


图3 x_2 的状态估计
Fig. 3 State estimation of x_2

图2-3是扩展集员算法在模型参数失配有界下的仿真效果. 由图知, 在刚开始时, 利用ESMF估计的状态值与真实值差别较大. 随着仿真步长的增加, 估计值收敛于真实值. 此外, 在参数值发生变化的拐点处

能较好、较快地跟踪真实值. 由表1可知, 采用 ESMF 算法, 均方根误差值较小.

表 1 两种算法下各个状态对应的均方根误差

Table 1 RMSE for each state of the two filtering

均方根误差	x_1	x_2
扩展集员	0.0709	0.0356

5.2 连续发酵过程仿真实验(Fermentation model)

连续发酵过程的模型如下^[24-25]:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -DX + \mu(P, S)X, \\ \frac{dS}{dt} = D(S_f - S) - \frac{1}{Y_{X/S}}\mu(P, S)X, \\ \frac{dP}{dt} = -DP + (\eta\mu(P, S) + \gamma)X, \end{cases} \quad (42)$$

其中: X, S 和 P 分别是反应物的菌体浓度、底物浓度和产物浓度, D 是稀释率, S_f 是添加的底物浓度. $Y_{X/S}$ 是细胞质量产量, η 和 γ 是反应物的生长参数. $\mu(P, S)$ 表示底物和产物的特定生长率, 模型如下:

$$\mu(P, S) = \frac{\mu_m(1 - \frac{P}{P_m})S}{K_m + S + \frac{S^2}{K_i}}, \quad (43)$$

μ_m 是最大比生长率, P_m 是产物的饱和常数, K_m 和 K_i 分别是底物的饱和常数和抑制常数. 具体的参数值见表2.

表 2 发酵过程中各参数数值

Table 2 fermenter parameters and their operating conditions

参数	$Y_{X/S}$	η	γ	μ_m	P_m
数值	0.4 g/g	2.2 g/g	0.2 h ⁻¹	0.48 h ⁻¹	50 g/l
参数	K_m	K_i	D	S_f	
数值	1.2 g/l	22 g/l	0.15 h ⁻¹	20 g/l	

实验时假定已知稀释率和底物添加浓度的边界变化范围, $|\Delta D| \leq 0.06$, $|\Delta S_f| \leq 3$. 状态 $[X \ S \ P]^T$, 测量值 $Y = [X \ S \ P]^T$, 过程噪声 $w_k \sim U(-10^{-2} \times [1; 1; 1], 10^{-2} \times [1; 1; 1])$, 测量噪声 $v_k \sim U(-10^{-2} \times [1; 1; 1], 10^{-2} \times [1; 1; 1])$, 状态的初始值 $[X_1 \ S_1 \ P_1] = [7.038 \ 2.404 \ 24.87]^T$, 初始估计值 $[X_1^- \ S_1^- \ P_1^-] = [5 \ 1 \ 20]^T$. 在 $t < 80$ 时, $D(t) = 0.15$, $S_f(t) = 20$; 在 $80 \leq t \leq 200$ 时, $D(t) = 0.09$, $S_f(t) = 17$; 在 $t > 200$ 时, $D(t) = 0.21$, $S_f(t) = 23$. 仿真结果如图4-6所示.

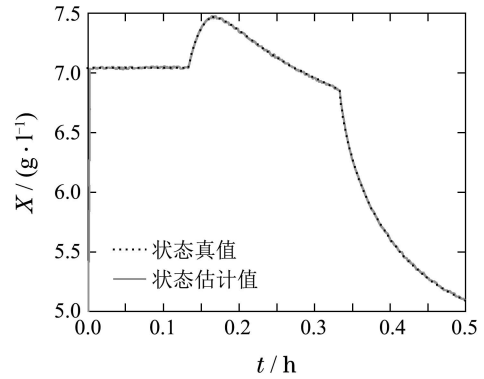


图 4 X 的状态估计

Fig. 4 State estimation of X

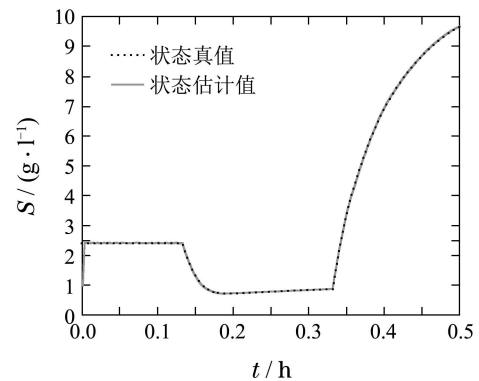


图 5 S 的状态估计

Fig. 5 State estimation of S

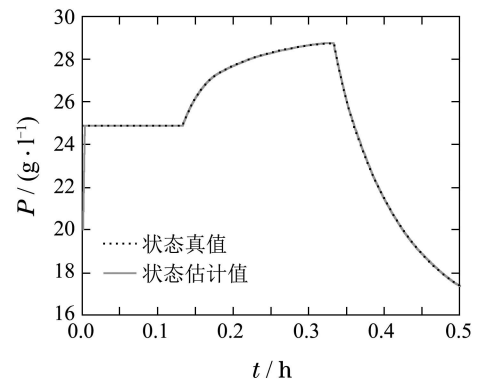


图 6 P 的状态估计

Fig. 6 State estimation of P

从图4-6可以看出, 在模型参数失配有界情况下, 本文利用提出的ESMF算法, 得到的状态估计值能较好地跟踪真实值. 比如80, 200的采样时刻, 参数值发生变化, 菌体浓度 X 、底物浓度 S 和产物浓度 P 有明显波动, 此时得到的估计值仍能较快地跟踪真实值. 此外, 由表3得, ESMF算法估计的均方根误差值较小.

表 3 两种算法下各个状态对应的均方根误差

Table 3 RMSE for each state of the two filtering

均方根误差	X	S	P
扩展集员	0.1178	0.0813	0.2812

6 结论(Conclusions)

考虑参数失配有界对状态预测值的影响, 本文结合区间算法和简单区间扩展函数得到其有界失配引起的偏差范围. 在先验估计时, 利用非概率的扩展集员算法将噪声、初始状态、参数失配引起的有界偏差范围等用椭球集表示, 并利用区间分析技术和椭球并运算性质, 得到包含真实状态的先验椭球集. 在更新状态时, 由测量值信息得到包含真实状态的观测集, 状态值应该在两个椭球集的交集部分, 利用交运算性质, 得到最小化椭球, 不失一般性, 以更新得到的后验椭球集中心作为状态估计值. 仿真结果证明了该算法的有效性.

参考文献(References):

- [1] BAVDEKAR V A, GOPALUNI R B, SHAH S L. Evaluation of adaptive extended kalman filter algorithms for state estimation in presence of model-plant mismatch [J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2013, 46(32): 184 – 189.
- [2] KARIMI H, MCAULEY K B. A maximum-likelihood method for estimating parameters, stochastic disturbance intensities and measurement noise variances in nonlinear dynamic models with process disturbances [J]. *Computers & Chemical Engineering*, 2014, 67(15): 178 – 198.
- [3] ANDRIEU C, DOUCET A, SINGH S S, et al. Particle methods for change detection, system identification, and control [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2004, 92(3): 423 – 438.
- [4] GOPALUNI R B. A particle filter approach to identification of nonlinear processes under missing observations [J]. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 2008, 86(6): 1081 – 1092.
- [5] ZHAO Z G, HUANG B, LIU F. Parameter estimation for batch processes with Measurements of large sampling intervals [J]. *IFAC-Papersonline*, 2015, 48(28): 799 – 804.
- [6] TULSYAN A, HUANG B, GOPALUNI R B, et al. On simultaneous on-line state and parameter estimation in non-linear state-space models [J]. *Journal of Process Control*, 2013, 23(4): 516 – 526.
- [7] KANTAS N, DOUCET A, SINGH S S, et al. An overview of sequential monte carlo methods for parameter estimation in general state-space models [J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2009, 42(10): 774 – 785.
- [8] OLIVIER L E, HUANG B, CRAIG I K. Dual particle filters for state and parameter estimation with application to a run-of-mine ore mill [J]. *Journal of Process Control*, 2012, 22(4): 710 – 717.
- [9] ZHOU Bo, DAI Xianzhong. Improved set-membership identification algorithm with adaptive noise bounding [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(2): 167 – 171.
(周波, 戴先中. 自适应噪声定界的改进集员辨识算法 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(2): 167 – 171.)
- [10] JIANG Tao, QIAN Fucai, YANG Hengzhan, et al. A new combined filtering algorithm for systems with dual uncertainties [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(4): 535 – 544.
(江涛, 钱富才, 杨恒占, 等. 具有双重不确定性系统的联合滤波算法 [J]. 自动化学报, 2016, 42(4): 535 – 544.)
- [11] SCHWEPPE F. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, 13(1): 22 – 28.
- [12] FOGEL E, HUANG Y F. On the value of information in system identification-bounded noise case [J]. *Automatica*, 1982, 18(2): 229 – 238.
- [13] SAVKIN A V, PETERSEN I R. Robust state estimation and model validation for discrete-time uncertain systems with a deterministic description of noise and uncertainty [J]. *Automatica*, 1998, 34(2): 271 – 274.
- [14] CHAI Wei, SUN Xianfang. An improved estimation algorithm for set membership states by zonotopes [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(2): 273 – 277.
(柴伟, 孙先仿. 改进的全对称多胞形集员状态估计算法 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(2): 273 – 277.)
- [15] SCHOLTE E, CAMPBELL M E. A nonlinear set-membership filter for on-line applications [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(15): 1337 – 1358.
- [16] JACKSON K R, NEDIALKOV N S. Some recent advances in validated methods for IVPs for ODEs [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2002, 42(1): 269 – 284.
- [17] ZHANG Jianhua. *The global optimization algorithm using interval mathematics and its application* [D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2012.
(张建华. 基于区间数学的全局优化算法及其应用研究 [D]. 合肥: 合肥工业大学, 2012.)
- [18] GUO Shuxiang, ZHANG Ling, LI Ying. Procedures for computing the non-probabilistic reliability index of uncertain structures [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, 22(2): 227 – 231.
(郭书祥, 张陵, 李颖. 结构非概率可靠性指标的求解方法 [J]. 计算力学学报, 2005, 22(2): 227 – 231.)
- [19] FANG Shengen, ZHANG Qihu, LIN Youqin, et al. Uncertain parameter identification using interval response surface model updating [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2015, 28(1): 73 – 81.
(方圣恩, 张秋虎, 林友勤, 等. 不确定性参数识别的区间响应面模型修正方法 [J]. 振动工程学报, 2015, 28(1): 73 – 81.)
- [20] ZHOU B, HAN J D, LIU G J. A UD factorization-based nonlinear adaptive set-membership filter for ellipsoidal estimation [J]. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2008, 18(18): 1513 – 1531.
- [21] MOORE R E. *Methods and Applications of Interval Analysis* [M]. Philadelphia: Siam, 1979: 56 – 57.
- [22] PRYCE J D, CORLISS G F. Interval arithmetic with containment sets [J]. *Computing*, 2006, 78(3): 251 – 276.
- [23] SONG D L, WU C, QI J T, et al. A MIT-based nonlinear adaptive set-membership filter for the ellipsoidal estimation of mobile robots states [J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2012, 9(11): 1847 – 1860.
- [24] HENSON M A, SEBORG D E. Nonlinear control strategies for continuous fermenters [J]. *Chemical Engineering Science*, 1990, 47(4): 821 – 835.
- [25] SHAO X G, ZHAO Z G, LIU F, et al. Ellipsoidal set based robust particle filtering for recursive Bayesian state estimation [C] // *The 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*. Hangzhou, China: IEEE, 2013: 568 – 573.

作者简介:

宋莎莎 (1994-), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为工业过程软测量与状态估计, E-mail: 18806185698@163.com;

赵忠盖 (1976-), 男, 教授, 目前研究方向为工业过程软测量与状态估计、工业过程监测与诊断等, E-mail: gaizhao@jiangnan.edu.cn;

刘飞 (1965-), 男, 教授, 目前研究方向为先进控制理论与应用、工业过程监测与诊断、工业过程综合自动化等, E-mail: fliu@jiangnan.edu.cn