

二阶系统有限时间控制方法综述

姜博严^{1,2}, 李佳玲², 李传江^{3†}, 姚文卿¹

(1. 常州工学院 电气信息工程学院, 江苏 常州 213032; 2. 河海大学 物联网工程学院, 江苏 常州 213200;

3. 哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 相比于传统且经典的比例-积分-微分(PID)控制, 带有指数参数的有限时间控制方法具有更好的控制性能, 因而引起广泛的关注和研究. 本文首先从方法设计和稳定性分析角度, 对现有主流有限时间控制方法进行整理和归纳, 将其分为17种有限时间状态反馈控制方法及6种有限时间输出反馈控制方法. 其次, 以一类具有普遍和基础性的二阶系统为例, 统一变量和参数, 给出了每种控制方法对应的控制器的显式结构. 然后, 通过原理分析和比较分析, 对每种控制方法的优点及不足之处进行了总结, 尤其是给出了终端滑模控制具有“控制奇异与收敛时间矛盾性”的结论, 以及指出了一些方法存在较大保守性的问题. 最后, 通过列表的方式展示了所有有限时间控制方法的优缺点及值得进一步深入研究的课题.

关键词: 有限时间控制; 终端滑模; 齐次系统; 加幂积分; 输出反馈控制

引用格式: 姜博严, 李佳玲, 李传江, 等. 二阶系统有限时间控制方法综述. 控制理论与应用, 2024, 41(5): 769 – 797

DOI:10.7641/CTA.2023.20003

Review on finite-time control method for a second-order system

JIANG Bo-yan^{1,2}, LI Jia-ling², LI Chuan-jiang^{3†}, YAO Wen-qing¹

(1. School of Electrical and Information Engineering, Changzhou Institute of Technology, Changzhou Jiangsu 213032, China;

2. College of Internet of Things Engineering, Hohai University, Changzhou Jiangsu 213200, China;

3. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: In comparison to the traditional and classical proportional-integral-derivative (PID) control, the finite-time control with exponential parameters has better control performance, so it has been widely researched in recent years. This paper reviews nearly all the mainstream finite-time control methods, and the main contributions of this review are as follows. First, the mainstream finite-time control methods are divided into seventeen finite-time state feedback control methods and six finite-time output feedback control methods, on the basis of stability analysis. Afterwards, for a general and fundamental second-order system, the mathematical expressions of all the control methods are explicitly presented by standardizing variables and parameters. In the next part, through principle analysis and comparative analysis, the advantages and disadvantages of every control method are summarized, in particular, the problem of “the contradiction between control singularity and convergence time” with regard to terminal sliding mode control, and the mistakes of some control methods are proposed. Finally, the comparison results and the future research directions of all the control methods are presented in tabular form.

Key words: finite-time control; terminal sliding mode; homogeneous system; adding a power integrator; output feedback control

Citation: JIANG Boyan, LI Jialing, LI Chuanjiang, et al. Review on finite-time control method for a second-order system. *Control Theory & Applications*, 2024, 41(5): 769 – 797

1 引言

控制理论研究的目的是使系统具有更佳的性能, 而对控制方法的研究是其重要的组成部分. 传统

经典的比例-积分-微分 (proportional-integral-derivative, PID) 控制方法因其结构简单、易懂易实现等优点, 被从事自动化行业人员所熟知并广泛应用. 随着

收稿日期: 2022-01-03; 录用日期: 2023-05-12.

†通信作者. E-mail: lichuan@hit.edu.cn; Tel.: +86 18961250621.

本文责任编辑: 夏元清.

国家自然科学基金项目(61903123), 江苏省自然科学基金项目(BK20190165), 常州市重点研发计划项目(CE20215022), 常州市科技支撑计划(工业)项目(CE20220046)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61903123), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20190165), the Key R&D Program of Changzhou City (CE20215022) and the Science and Technology Support Plan (Industrial) Project of Changzhou City (CE20220046).

科技领域的发展,对自动化系统性能的要求越来越高,用高级控制方法替代PID控制,能在不增加硬件成本基础上进一步提高控制性能,这也是研究控制方法的意义和目的。

主流有限时间(finite-time, FT)控制可看作是一种在PID控制基础上发展起来的更高级的控制方法.从控制器结构上看,FT控制比PID控制多了指数形式的控制参数,通过合理地设置该参数,能够获得更好的控制性能.从系统稳定性上看,FT控制能实现系统为有限时间稳定(FT stability, FTS),而PID仅能实现系统为渐近稳定.从纯理论角度来说,渐近稳定系统收敛到平衡点的时间是无穷大的,而FTS系统收敛到平衡点的时间是有限的.从实际应用角度来说,由于干扰等不确定因素的存在,系统状态只能收敛到期望平衡点附近的邻域内,虽然PID控制和FT控制驱动的系统稳定时间都是有限的,但FT系统因为多了指数形式参数,从而具有更快的收敛速度、更高的稳定精度等优点,这也是近20多年来FT控制引起众多学者的研究兴趣并取得一系列发展的原因。

关于FT控制的综述已有一些文章.丁世宏等^[1]在综述中介绍了FT控制早期的发展历程,及其在二阶系统、高阶系统、输出反馈控制系统、混沌系统、姿态控制系统、多智能体系统、永磁同步电机等不同系统上的研究成果.综述[2]介绍了大量FTS的判据,在文献[3]基础上总结了若干主流FT控制方法的优缺点及应用,以及若干非主流FT控制方法的研究现状.但文献[1]是十多年前的综述文章,而在最近十多年中,FT控制又有了一些新的研究成果.文献[2]总结的主流FT控制方法相对较少,而本文作者的文献[3]介绍的主流FT控制方法虽然相对全面,但因没给出控制器的显式形式及稳定性分析过程,导致很多读者不能很好理解控制方法之间的区别及一些方法具有的保守性.本文与文献[1-3]的不同之处在于:本文更侧重于展示和分析控制方法而非被控系统与控制问题,帮助读者从控制器显式形式的角度去认识众多的主流FT控制方法及其研究方向,这也是本文的初衷。

针对不同被控对象或控制问题,所采用的控制方法及控制器的结构一般是不同的.为了展示各种控制方法的显式结构,进而比较并分析各种方法的性能,必须选定一个具有一般性和基础性的系统作为被控对象.本文将罗列的FT控制方法皆是从设计的角度进行定义和区分的,而一阶系统因其结构简单,一般可直接根据FTS判据设计FT控制器,不需高级的设计方法,因此不能选择一阶系统作为本文的被控对象.FT控制在各种高阶系统上(三阶及三阶以上)虽然已取得了一系列的成果,且所有高级系统方法都可降阶用在二阶系统上,但二阶系统的FT控制方法并不能都扩展到高阶系统上,而本文要尽可能多的展示控制方

法,相比之下,选择二阶系统更具基础性.从二阶系统开始,FT控制根据设计思路的不同可分为众多流派,此外,对二阶系统的研究是高阶系统的基础,而且二阶系统能描述许多实际系统的数学模型,如航天器、无人机、机械臂、车辆、船舶、水下机器人等运动体位置和姿态的简化运动模型.因此,在二阶系统上展示所有主流FT控制方法,最具有普遍性和基础性,这也是本文选择二阶系统作为被控系统的主要原因。

注1 本文综述的主流FT控制,指的是控制器中含有指数项,且当系统模型精确已知时(不包含随机干扰等不确定项),能让系统状态在有限时间内收敛到平衡点的一类非光滑控制方法.而文献[4]中利用 $\dot{V} \leq -c$ 判据设计的FT控制、文献[5-6]中利用 $\dot{V} \leq -cTV/(T-t)$ 类型判据设计的FT控制、以及文献[7-8]中利用动态滑模方法设计的FT控制等,这些方法不含有指数项或为光滑控制,所以不在本文的综述范围内。

注2 这里给出本文最常用的几个函数和参数的定义.幂函数 $\text{sig}(\cdot)^p$ 表示 $\text{sig}(x)^p = \text{sign}(x)|x|^p$,其中: $x \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$,符号函数 $\text{sign}(x)$ 的定义如下:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad (1)$$

幂函数 $\text{sig}(x)^p$ 在 $x \neq 0$ 处的导数为^[9]

$$\frac{d}{dx} \text{sig}(x)^p = p|x|^{p-1}, \quad x \neq 0.$$

处理系统干扰或不确定性时,有时会用到微分包含意义下的符号函数 $\text{sgn}(x)$,一般称之变结构项,定义如下^[10]:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ \xi, & x = 0, \xi \in [-1, 1], \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (2)$$

此外,后文各种控制器的参数,如指数参数 p_1, p_2, p_3, p_4, g ,增益参数 k_1, k_2, k_3, k_4 ,阈值参数皆为正常数,而且,如无特别说明,其中指数参数满足 $g \in (1, 2)$, $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, 3, 4$,阈值参数 ε 为小正数.假设条件中的约束参数 c_1 和 c_2 为正常数. V_0 表示初始时刻对应的Lyapunov函数 V 值。

2 有限时间稳定基本判据及二阶系统模型

2.1 有限时间稳定的基本判据

FT控制可根据设计方法的不同而分成不同种类,为了方便后文解释不同的设计方法,需要先简单介绍判定系统是否为FTS的基本定义和基本判据。

考虑如下系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad t_0 = 0, \quad \mathbf{x}_0 \triangleq \mathbf{x}(0), \quad (3)$$

式中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为包含原点的定义域 U 到 n 维空间 \mathbb{R}^n 中的一个函数, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ 表示零向量, \mathbf{x}_0 为初始状态.令 $\mathbf{x}(t) = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = [f_1(\mathbf{x}) \ \cdots \ f_n(\mathbf{x})]^T$.基于该系统,先给出FTS的定义如下。

定义 1^[11](有限时间稳定定义) 针对系统(3), 若系统状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 在有限时间内收敛到平衡点 $\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$, 之后一直保持在平衡点上, 则系统为FTS. 其数学定义的描述为: 若在其邻域 $\Omega \subset U$ 内存在一个函数 $T(\boldsymbol{x}_0): \Omega \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow (0, \infty)$, 使得对 $\forall \boldsymbol{x}_0 \in \Omega \subset U$, 系统解记为 $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$, 且 $\boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}$, 如满足以下两个条件:

a) 当 $t \in [0, T(\boldsymbol{x}_0)]$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow T(\boldsymbol{x}_0)} \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$,

b) 当 $t > T(\boldsymbol{x}_0)$ 时, 有 $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$,

则系统为局部FTS, 且称 $T(\boldsymbol{x}_0)$ 为收敛时间. 若 $\Omega = U = \mathbb{R}^n$, 则系统为全局FTS.

2.1.1 基本判据之Lyapunov稳定定理

引理 1^[11](基于Lyapunov稳定的FTS定理) 针对系统(3), 在定义域上如果存在一阶可导正定函数 $V(\boldsymbol{x})$ 满足

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq -\alpha V(\boldsymbol{x})^p, \boldsymbol{x} \in U \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad (4)$$

其中 α 和 p 为正常数且满足 $p \in (0, 1)$, 则系统(3)为FTS, 且收敛时间 $T(\boldsymbol{x}_0)$ 满足

$$T(\boldsymbol{x}_0) \leq \alpha^{-1}(1-p)^{-1}V(\boldsymbol{x}_0)^{1-p}. \quad (5)$$

注 3 公式(4)是用Lyapunov方法设计FT控制器时最基本的判据, 在其基础之上, 还有诸如快速FTS判据^[12]: $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq -\alpha V(\boldsymbol{x})^p - \beta V(\boldsymbol{x})$, 以及固定时间稳定判据^[13]: $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq -\alpha V(\boldsymbol{x})^p - \beta V(\boldsymbol{x})^g$ 等等, 其中 β 和 g 为正常数, 且满足 $g > 1$. 本文主要从设计思路角度综述现有的FT控制方法, 虽然不同Lyapunov判据对应的控制器结构不同, 但不同判据对应的设计思路往往是相同的. 设计思路多达十几种, 而判据也有将近10种, 如果针对每个判据都综述其对应的控制方法, 显然工作量是巨大且重复的. 因此, 后文将仅基于式(4)这种最基本的FTS判据, 主要介绍FT控制的设计思路.

2.1.2 基本判据之齐次稳定定理

引理 2^[14](齐次度定义)

a) 系统齐次度定义: 若系统(3)对 $\forall \varepsilon > 0$, 满足

$$f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{k+r_i} f_i(\boldsymbol{x}),$$

其中: $r_i \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k \in \mathbb{R}$, 则称系统(3)关于扩张向量 (r_1, \dots, r_n) 具有齐次度 k .

b) 标量齐次度定义: 若标量函数 $V(\boldsymbol{x})$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 满足

$$V(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^\sigma V(\boldsymbol{x}),$$

其中: $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $r_i \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\sigma \in \mathbb{R}$, 则称 $V(\boldsymbol{x})$ 关于扩张向量 (r_1, \dots, r_n) 具有齐次度 σ .

引理 3^[15](基于齐次理论的FTS定理) 如果系统(3)为渐近稳定且 $f(\boldsymbol{x}(t))$ 具有负的齐次度, 则系统(3)为FTS.

引理 4^[9](基于齐次扩展的FTS定理) 如果系

统(3)中 $f(\boldsymbol{x}(t))$ 可写成

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}(t))$$

形式, 并满足以下两个条件:

a) 系统(3)的子系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}(t))$ 为FTS.

b) 对任意 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}(t))$ 满足

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_{2i}(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n)}{\varepsilon^{k+r_i}} = 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

其中 (r_1, \dots, r_n) 和 k 分别为关于系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}(t))$ 的扩张向量和齐次度, 则系统(3)为局部FTS.

引理 5^[16] 如果系统(3)为全局渐近稳定, 又为局部FTS, 则系统为全局FTS.

引理 6^[17](齐次反推Lyapunov定理) 若系统(3)关于 (r_1, r_2, \dots, r_n) , $r_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, 具有负的齐次度 k , 则一定存在正常数 c 和具有正齐次度 $\sigma > \max\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ 的一阶可导正定函数 $V(\boldsymbol{x})$, 满足

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq -cV(\boldsymbol{x})^{(\sigma+k)/\sigma}. \quad (7)$$

2.2 二阶系统模型

引言中解释了, 从一般性和基础性的角度出发, 本文选择二阶系统研究FT控制. 所以本文研究如下二阶系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = h(x_1)u + f(\boldsymbol{x}), \end{cases} \quad (8)$$

其中: x_1 和 x_2 为系统状态; u 为待设计的控制输入; $\boldsymbol{x} = [x_1 \ x_2]^T$; $f(\boldsymbol{x})$ 为关于 x_1 和 x_2 的已知函数且无奇异; $h(x_1)$ 表示关于 x_1 的已知函数, 且 $h(x_1)^{-1}$ 无奇异. 当考虑外界干扰或模型不确定性时, 系统(8)在大多情况下可写成如下具有扰动的形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = h(x_1)u + f(\boldsymbol{x}) + d, \end{cases} \quad (9)$$

其中 d 为有界的随机扰动.

一般来说, 只有FT控制能实现系统(8)为FTS, 而当考虑扰动时, 连续的FT控制和线性控制(如PID控制)都只能实现受扰动系统(9)的状态在FT内收敛并稳定在平衡点附近的邻域内. 明显不能称PID控制为FT控制, 因此, 判断一种控制方法是否为FT控制, 应当考察其是否能实现系统(8)为FTS. 定义1中对FTS的严格定义也可说明此点. 所以文本后面将针对精准系统(8)分析各种控制方法的稳定性, 以进一步考察其是否为严格意义的FT控制. 此外, 虽然所有闭环控制方法都对扰动具有抑制能力, 但并非所有控制方法都能对受扰动系统(如系统(9))进行稳定性分析, 比如齐次FT控制和齐次滤波控制等. 所以在叙述某种控制方法优缺点时, 会讨论其能否分析受扰动系统(9)的稳定性, 具体请见后文.

注4 由于系统(8)没有考虑诸如干扰、不确定性、执行机构故障或饱和、通信噪声或延迟等复杂情况, 所以其显然具备基础性. 虽然现如今控制研究的模型越来越复杂, 但系统模型越复杂, 其所对应的研究学者往往也越少. 本文作为一篇综述文章, 想要更多学者系统性的了解FT控制方法, 因此选择最基本且典型的系统(8)作为被控对象进行稳定性分析. 此外, 系统(8)也具有一般性, 航天器姿态^[18]或位置^[19]控制、船舶控制^[20]、四旋翼控制^[21]、机械臂控制^[22]等系统的标称数学模型, 一般都可以通过坐标变换写成式(8)的形式. 系统(8)具备基础性和一般性, 这也表明本篇综述选择系统(8)作为统一被控对象是合适的.

3 有限时间状态反馈控制方法

针对系统(8)的FT状态反馈控制指的是利用 x_1 和 x_2 信息设计控制器, 且能实现系统为FTS. 一般证明系统稳定的逆过程, 即为控制器的设计过程. 因此, 从FTS证明的角度, 可将FT状态反馈控制分为基于终端滑模、基于反步法、基于加幂积分函数、基于齐次理论、基于微分包含概念, 共5大种控制方法.

3.1 基于滑模的有限时间控制

滑模控制设计的核心思路通常分为两步, 先设计滑模面以保证系统状态能沿滑模面收敛到平衡点, 再设计控制器以保证系统状态能维持在滑模面上. 滑模控制方法本身具有良好的抗干扰能力和鲁棒性能, 在其控制器结构中增加指数参数, 能进一步提高控制性能. 一般把具备FTS特性和指数参数的滑模称为终端滑模. 标准终端滑模控制具有控制器奇异的问题, 为解决该问题, 二十多年来众多非奇异的方法被先后提出, 下面将逐一介绍. 此外, 虽然终端滑模被广泛研究和应用, 其具有可对受扰动系统进行稳定性分析以及参数选取范围大等优点, 但其“控制奇异与收敛时间矛盾性”的问题, 目前仍未得到圆满解决, 是其未来的研究方向. 在下面的介绍中将逐一展示该问题.

3.1.1 基于有限时间趋近律的普通滑模控制

线性滑模是滑模控制中应用最广泛和最基础的一种滑模面, 针对系统(8)设计的线性滑模

$$s = x_2 + k_1 x_1, \quad (10)$$

如选用FT趋近律 $\dot{s} = -k_2 \text{sig}(s)^{p_2}$, 则控制器可设计为

$$u = h(x_1)^{-1}(-k_2 \text{sig}(s)^{p_2} - k_1 x_2 - f(x)). \quad (11)$$

选择候选Lyapunov函数 $V = s^2$, 可得到

$$\dot{V} = -2k_2 V^{(1+p_2)/2}, \quad (12)$$

上式符合引理1中的充分条件(4), 因此可知系统状态在FT内收敛到滑模面 $s = 0$ 上. 但因为滑模是线性的, 所以在滑行阶段, x_1 和 x_2 沿着 $s = 0$ 是渐近收敛的, 即理论上, 系统是渐近稳定的, 系统状态收敛到平衡点

的时间是无穷的, 所以控制器(11)是渐近控制而非FT控制.

文献[23–27]利用线性滑模(10)和FT趋近律设计了类似式(11)的非光滑控制器, 虽然这类文献的名称中含有“有限时间控制”, 但因状态最终是渐近收敛的, 严格来说, 这类控制方法不能称为FT控制. 文献[28–29]同样基于线性滑模(10)设计了控制器, 并解释状态能在FT内收敛到平衡点附近, 且称之为FT控制. 但考虑到渐近/线性控制(如PID控制)也能实现状态FT内收敛到平衡点附近, 因此不能依此区分FT控制和渐近控制. 当仅考虑系统精确模型时, 这些控制方法并不能实现系统为FTS, 所以严格来说, 所有基于线性滑模(10)的研究都不应称为FT控制或FTS.

3.1.2 基于标准终端滑模的有限时间控制

线性滑模(10)在滑行阶段是渐近收敛而非FT收敛, 早期文献[30]在其基础上, 通过引入指数参数 p_1 构造的标准终端滑模 (standard terminal sliding mode, STSM)

$$s = x_2 + k_1 \text{sig}(x_1)^{p_1}, \quad (13)$$

能保证状态 x_1 和 x_2 沿滑模面 $s = 0$ 是FT收敛的, 对STSM(13)求得

$$\dot{s} = h(x_1)u + f(x) + k_1 p_1 |x_1|^{p_1-1} x_2.$$

选用FT趋近律 $\dot{s} = -k_2 \text{sig}(s)^{p_2}$, 则可设计STSM控制器

$$u = h(x_1)^{-1}(-k_2 \text{sig}(s)^{p_2} - k_1 p_1 |x_1|^{p_1-1} x_2 - f(x)). \quad (14)$$

选择候选Lyapunov函数 $V = s^2$, 即可得到与3.1.1小节相同的式(12), 进而可知闭环控制系统(8)和(14)是FTS的.

滑模(13)和控制器(14)虽被广泛地应用在众多研究成果中, 如文献[31–40], 但该方法存在奇异问题. 定义两个区域: $A_1 = \{x : x_1 < 0 \cap s > 0\}$ 和 $A_2 = \{x : x_1 > 0 \cap s > 0\}$, 可用图1解释该奇异问题. 从图中可见, 当系统初始状态在 A_1 区域时, 状态向滑模面收敛过程必然要经过纵轴 $x_1 = 0$, 而控制器(14)中 x_1 的指数参数是负值, 这导致在 $x_1 = 0$ 附近区域, 期望的控制输入会变得非常大甚至达到无穷, 这显然超出了执行机构的物理约束, 该问题即是著名的终端滑模控制的奇异问题. 为解决此问题, 在终端滑模控制发展的二十多年里, 许多避免奇异的方法被相继提出, 后面几个小节将逐一进行阐述.

注5 文献[41]指出, 参数 p_1 如满足 $p_1 \in [0.5, 1)$, 则在滑模面 $s = 0$ 上可避免奇异问题, 之后该解释也被用于诸多研究成果中^[42–46]. 但该解释仅适用于状态平衡点及滑模面上, 而从图1可见, 奇异问题主要发生在非滑模面上, 此外, 文献

[42]进一步强调当 $s \neq 0$ 时状态应远离纵轴 $x_1 = 0$ 以避免奇异, 但从图 1 可见, 如状态初始时在 A_1 区域, 则必然要经过纵轴, 因此仅约束 p_1 取值范围并不能解决控制器(14)的奇异问题.

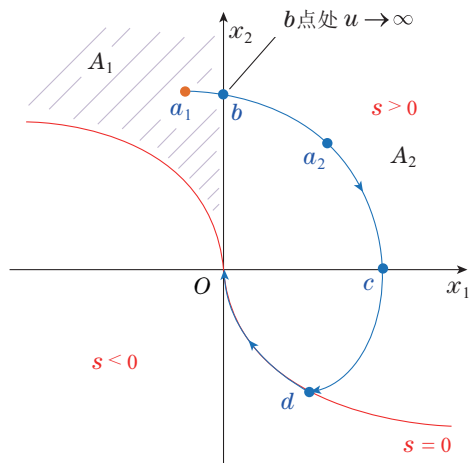


图 1 $s > 0$ 时, 控制器(13)–(14)驱动下系统(8)的轨迹相位图
Fig. 1 The phase plot of system (8) and controller (13)–(14) if $s > 0$

3.1.3 避免奇异问题的几种典型终端滑模控制

1) 基于经典非奇异终端滑模的有限时间控制.

在众多解决终端滑模奇异问题方法中, 文献[47]提出的方法被应用和引用最多, 因此称之为经典非奇异终端滑模(classical nonsingular terminal sliding mode, CNTSM)控制, 下面对该方法进行介绍和分析. CNTSM的构造如下:

$$s = x_1 + k_1 \text{sig}(x_2)^g. \quad (15)$$

不难得证, 在滑行阶段即 $s = 0$ 时, 状态 x_1 和 x_2 是 FT 收敛的. 在 CNTSM 基础上可设计无奇异的 FT 控制器 $u = h(x_1)^{-1}(-k_2 \text{sig}(s)^{p_2} - (gk_1)^{-1}|x_2|^{2-g} - f(x))$.
(16)

选择候选 Lyapunov 函数 $V = s^2$, 对其求导得

$$\dot{V} = -k(x_2)V^{(1+p_2)/2}, \quad (17)$$

其中 $k(x_2) = 2gk_1k_2|x_2|^{g-1}$. 注意引理 1 的式(4)中的 α 为常数, 而式(17)中 $k(x_2)$ 为变量, 因此不能直接用式(17)证明 s 为 FT 收敛并求收敛时间. 第 3.1.2 小节图 1 中去掉 b 点奇异, 则图 1 也可表示本小节 CNTSM 控制下的系统轨迹图. 用图 1 解释文献[47]的思路是, 把 $a_1 \rightarrow b \rightarrow a_2 \rightarrow c \rightarrow d$ 这一到达阶段过程分为 $x_2 = 0$ 和 $x_2 \neq 0$ 两个部分, 分别证明前一部分即 c 点为非吸引点, 后一部分为 FTS. 具体如下.

情况 a 当 $x_2 = 0$ 时, 由 $\dot{x}_2 = -k_2 \text{sig}(x_1)^p$ 可知, 在到达阶段, $x_2 = 0$ 情况并非状态的吸引区, 所以在 $s \neq 0$ 阶段系统状态会经过 $x_2 = 0$ 并继续向 $s = 0$ 收敛.

情况 b 当 $x_2 \neq 0$ 时, 定义正常数 $k_{\min} = \min\{k(x_2)\}$, 得

$$\dot{V} \leq -k_{\min}V^{(1+p_2)/2}. \quad (18)$$

再利用引理 1 可知 s 为 FT 收敛, 且 s 的收敛时间满足

$$T \leq 2V_0^{(1-p_2)/2}/((1-p_2)k_{\min}). \quad (19)$$

以上 CNTSM 控制的稳定分析思路虽被广泛应用到众多研究中^[48-57], 但这些研究分析过程中定义的 k_{\min} 都具有一定的保守性. 注意 k_{\min} 与 $|x_2|$ 正相关, 从图 1 的 $a_2 \rightarrow c \rightarrow d$ 阶段可看出, x_2 轨迹是会经过 0 的. 所以不存在正常数的 k_{\min} 值, k_{\min} 值应为 $|x_2|$ 的下确界, 即为 0. 该保守性出现的原因, 也可概述为: 在情况 b 中, 经过 0 的正变量 $|x_2|$ 不存在正的最小值 k_{\min} . 如果把 $k_{\min} = 0$ 代入到式(18)或式(19)中, 则会得到渐近稳定和收敛时间上界无穷大的非 FTS 结论. 这就是前面提到的终端滑模所具有的“控制奇异与收敛时间矛盾性”的问题: 控制器(16)虽避免了奇异, 但其给出的收敛时间上界的表达式(19)却是无界的.

此外, 许多研究如文献[58-67], 在式(17)基础上直接应用引理 1 的判据(4)得收敛时间的上界为

$$T \leq \frac{2}{(1-p_2)k(x_2)}V_0^{(1-p_2)/2}. \quad (20)$$

注意到判据(4)中 α 为常数, 而 $k(x_2)$ 是非常数, 因此, 从式(17)直接得到式(20)的结论不是非常严谨的.

值得肯定的是, 很多研究如文献[68-77], 认识到前文 k_{\min} 以及式(20)的保守性, 因此在式(17)基础上, 放弃计算收敛时间上界的表达式, 而只解释闭环系统为 FTS, 从而一定程度上保证了研究的严谨性. 但针对 CNTSM 如何设计 FT 控制器并给出收敛时间上界, 已引起一些学者的兴趣, 并取得了进一步的研究成果, 这将在下节进行介绍.

注 6 值得一提的是, CNTSM 最早是学者冯勇和余星火在文献[78-80]中提出的, 且作者在这几篇研究中提到, 可通过在控制器(16)中加入变结构项来计算时间上界. 这种方法确实可解决文献[47]中收敛时间上界(19)过于保守的问题, 也解决了“奇异与有限时间的矛盾性”. 但这种方法仅在少数文献中被应用, 如文献[81], 并未受到足够的重视. 此外, 后文提到的一些连续的控制方法(如加幂积分控制), 其控制器既无奇异问题, 又能计算状态收敛时间上界, 而文献[78-80]却需要引入非连续的变结构项才达到同样的效果, 相比之下, 可能没有抖振风险的连续控制方法更具有一些优势. 值得一提的是, 目前许多学者们都普遍认可闭环系统(8)(16)为 FTS, 怎样在不改变控制器(16)结构的前提下, 严谨的计算其收敛时间上界, 是一个值得公开的挑战性的问题.

2) 基于正弦函数法的终端滑模控制.

学者左宗玉^[82-83]在研究固定时间控制时, 为解决第 3.1.2 小节中连续 CNTSM 控制的保守性问题, 在

CNTSM(15)基础上,提出一种基于切换函数的FT控制方法,因切换函数中显式含有正弦函数,所以本文称之为正弦函数法.这种方法可认为是在控制器(16)基础上进行如下改造:

$$u = h(x_1)^{-1}(-k_2\mu(x_2)|x_2|^{1-g}\text{sig}(s)^{p_2} - j(\mathbf{x})), \quad (21)$$

$$j(\mathbf{x}) = \text{sig}(x_2)^{2-g}g^{-1}k_1^{-1} + f(\mathbf{x}),$$

$$\mu(x_2) = \begin{cases} \sin(0.5\pi|x_2|^{g-1}/\varepsilon), & |x_2|^{g-1} < \varepsilon, \\ 1, & \text{其他,} \end{cases} \quad (22)$$

其中滑模变量 s 依旧为式(15)的CNTSM. 因 $g \in (1, 2)$, 控制器中看似含有奇异项 $\mu(x_2)|x_2|^{1-g}$, 但随着 $x_2 \rightarrow 0$, 极限 $\lim_{x_2 \rightarrow 0} \mu(x_2)|x_2|^{1-g} = 0.5\pi/\varepsilon$ 成立. 所以控制器(21)在 $x_2 = 0$ 点上不存在奇异问题.

为更清晰地阐述系统稳定性,以 $s > 0$ 情况为例,绘制此种方法的轨迹相位图如图2所示,并定义以下区域:

$$A = \{\mathbf{x} : |x_2|^{g-1} > \varepsilon \cap s > 0\},$$

$$B = \{\mathbf{x} : |x_2|^{g-1} < \varepsilon\},$$

$$B_1 = \{\mathbf{x} : x_2 > 0 \cap B\}, B_2 = \{\mathbf{x} : x_2 < 0 \cap B\}.$$

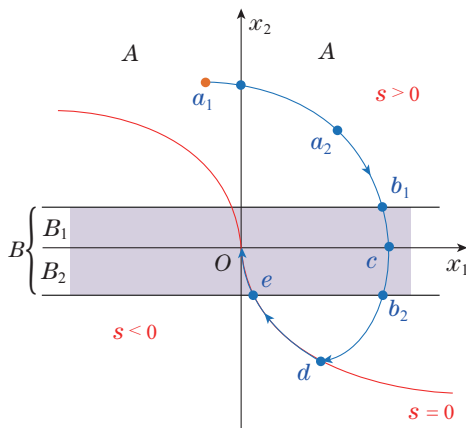


图2 $s > 0$ 时,控制器(21)–(22)驱动下系统(8)的轨迹相位图

Fig. 2 The phase plot of system (8) and controller (21)–(22) if $s > 0$

下面简单分析系统稳定性.选择候选Lyapunov函数 $V = s^2$, 对其求导并分类讨论可得

情况 a 当 $|x_2|^{g-1} \geq \varepsilon$ 时, 有

$$\dot{V} = -2k_1k_2gV^{(1+p_2)/2}.$$

可知 s 在此种情况中为FT收敛, 其对应图2中 $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow b_1$ 段与 $b_2 \rightarrow d$ 段, 且在这两段的收敛时间满足

$$T_1 \leq V_0^{(1-p_2)/2} / ((1-p_2)k_1k_2g).$$

情况 b 当 $|x_2|^{g-1} < \varepsilon$ 时, 有

$$\dot{V} = -2k_1k_2g \sin(0.5\pi|x_2|^{g-1}/\varepsilon)V^{(1+p_2)/2}. \quad (23)$$

此时虽不能判断系统为FT收敛, 但可知 s 是收敛的, 即当系统状态在图2的 B_1 区和 B_2 区时, 其能顺着图中轨

迹向 b_2 方向离开 B 区. 当状态在 $x_2 = 0$ 这一特殊点时, 把控制器(21)代入到系统(8)可知极限 $\lim_{x_2 \rightarrow 0} \dot{x}_2 = -0.5k_2\pi\text{sig}(x_1)^{p_2}/\varepsilon$ 成立, 所以 c 点不是吸引点, 状态会从 B_1 区经过 c 点向 B_2 区移动. 根据式(23)可知, 在 B 区, s 是收敛的, 考虑到 b_2 处 $s \neq 0$, 所以 $b_1 \rightarrow c \rightarrow b_2$ 阶段的收敛时间必然是有界的.

综合以上两种情况可说明, 基于正弦函数法的FT控制器(21)能实现系统(8)为FTS, 且滑模变量的到达时间满足 $T \leq T_1 + \vartheta$, 其中 ϑ 表示未知且有界的正常数.

在第3.1.2小节CNTSM控制基础上, 本小节介绍的FT正弦函数法控制的主要贡献是: 通过在控制器中引入切换函数 $\mu(x_2)$, 从理论上给出了更为严谨的系统收敛时间上界. 正是因此, 在该方法被提出之后, 受到很多学者的关注, 并用在许多研究成果中, 比如文献[84–93]. 文献[84–88]给出的收敛时间上界如前文一样, 其中存在某个未知正常数 ϑ . 而文献[89–93]通过引入变结构项 $k_3\text{sgn}(s)$, 如注6所述, 尝试估计状态穿越 B 区所需的时间上界, 但该估计结果仅适用于阈值 ε 充分小的情况.

本小节介绍的方法也存在“控制奇异与收敛时间矛盾性”问题. 首先, 如果阈值参数 ε 选取的够大, 则控制器(21)能很好的避免奇异问题, 但这会导致 B 区范围增大, 从而状态穿越 B 区的未知时间 ϑ 也增大. 虽然证明收敛时间有界是该方法的主要贡献, 但如何计算穿越 B 区时间上界仍值得进一步研究. 其次, 如果 ε 选取的足够小, 则状态穿越 B 区时间可忽略, 或可用文献[89–93]的方法估算 B 区时间上界, 但过小的 ε 可能会引发“近乎奇异”问题. 如果 ε 值远小于1, 则当状态在 A 区且靠近 b_1 或 b_2 点时, 控制器中 $\mu(x_2)$ 值为1, 而 $|x_2|^{1-g}$ 项会随着 ε 取值接近于0而变的非常大, 甚至近乎接近于无穷, 因此称之为“近乎奇异”问题. 最后, 综合以上两者情况可知, ε 值过大会导致收敛时间上界保守性较大, 而 ε 值过小则会导致控制器输出在某点处陡然增大即产生“近乎奇异”现象.

注7 文献[82–93]中大部分都通过引入的变结构项 $k_3\text{sgn}(s)$, 来加速状态在 B 区的穿越速度. 如果状态穿越 B 区速度不够快, 则其容易在图2中的 $e \rightarrow o$ 段到达滑模面, 由式(23)可知很难证明此到达阶段为FTS, 如果此阶段为渐近稳定, 则会导致状态在 B 区收敛到滑模面的时间是趋于无穷的. 此外, 文献[89–93]在计算穿越 B 区时间上界时, 用 c 点特性来代表整个 B 区, 是具有一定的保守性的. 而全面分析 B 区中 x_2 的运动趋势, 以 $s > 0$ 为例, B_1 区的穿越时间上界是可计算的, 但在 B_2 区, 因 \dot{x}_2 中存在发散项 $-\text{sig}(x_2)^{2-g}/k_1g$, 妨碍对状态轨迹和收敛时间的进一步分析. 总之, 如何严谨的分析状态在 B 区的收敛情况, 仍值得进一步的研究.

3) 基于饱和函数法的终端滑模控制.

STSM 控制早期研究学者及 CNTSM 控制提出者

冯勇和余星火, 为了避免奇异问题, 引入饱和函数, 在第3.1.2小节基础上, 对控制器(14)进行如下改造^[94]:

$$u = h(x_1)^{-1}(-k_2 \text{sig}(s)^{p_2} - \text{sat}(u_f) - f(\mathbf{x})), \quad (24)$$

$$u_f = k_1 p_1 |x_1|^{p_1-1} x_2,$$

$$\text{sat}(u_f) = \begin{cases} u_f, & |u_f| \leq \varepsilon^{-1}, \\ \varepsilon^{-1} \text{sign}(x_2), & |u_f| > \varepsilon^{-1}, \end{cases}$$

其中: 滑模变量 s 为式(13)的STSM, 阈值参数 ε 为前文所述的小正常数. 在奇异项 $k_1 p_1 |x_1|^{p_1-1} x_2$ 上套用饱和函数限制其幅值, 这种避免奇异的方法直接且有效, 因控制器中显式含有饱和函数, 所以本文称之为饱和函数法. 为方便后文分析, 以 $s > 0$ 为例, 绘制系统轨迹相位图如下图3所示, 并定义以下区域:

$$A = \{\mathbf{x} : s > 0 \cap |u_f| \leq \varepsilon^{-1}\},$$

$$A_1 = \{\mathbf{x} : x_1 < 0 \cap A\}, \quad A_2 = \{\mathbf{x} : x_1 > 0 \cap A\},$$

$$B = \{\mathbf{x} : x_2 > 0 \cap |u_f| > \varepsilon^{-1}\},$$

$$C = \{\mathbf{x} : x_2 < 0 \cap |u_f| > \varepsilon^{-1}\}.$$

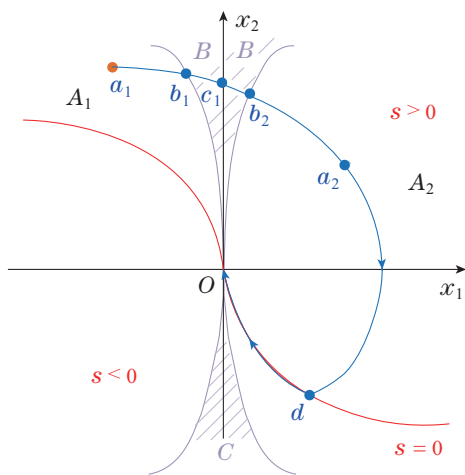


图3 $s > 0$ 时, 控制器(24)驱动下系统(8)的轨迹相位图
Fig. 3 The phase plot of system (8) and controller (24) if $s > 0$

以 $s > 0$ 为例. 当状态在 A_1 或 A_2 区域时, 即奇异项 u_f 在阈值 ε^{-1} 范围内, 控制器(24)亦为控制器(14), 根据第3.1.2小节分析可知, 此时系统为FTS, 所以状态会在FT内收敛到B区域或滑模面上, 可根据式(12)求收敛时间上界. 当状态进入或处在B区域时, 即奇异项超出阈值, 饱和函数强制其输出为 $\varepsilon^{-1} \text{sign}(x_2)$ 以避免奇异时, 分析 x_2 运动趋势可得 $\dot{x}_2 = -k_2 \text{sig}(s)^{p_2} - \varepsilon^{-1} \text{sign}(x_2)$, 其表明在图3的B区内, 状态是向下收敛的. 再结合 $\dot{x}_1 = x_2$ 或相位图特性可知, 状态在图3的B区时, 其会向右下方且内螺旋的方向运动, 并在有界时间 ϑ 内离开B区进入 A_2 区, 其中 ϑ 为未知正常数.

利用饱和函数限制奇异项的输出, 是仿真或实践中常用的方法, 而文献[94]的主要贡献是从理论上给

出了这种饱和函数法的稳定性分析. 在这之后, 饱和函数法被应用到许多理论研究中, 如文献[95–102].

然而与小节正弦函数法相似, 饱和函数方法也体现了“控制奇异与收敛时间矛盾性”问题. 首先, 如果阈值参数 ε 选取越大, 则阈值 ε^{-1} 越小, 进而B区范围越大, 这会导致穿越B区的未知时间上界 ϑ 增大. 其次, 如果阈值参数 ε 选取的越小, 则阈值 ε^{-1} 越大, 虽然B区范围会越小, 但在A区靠近 b_1 或 b_2 处越容易出现“近乎奇异”问题(即控制输出非常大但没有达到无穷). 因此可见, 如果扩大B区范围来减弱“近乎奇异”现象, 就会导致未知穿越时间上界 ϑ 变大, 而减小B区范围来缩短未知的穿越时间, 则可能会导致“近乎奇异”问题, 所以该方法也具有奇异与时间的矛盾性问题.

注8 上文在B区进行稳定性分析时, 是以B区和 $s \leq 0$ 无交集为前提条件的, 该前提条件暗含着阈值参数 ε 应存在某个未知的上界, 下面进行解释. 根据上文 x_2 在B区的运动趋势可知, 系统状态能穿越B区的前提条件为 $s > 0$. 但如果 ε 值太大, 则会导致B区范围变大, 进而和 $s \leq 0$ 区域产生交集, 设此交集为 $B_{s \leq 0}$, 类似的, 设C区和 $s \geq 0$ 区域产生交集为 $C_{s \geq 0}$. 当状态在 $B_{s \leq 0}$ 或 $C_{s \geq 0}$ 中时, 由 \dot{x}_2 和 \dot{s} 导数可知, 既难以证明状态穿越该区域, 亦难以证明状态能向滑模面收敛, 即状态在这两个区域时可能会发散. 由此可知, 为了避免产生发散区域 $B_{s \leq 0}$ 和 $C_{s \geq 0}$, ε 的取值应尽量小, 又为了避免产生“近乎奇异”现象, ε 的取值应尽量大, 如何从理论上进一步给出 ε 选值的明确约束范围值得做进一步的研究.

4) 基于滑模替换法的终端滑模控制.

学者王良勇和柴天佑在文献[103]中提出一种近十年被应用最广泛的解决控制奇异的方法, 该方法在第3.1.2小节STSM控制(14)基础上, 在 $x_1 = 0$ 附近容易产生奇异问题区域, 用无奇异的渐近滑模替换有奇异的终端滑模(13)以避免奇异, 因此本文称之为滑模替换法, 下面进行简单介绍.

滑模替换法采用的滑模包含FT滑模和渐近滑模, 其具体形式如下:

$$s = \begin{cases} s_{\text{FT}}, & s_{\text{FT}} \neq 0 \text{ 且 } |x_1| \geq \varepsilon \text{ 或 } s_{\text{FT}} = 0, \\ s_{\text{AS}}, & s_{\text{FT}} \neq 0 \text{ 且 } |x_1| < \varepsilon, \end{cases} \quad (25)$$

$$s_{\text{FT}} = x_2 + k_1 \text{sig}(x_1)^{p_1}, \quad s_{\text{AS}} = l_1 x_1 + l_2 \text{sig}(x_1)^2,$$

其中 s_{FT} 为FT滑模, 当状态维持在 $s_{\text{FT}} = 0$ 时, 能在FT内收敛到平衡点, 而 s_{AS} 为渐近滑模, 当状态维持在 $s_{\text{AS}} = 0$ 时, 能渐近的收敛到平衡点, 即收敛时间是无穷的. s_{FT} 和 s_{AS} 定义式中的控制参数需满足 $l_1 = (2 - p_1)\varepsilon^{p_1-1}$, $l_2 = (p_1 - 1)\varepsilon^{p_1-2}$ 和 $p_1 \in (0.5, 1)$, 而阈值参数 ε 为小的正常数. 值得一提的是, 渐近滑模 s_{AS} 的形式及其参数 l_1 和 l_2 的约束形式, 是为了满足在切换点时 s 连续且 \dot{s} 也连续而设计出来的. 基于切换滑模

(25)设计的FT控制器如下:

$$u = h(x_1)^{-1}(-k_2 \text{sig}(s)^{p_2} - k_1 x_2 \mu(x_1) - f(\mathbf{x})), \quad (26)$$

$$\mu(x_1) = \begin{cases} p_1 |x_1|^{p_1-1}, & s_{\text{FT}} \neq 0 \text{ 且 } |x_1| \geq \varepsilon \text{ 或 } s_{\text{FT}} = 0, \\ l_1 + 2l_2 |x_1|, & s_{\text{FT}} \neq 0 \text{ 且 } |x_1| < \varepsilon. \end{cases} \quad (27)$$

有奇异的STSM控制器(14)在 $x_1 = 0$ 处可能会奇异,而控制器(26)在 $x_1 = 0$ 的附近的 $|x_1| < \varepsilon$ 区域内,奇异项 $p_1 |x_1|^{p_1-1}$ 切换成非奇异项 $l_1 + 2l_2 |x_1|$,因此避免了奇异.为方便后文分析,以 $s > 0$ 为例,绘制系统轨迹相位图如图4所示,并定义区域: $B = \{\mathbf{x} : |x_1| < \varepsilon \cap s_{\text{FT}} \neq 0\}$, $B_1 = \{\mathbf{x} : x_1 < 0 \cap B\}$, $B_2 = \{\mathbf{x} : x_1 > 0 \cap B\}$.

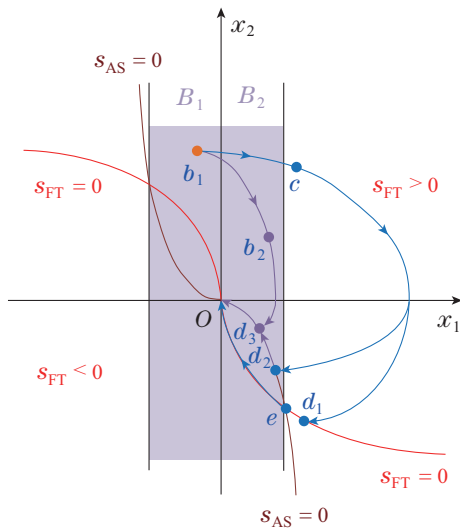


图4 $s > 0$ 时,控制器(26)驱动下系统(8)的轨迹相位图
Fig. 4 The phase plot of system (8) and controller (26) if $s > 0$

滑模替换法稳定性分析过程相对简单,下面进行简单的介绍.选择候选Lyapunov函数 $V = s^2$,对其求导并代入控制器(26)即可得 $\dot{V} = -2k_2 V^{(1+p_2)/2}$,由引理1中判据(4)可知, s 能在FT内收敛到 $s = 0$.如果阈值参数 ε 选取的足够小,则状态能在收敛并维持在 $s_{\text{FT}} = 0$ 上,比如沿着图4中 $b_1 \rightarrow c \rightarrow d_1$ 的轨迹收敛到 $s_{\text{FT}} = 0$ 上,然后由 $s_{\text{FT}} = 0$ 特性可证明状态会沿着 $d_1 \rightarrow e \rightarrow 0$ 轨迹FT内收敛到平衡点.

滑模替换法在被提出后,收到相关学者的广泛关注 and 大量应用,比如文献[104–122].然而与前两小节相似,该方法也体现了终端滑模的“控制奇异与收敛时间矛盾性”问题.首先,如果阈值 ε 选取的不够小,则状态可能沿着图4中的 $b_1 \rightarrow c \rightarrow d_2$ 或 $b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow d_3$ 轨迹收敛到渐近滑模面 $s_{\text{AS}} = 0$ 上,而非 $s_{\text{FT}} = 0$ 上.当状态维持在 $s_{\text{AS}} = 0$ 上时,则其只会渐近的收敛到平衡点,即收敛时间不再是有限的.其次,如果阈值

ε 选取的非常小,则在非 B 区但靠近 B 区的位置上,比如图4中的 c 点,控制器的输出会发生“近乎奇异”现象.因此可见,如果扩大 B 区范围以减弱“近乎奇异”现象,则可能会导致系统为非有限时间稳定,而如果缩小 B 区范围而让系统收敛时间有限,则可能会导致“近乎奇异”现象,所以该方法存在“奇异与时间的矛盾性”.

注9 文献[123]在切换滑模(25)和控制器中切换函数(27)基础上,其它保持不变,而对切换条件进行如下简化:

$$\begin{cases} s = \begin{cases} s_{\text{FT}}, & |x_1| \geq \varepsilon, \\ s_{\text{AS}}, & |x_1| < \varepsilon, \end{cases} \\ \mu(x_1) = \begin{cases} p_1 |x_1|^{p_1-1}, & |x_1| \geq \varepsilon, \\ l_1 + 2l_2 |x_1|, & |x_1| < \varepsilon. \end{cases} \end{cases} \quad (28)$$

在本文中称该方法为简易滑模替换法.之后该方法被应用到诸如文献[124–132]等理论研究中.如果阈值 ε 足够小,则滑模替换法(25)–(27)最终能驱使状态沿 $s_{\text{FT}} = 0$ 有限时间内收敛到平衡点.然而在简易滑模替换法的控制下,无论阈值 ε 是大还是小,系统状态最终只能沿着渐近滑模面 $s_{\text{AS}} = 0$ 收敛,如图4轨迹 $b_1 \rightarrow c \rightarrow d_1 \rightarrow e \rightarrow d_2 \rightarrow d_3 \rightarrow o$,即系统的收敛时间是无穷的.因此,简易滑模替换方法虽然具有大部分FT控制的优良特性,但从严格FTS定义的角度(定义1),不能算作严格意义下的有限时间控制方法.

5) 其它处理奇异问题的方法.

除了前4小节介绍的4种应用比较广泛的解决终端滑模控制奇异方法外,还有3种应用相对较少但比较具有代表性的方法.这3种方法都是基于STSM(13),且针对系统(8)设计的控制器皆为如下形式:

$$u = h(x_1)^{-1}(-k_2 \text{sig}(s)^{p_2} - k_1 x_2 \mu(x_1) - f(\mathbf{x})), \quad (29)$$

其中控制参数如前文所述,而切换函数 $\mu(x_1)$ 的形式在下面给出.下面逐一进行介绍.

a) 奇异点替换法.

针对STSM控制器(14)在 $x_1 = 0$ 点奇异问题,这类方法在式(14)基础上,通过引入 $\mu(x_1)$ 设计如式(29)形式的控制器,其中切换函数 $\mu(x_1)$ 作用是当 $p_1 |x_1|^{p_1-1}$ 发生奇异时,用某个正常数或0替代该项,因此避免奇异.如文献[133–135]用正常数替代奇异项,设计如下 $\mu(x_1)$:

$$\mu(x_1) = \begin{cases} p_1 |x_1|^{p_1-1}, & x_1 \neq 0, \\ p_1 |\varepsilon|^{p_1-1}, & x_1 = 0. \end{cases} \quad (30)$$

再如文献[136–137]用0替代奇异项,设计如下 $\mu(x_1)$:

$$\mu(x_1) = \begin{cases} p_1 |x_1|^{p_1-1}, & x_1 \neq 0, \\ 0, & x_1 = 0. \end{cases}$$

以上两种形式的 $\mu(x_1)$ 虽能在 $x_1 = 0$ 处避免控制器奇异,但忽略了状态在 $x_1 = 0$ 附近时的“近乎奇异”问

题,即控制器在 $x_1 = 0$ 附近依然会产生很大的输出量.因此,这种方法并没有真正的解决终端滑模控制的输出过大的问题.

b) 边界层法.

这种方法注意到上类方法的问题,进一步考虑了 $x_1 = 0$ 附近的“近乎奇异”问题,因此在 $x_1 = 0$ 附近定义了一个边界层 $|x_1| = \varepsilon$,再根据边界层用常数或线性变量替代奇异项.如文献[138]用正常数替代奇异项,设计如下 $\mu(x_1)$:

$$\mu(x_1) = \begin{cases} p_1|x_1|^{p_1-1}, & |x_1| \geq \varepsilon, \\ p_1\varepsilon^{p_1-1}, & |x_1| < \varepsilon. \end{cases} \quad (31)$$

再如文献[139]用线性变量替代奇异项,设计如下 $\mu(x_1)$:

$$\mu(x_1) = \begin{cases} p_1|x_1|^{p_1-1}, & |x_1| \geq \varepsilon, \\ p_1\varepsilon^{p_1-2}|x_1|, & |x_1| < \varepsilon. \end{cases}$$

这类方法在后文介绍的FT反步法中应用的比较多.这类方法的 $\mu(x_1)$ 也可用饱和函数 $\text{sat}(\cdot)$ 表示,进而得到类似前文饱和函数法控制(24)的形式.但应注意两者的区别,前文饱和函数法是有完整的稳定性分析,而这类方法目前没有对应的稳定性分析,而仅在备注或仿真中提到,因此称这类方法为边界层法加以区分.

c) 自定义滑模变量导数法.

STSM控制器(14)奇异的原因在于对STSM(13)求导得

$$\dot{s} = h(x_1)u + f(x) + k_1p_1|x_1|^{p_1-1}x_2, \quad (32)$$

上式产生了奇异项 $|x_1|^{p_1-1}x_2$,因此需要在控制器(14)中加入该奇异项的负值以保证系统的稳定性.文献[140]在解决奇异问题时,把 \dot{s} 写成如下形式:

$$\dot{s} = h(x_1)u + f(x) + k_1p_1\mu(x_1)x_2, \quad (33)$$

其中切换函数 $\mu(x_1)$ 设计如下:

$$\mu(x_1) = \begin{cases} |x_1|^{p_1-1}, & |x_1| \geq \varepsilon, \\ |\varepsilon|^{p_1-1}, & |x_1| < \varepsilon. \end{cases}$$

这样可设计控制器如式(29)的形式.其稳定性证明非常简单,仅需选择候选Lyapunov函数 $V = s^2$,对其求导并代入控制器(29)便可得到 $\dot{V} = -2k_2V^{(1+p_2)/2}$,利用引理1可证明系统为FTS.之后该方法被用在许多研究中,比如文献[141-147].

然而该方法的设计和分析过程不能算是非常严谨的,原因在于 \dot{s} 的形式应为式(32)所示,对变量求导应遵循严格的数学定律,而不能自定义的写成式(33)的形式.如果确定采用式(13)形式的滑模变量 s ,严格地说, \dot{s} 的形式也就随之固定了(如式(32)),设计者只能通过控制器 u 以改变 \dot{s} ,而不能通过改变数学规律或提出假设来改变 \dot{s} (如式(33)).

注10 这里再讨论下终端滑模控制的收敛时间.

系统(8)在第3.1.2和第3.1.3小节中各种终端滑模控制驱动下,其收敛时间分为两部分: $s \rightarrow 0$ 阶段的到达时间和在滑模面上 $s \equiv 0$ 时, $x_1 \rightarrow 0$ 及 $x_2 \rightarrow 0$ 阶段的滑行时间,且这两段时间一般是分开计算的.前文论述“奇异与时间的矛盾性”时解释了一些控制方法在计算这两段时间的保守性,此外还应注意,上文STSM(13)或CNTSM(15)的滑行时间上界可以利用引理1中式(5)来表达,但不可预计算.根据引理1,计算收敛时间上界需要知道状态初值,而滑行阶段的初值为状态到达滑模面对应的状态值.系统运行之前,滑行阶段的初值一般是很难预知的,所以STSM和CNTSM的滑行时间上界只能给出理论上的表达式而不能实际用于估算系统的时间上界.值得一提的是,后文将介绍的标准反步FT控制以及加幂积分控制没有对收敛时间进行分段,因此已知的系统初值可用来计算系统的收敛时间上界.相比之下,一些终端滑模控制对轨迹进行分段处理,虽简化了设计问题,但在计算滑行时间上界时具有有一点保守性.

3.2 基于反步法的有限时间控制

反步法作为控制方法中的基本方法,也用在FT控制的设计中.针对系统(8)的反步控制方法的设计思路主要分为两步,首先针对 $\dot{x}_1 = x_2$ 设计虚拟控制 x_{2d} ,使得 $x_2 \equiv x_{2d}$ 时有 x_1 向0收敛;再设计控制器 u ,使得 x_2 向 x_{2d} 收敛.由此可见,对系统(8)的反步FT控制与终端滑模控制在核心设计思路上非常相似,故也存在“控制奇异与收敛时间矛盾性”的问题,将在下面进行介绍.

3.2.1 标准反步有限时间控制

与前文STSM(13)的构造原理相似,可知最标准且简单的FT虚拟控制 x_{2d} 可选择为如下形式:

$$x_{2d} = -k_1\text{sig}(x_1)^{p_1}, \quad (34)$$

在其基础上可设计反步FT控制器为如下形式:

$$u = h(x_1)^{-1}(-k_2\text{sig}(e)^{p_1} - k_1p_1|x_1|^{p_1-1}x_2 - x_1 - f(x)), \quad (35)$$

其中误差 $e \triangleq x_2 - x_{2d}$.虚拟控制 x_{2d} 的设计初衷是:如果 $x_2 \equiv x_{2d}$,则依据 $\dot{x}_1 = x_2$ 和引理1可得 x_1 为FT收敛.定义误差 e 的目的是为了把 x_2 向 x_{2d} 收敛问题转化为 e 向0收敛问题,以方便后续Lyapunov稳定性分析.

其证明过程相对简单,先选择候选Lyapunov函数为 $V = x_1^2 + e^2$,然后对其求导并代入控制器(35)可得 $\dot{V} \leq -2\min(k_1, k_2)V^{(1+p_1)/2}$,最后由引理1可知 x_1 和 e 能在在FT内收敛到0.注意当 $x_1 = 0$ 且 $e = 0$ 时表示 $x_2 = 0$,因此闭环系统(8)(35)为FTS.

标准反步FT控制因其思路明确,设计过程简单,受到广泛关注和应用.虽然这种方法能保证闭环系统为严谨的FTS,且能给出完整的系统收敛时间上界,但不难发现,如果按以上标准流程设计反步FT控制,则幂项 $|x_1|^{p_1-1}x_2$ 会导致控制奇异问题,如文献

[148–156]. 因此该方法存在“控制奇异与收敛时间的矛盾性”。

3.2.2 基于积分滑模的反步有限时间控制

积分滑模能与多种控制方法结合, 本小节介绍基于积分滑模的反步FT控制, 针对系统(8), 其控制器形式如下:

$$u = h(x_1)^{-1}(-k_4 \text{sig}(s_2)^{p_4} + \dot{x}_{2d} - k_3 \text{sig}(e)^{p_3} - f(\mathbf{x})), \quad (36)$$

其中 s_2, x_{2d}, e 的定义如下:

$$\begin{aligned} s_2 &\triangleq e + k_3 \int_0^t \text{sig}(e)^{p_3} dt, \quad e \triangleq x_2 - x_{2d}, \\ x_{2d} &\triangleq -k_2 \text{sig}(s_1)^{p_2} - k_1 \text{sig}(x_1)^{p_1}, \\ s_1 &\triangleq x_1 + k_1 \int_0^t \text{sig}(x_1)^{p_1} dt, \end{aligned}$$

上式设计积分终端滑模 s_1 的目的是把 x_1 的收敛问题转化为 s_1 的收敛问题, 设计虚拟控制 x_{2d} 的目的是保证当 $x_2 \equiv x_{2d}$ 时 s_1 为FT收敛, 设计 s_2 的目的是把 $x_2 \rightarrow x_{2d}$ 问题转化为 $s_2 \rightarrow 0$ 问题, 最后控制器(36)的作用是实现 s_2 为FT收敛。

已知上述设计原理, 再对控制器(36)进行稳定性分析则很容易. 定义 $V_2 = s_2^2$, 对其求导并代入控制器(36)可证在FT后 $s_2 \equiv 0$, 进而可得 $\dot{s}_2 \equiv 0$, 将其代入 s_2 定义式的导数中并利用引理1可得FT后 $e \equiv 0$, 即 $x_2 \equiv x_{2d}$. 定义 $V_1 = s_1^2$, 对其求导并代入 x_{2d} 表达式可证FT后 $s_1 \equiv 0$, 进而可得 $\dot{s}_1 \equiv 0$, 将其代入 s_1 定义式的导数中并利用引理1可得FT后 $x_1 \equiv 0$, 且此时 $x_2 \equiv 0$, 所以闭环系统(8)(36)为FTS。

虽然基于积分滑模的反步FT控制可计算系统的收敛时间上界, 但该方法是有奇异问题的. 该奇异问题主要体现在控制器(36)中含有 \dot{x}_{2d} , 由 x_{2d} 的定义式可知, \dot{x}_{2d} 在 $s_1 = 0$ 或 $x_1 = 0$ 时, 可能会产生奇异, 进而导致控制器的输入非常大, 如文献[157–164]. 因此该方法存在“控制奇异与收敛时间的矛盾性”。

注 11 这里讨论下控制器(36)中 $p_2 = 0$ 或 $p_4 = 0$ 时, 稳定性分析中的保守性. 一些文献利用该方法设计FT控制器时, 为了加强控制器对干扰的抑制能力, 习惯设计 $p_2 = 0$ 或 $p_4 = 0$, 此时控制器(36)不再连续, 且对应的幂项变成变结构项 $k_2 \text{sgn}(s_1)$ 或 $k_4 \text{sgn}(s_2)$. 当控制器中出现以上两项时, 则上文的稳定性分析方法有点不严谨, 下面说明. 比如文献[157–163]在控制器中用的是变结构项 $k_4 \text{sgn}(s_2)$, 在这些文献中都考虑了干扰等不确定性, 且可以证明FT后 $s_2 = 0$. 注意当 $s_2 = 0$ 时, 干扰不为0, 且 $k_4 \text{sgn}(s_2) \neq 0$, 由此可知 $\dot{s}_2 \neq 0$, 因此前文的后续证明过程将不再成立, 即证明不了 $e \rightarrow 0$. 所以这类文献中由 $s_2 = 0$ 直接得到 $\dot{s}_2 = 0$ 的结论具有一定的保守性。

3.2.3 反步有限时间控制中的奇异问题

从第3.2.1小节可看出, 反步控制和滑模控制在设

计的核心思路上有异曲同工之处, 反步控制中 x_2 向 x_{2d} 收敛的过程某种程度上可类比于滑模变量 s 的收敛过程(即 e 类似于 s), 虽然两者的状态轨迹大不一样, 但在设计难点和控制问题上是一致的. 比如反步FT控制器(35)与控制器(36)也都具有奇异问题, 而为了解决奇异问题, 前文中介绍的许多终端换控制方法也可用在反步FT控制上, 比如文献[165–167]用注9中简易滑模替换法的思路来设计反步FT控制器, 文献[168]用奇异点替换的方法(即式(30)), 文献[169–173]用边界层的方法(即式(31)), 文献[174]用饱和函数法等等. 与终端滑模控制相似, 反步FT控制具有可对受扰动系统进行稳定性分析及参数选取范围大等优点, 但控制器(35)–(36)及这些避免奇异的方法, 也都存在“奇异与时间矛盾性”问题, 如何解决该问题为其未来发展方向。

值得一提的是, 有些文献提出的反步FT控制方法, 既无控制奇异问题, 又可给出收敛时间上界, 表面上不存在“奇异与时间矛盾性”问题, 然而在稳定性分析中都明示或暗示奇异项(如控制器(35)中的 $|x_1|^{p_1-1}x_2$)有界. 比如文献[175–176]中假设奇异项具有常数界, 再比如文献[177–178]中假设奇异项具有非奇异的变量界. 还有些文献尝试用观测器等手段观测或估计奇异项, 比如文献[179–180]用干扰观测器对奇异项进行观测, 比如文献[181–184]用一阶或二阶滤波器观测奇异项, 比如文献[185–188]用模糊逻辑系统估计奇异项, 再比如文献[189–191]用神经网络估计奇异项等, 然而观测和估计并不应该是解决奇异的方法, 一方面这些观测或估计方法的稳定性前提需为奇异项有界; 另一方面对无穷量(即奇异项)的观测值或估计值也应该是无穷量. 因此, 假设奇异项有界的方法, 或对奇异项进行有界的观测或估计, 都具有一定的保守性, 并没有真正的解决控制奇异问题。

3.3 基于加幂积分函数的有限时间控制

第3.2.1小节提出的标准反步FT控制具有奇异问题, 为解决该问题, 一种在稳定分析中使用了“加幂积分函数”(形式如下文的式(40))的反步方法被设计出来, 一般称之为加幂积分控制方法. 加幂积分函数由学者林威和钱春江在文献[192]中提出并用来设计渐近稳定控制器, 之后文献[193]中用该方法设计了FT控制器. 该控制方法具有无奇异、收敛时间上界可求、可对受扰动系统进行稳定性分析等诸多优点, 下面进行介绍。

3.3.1 加幂积分有限时间控制

针对系统(8)可设计加幂积分FT控制器形式如下:

$$\begin{cases} u = h(x_1)^{-1}(-k_2 \text{sig}(e)^{2p_1-1} - f(\mathbf{x})), \\ e = \text{sig}(x_2)^{1/p_1} - \text{sig}(x_{2d})^{1/p_1}, \quad x_{2d} = -k_1 \text{sig}(x_1)^{p_1}, \end{cases} \quad (37)$$

其中: x_{2d} 表示反步法中的虚拟控制输入, 指数参数 p_1 需满足 $p_1 \in (0.5, 1)$, 增益参数 k_1 和 k_2 的定义式如下

$$k_1 = 2^{1-p_1}(1+p_1)^{-1} + 2^{-p_1}(2-p_1)p_1(1+p_1)^{-1} + l, \quad (38)$$

$$k_2 = 2^{2-p_1}p_1(1+p_1)^{-1} + 2^{1-p_1}(2-p_1)p_1(1+p_1)^{-1} + 2^{1-p_1}(2-p_1)k_1^{-1}(2^{1-p_1} + k_1(1+p_1)^{-1}) + l, \quad (39)$$

其中 l 为任意正常数.

其稳定性证明过程有些复杂, 限于篇幅, 这里省去推导过程, 只介绍关键性结论. 选择候选 Lyapunov 函数为 $V = V_1 + V_2$, 其中 $V_1 = x_1^2$, V_2 为加幂积分函数, 形式如下:

$$V_2 = k_1^{-1-1/p_1} \int_{x_{2d}}^{x_2} \text{sig}(\text{sig}(v)^{1/p_1} - \text{sig}(x_{2d})^{1/p_1})^{2-p_1} dv. \quad (40)$$

可证明 V_2 满足 $0 < V_2 \leq 2^{1-p_1}k_1^{-1-1/p_1}|e|^2$, 所以 V_2 可用作候选 Lyapunov 函数. 对 V 求导并处理可得

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{(1+p_1)/2}, \quad (41)$$

其中 $\alpha = \min\{2l, l(2^{p_1-1}k_1^{1+1/p_1})^{(1+p_1)/2}\}$. 式 (41) 满足引理 1 中的判据条件, 所以闭环系统 (8)(37) 为 FTS.

加幂积分控制具有无奇异、收敛时间上界可求等优点, 因此被应用在许多 FT 控制系统的设计中, 比如文献 [194–213]. 上面稳定性分析中省略了大量不等式缩放过程, 该过程会放大各非线性项系数, 这导致控制增益参数 k_1 和 k_2 也需要伴随着增长才能抵消这些非线性项并得到式 (41) 的形式, 这也是式 (38)–(39) 中的两个增益参数为何如此复杂的原因. 因此, 加幂积分控制在具有本节前面所述的诸多优点基础上, 其不足之处正是控制参数 k_1 和 k_2 太过于复杂和冗大. 如果应用或仿真中控制增益参数按照式 (38)–(39) 取值, 有时很难获得满意的控制性能. 因此如何化简增益参数的约束, 应该是以后该方法的研究重点, 值得做深入的研究.

3.3.2 基于加幂积分的积分滑模有限时间控制

把上小节的加幂积分控制器 (37) 代入系统 (8) 中得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -k_2 \text{sig}(\text{sig}(x_2)^{1/p_1} + k_1^{1/p_1} x_1)^{2p_1-1}. \end{cases} \quad (42)$$

由第 3.3.1 小节结论可知系统 (42) 为 FTS. 针对系统 (8) 可设计基于加幂积分控制的积分终端滑模控制器如下:

$$u = h(x_1)^{-1}(-k_3 \text{sig}(s)^{p_2} - f(\mathbf{x}) - k_2 \text{sig}(\text{sig}(x_2)^{1/p_1} + k_1^{1/p_1} x_1)^{2p_1-1}), \quad (43)$$

$$s = x_2 + \int_0^t k_2 \text{sig}(\text{sig}(x_2)^{1/p_1} + k_1^{1/p_1} x_1)^{2p_1-1} dt, \quad (44)$$

其中: 控制参数 $p_1 \in (0.5, 1)$, k_1 和 k_2 满足式 (38)–(39) 约束.

其稳定性分析可分为两部分. 首先选择候选 Lyapunov 函数 $V = s^2$, 对其求导并代入控制器 (43) 可证在 FT 后 $s \equiv 0$, 由 $\dot{s} = -k_3 \text{sig}(s)^{p_2}$ 推断此时 $\dot{s} = 0$. 然后对式 (44) 求导并代入 $\dot{s} = 0$, 可得加幂积分控制系统 (42), 由前一小节分析可知, 该系统为 FTS.

总得来说, 目前该方法引起的关注较少, 取得的研究成果也较少, 其中比较有代表性的如文献 [214–216]. 文献 [214] 在控制器中设计了变结构项 $k_3 \text{sgn}(s)$ 来抑制干扰, 此时根据 $s \equiv 0$ 直接推导 $\dot{s} = 0$ 则有不是很严谨. 而文献 [215] 用连续的该控制方法处理干扰, 得到 s, \dot{s} 以及状态皆能 FT 收敛到某个小范围内, 相比之下严谨很多. 文献 [216] 用超螺旋算法代替控制器 (43) 中的 $k_3 \text{sig}(s)^{p_2}$, 考虑干扰以及 Filippov 意义下解的情况, 并假设干扰导数有界的条件, 证明系统为 FTS, 其证明过程也是严谨的. 该方法属于加幂积分控制范畴, 所以具有相同的优点, 值得深入研究的问题也是如何简化参数的约束条件.

3.4 基于齐次理论的有限时间控制

前文介绍的 FT 控制方法都是基于有限时间 Lyapunov 稳定定理 (即引理 1) 的, 本节介绍基于齐次理论的 FT 控制方法, 下文称之为齐次 FT 控制.

3.4.1 齐次有限时间控制

针对系统 (8), 可设计齐次 FT 控制器如下:

$$u = h(x_1)^{-1}(-k_1 \text{sig}(x_1)^{p_1} - k_2 \text{sig}(x_2)^{p_2} - f(\mathbf{x})), \quad (45)$$

其中: $p_1 \in (0, 1)$, $p_2 = 2p_1/(1+p_1)$. p_2 的形式是在下文计算齐次度时所决定的, 即需要 p_2 满足这个形式, 系统才具有齐次度. 根据引理 3 的齐次 FTS 定理可知对控制器 (45) 的 FT 稳定分析可分为两步, 先判断系统是否为渐近问题, 再判断系统是否具有负的齐次度. 因此, 先选择候选 Lyapunov 函数 $V = k_1|x_1|^{1+p_1}/(1+p_1) + 0.5x_2^2$, 对其求导并代入控制器 (45) 可得 $\dot{V} = -k_2|x_2|^{1+p_2} \leq 0$, 所以系统 (8) 为渐近稳定. 然后把控制器 (45) 代入系统 (8) 可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -k_1 \text{sig}(x_1)^{p_1} - k_2 \text{sig}(x_2)^{p_2}. \end{cases} \quad (46)$$

由引理 2 可知系统 (46) 关于扩张向量 $(r_1, 0.5r_1(1+p_1))$ 具有齐次度 $k = r_1(p_1-1)/2 < 0$, 且齐次度为负. 最后再依据引理 3 可得系统 (8) 在齐次控制器 (45) 驱动下为 FTS.

与终端滑模控制 (比如式 (14)) 和加幂积分控制 (如式 (37)) 相比, 不难看出, 齐次控制器 (45) 在形式上更简洁且更接近于经典的 PD 控制器, 因此其更容易通过

参数调节而获得更好的系统性能. 此外, 齐次控制还具有无奇异问题且理论分析过程并不复杂等优点, 因此该方法一经提出, 便被用在众多的研究成果当中, 如文献[217–236]. 然而齐次控制受其本身理论限制, 存在两点显著的不足之处. 首先, 用齐次FTS定理(即引理3)分析系统稳定性时, 需要计算系统的齐次度, 而含有不确定因素的系统(如系统(9))一般不存在齐次度, 因此没法用齐次理论去分析受扰动系统的稳定性. 其次, 齐次FTS定理虽然能判断系统是否为FTS, 但不能像引理1一样给出系统收敛时间上界的表达式. 这两点不足之处, 虽然制约了齐次控制方法的应用, 但也为该方法的进一步发展指明了方向, 而下小节的齐次积分滑模控制以及引理6的齐次反推Lyapunov定理的提出, 可认为是在一定程度上尝试地解决这两点不足.

3.4.2 基于齐次系统的积分滑模有限时间控制

针对系统(8)可设计基于齐次系统的积分滑模FT控制器如下:

$$u = h(x_1)^{-1}(-k_3 \text{sig}(s)^{p_3} - k_1 \text{sig}(x_1)^{p_1} - k_2 \text{sig}(x_2)^{p_2} - f(x)), \quad (47)$$

$$s = x_2 + \int_0^t k_1 \text{sig}(x_1)^{p_1} + k_2 \text{sig}(x_2)^{p_2} dt. \quad (48)$$

与前文积分滑模控制方法类似, 其稳定性分析也分为两部分. 首先, 选择候选Lyapunov函数 $V = s^2$, 对其求导并代入控制器(47)可证在FT后 $s \equiv 0$, 由 $\dot{s} = -k_3 \text{sig}(x_1)^{p_3}$ 可知此时 $\dot{s} = 0$. 然后, 对式(48)求导并代入 $\dot{s} = 0$, 可得齐次系统(46), 由第3.4.1小节分析可知, 该系统为FTS, 所以闭环系统(8)(47)亦为FTS.

第3.4.1小节的齐次控制方法并不适用于受扰动系统, 而本小节方法主要是用来处理系统扰动的. 由上面稳定性分析可知, 控制器(47)作用是让状态到达并维持在滑模面上, 所以, 当考虑系统干扰时, 可通过改变控制器(47)的结构, 使之能完全抑制干扰, 进而保证系统(8)依旧能转换为齐次系统(46), 如文献[237–256]. 其中文献[237–250]用变结构项 $k_3 \text{sgn}(s)$ 替换控制器(47)中的 $k_3 \text{sig}(s)^{p_3}$, 从而在理论上完全地消除干扰, 但与前文积分滑模控制类似, 这类方法从 $s \equiv 0$ 得到 $\dot{s} = 0$ 的过程具有一定的保守性. 文献[251–256]通过设计干扰观测器, 从理论上完全精确地估计干扰的真实值, 进而在控制器中引入干扰估计值以完全抵消系统干扰. 这两种思路都高度依赖于要完全地消除干扰保证状态完全地在滑模面上滑行, 而相比终端滑模控制或基于加幂积分的积分滑模控制, 后两者可在不完全消除干扰情况下, 即状态在滑模面邻域内滑行时, 依然能分析系统稳定性, 明显后两者更贴合实际情况. 所以基于齐次系统的积分滑模控制虽然解决了齐次控制不能分析受扰动系统稳定性的问

题, 但这种方法过于理想化, 从根本上研究齐次控制的抗扰动能力依然是值得研究的课题.

注 12 可对积分滑模变量进行改造, 使状态一开始就在滑模面上. 以积分滑模面(44)(48)为例, 在滑模变量 s 定义式中加入 $-x_2(0)$ 项, 其中 $x_2(0)$ 表示 x_2 的初始值, 则在 $t = 0$ 时有 $s = 0$. 这表示初始时刻状态就在滑模面上, 即消除了滑模的到达阶段, 控制器的作用是使状态维持在滑模面上.

3.5 微分包含意义下的有限时间控制

前文介绍的FT控制方法都是连续的, 虽然其中滑模控制方法为了增强对干扰的抑制能力而加入变结构项 $\text{sgn}(s)$, 使得系统具有非连续性, 但从控制设计角度来说, 这种变结构项往往不是必须的, 例如用连续项 $\text{sig}(s)^p$ 替代 $\text{sgn}(s)$, 一般也可进行稳定性分析, 且可得到“受扰动系统状态在FT内收敛到平衡点附近邻域内”这一更贴近实际情况的结论. 与此不同的是, 在研究受扰动系统时, 还有一类控制方法坚持用变结构项 $\text{sgn}(\cdot)$ 从理论上完美抵消干扰, 且其稳定性分析方法与以上小节皆不相同. 考虑到这类方法从设计到稳定性分析, 其变结构项 $\text{sgn}(\cdot)$ 不能用连续项替代, 因此本小节对这类方法进行单独归类 and 介绍. 含有不连续项 $\text{sgn}(\cdot)$ 的系统一般称之为微分包含系统, 其解一般定义为Filippov解^[257]. 该方法中最具代表性的为学者Levant在文献[258]中提出的Twisting控制方法, 针对系统(8), 其控制器结构为

$$u = h(x_1)^{-1}(-k_1 \text{sgn}(x_1) - k_2 \text{sgn}(x_2) - f(x)), \quad (49)$$

其中控制增益参数需满足 $k_1 > k_2$.

早期Twisting控制器(49)的稳定性分析主要是利用相平面中系统轨迹的几何特性证明系统为FTS, 但该分析方法不能估算收敛时间上界. 学者Moreno在文献[259]中给出了Twisting控制系统所对应的Lyapunov函数, 结合引理1证明系统为FTS, 并给出收敛时间的上界.

控制器(49)具有明显变结构特性, 虽然理论上其能够完美抑制干扰, 但在实际仿真或应用中, 当状态在 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = 0$ 附近时, 控制输出会产生明显剧烈的高频抖振. 为削弱该抖振现象, 一种方法是只在理论分析中用变结构项 $\text{sgn}(\cdot)$, 而在实践中用边界层法或饱和函数替换 $\text{sgn}(\cdot)$. 该方法虽被广泛用在变结构控制中, 但却造成了理论与实践的隔离, 如何分析替换后系统的稳定性, 值得进一步研究.

此外, 为了削弱抖振, 还有一种方法是对变结构项进行扩阶处理, 即通过对非连续的变结构项 $\text{sgn}(\cdot)$ 进行积分, 得到连续的弱抖振的控制器. 目前这类方法的研究逐渐引起关注, 本文例举以下3种控制器:

1) 比如文献[260]提出的一种连续Twisting控制器为

$$\begin{cases} u = h^{-1}(-k_1 \text{sig}(x_1)^{1/3} - k_2 \text{sig}(x_2)^{1/2} + \eta - f(\mathbf{x})), \\ \dot{\eta} = -k_3 \text{sgn}(x_1) - k_4 \text{sgn}(x_2). \end{cases} \quad (50)$$

2) 比如文献[261]提出的一种Super-Twisting控制器为

$$\begin{cases} u = h^{-1}(-k_1 \text{sig}(x_2 + k_3 \text{sig}(x_1)^{2/3})^{1/2} + \eta - f(\mathbf{x})), \\ \dot{\eta} = -k_2 \text{sgn}(x_2 + k_3 \text{sig}(x_1)^{2/3}). \end{cases} \quad (51)$$

3) 再比如文献[262]提出的另一种Super-Twisting控制器为

$$\begin{cases} u = h^{-1}(-k_1 \text{sig}(x_1 + k_3 \text{sig}(x_2)^{3/2})^{1/3} + \eta - f(\mathbf{x})), \\ \dot{\eta} = -k_2 \text{sgn}(x_1 + k_3 \text{sig}(x_2)^{3/2}). \end{cases} \quad (52)$$

为了证明系统为FTS, 控制器(50)–(52)中的控制参数皆需要满足复杂的约束条件, 比如控制器(50)–(51)的控制参数需要满足几个非线性不等式, 而文献[260–261]中只列举了几个合适的控制参数, 并没有给出明确的参数可以选择的范围, 再比如控制器(52)中的控制参数需大于某个非常复杂且包含状态量的非线性函数, 这也给选择参数造成困难. 此外, 这3篇研究成果皆通过引理6中的充分条件(7)来证明系统为FTS, 但需要注意的是, 充分条件(7)中存在未知正常数 c , 如果用它估计收敛时间上界, 是具有一定的保守性的. 因此控制器(50)–(52)的结构和研究结论是积极和值得肯定的成果, 但如何简化参数约束, 如何完整计算收敛时间上界, 以及如何扩大指数参数选择范围等课题, 都值得做进一步的研究.

4 有限时间输出反馈控制方法

前文介绍的FT状态反馈控制, 其控制器中都使用了状态信息 x_1 以及 x_2 , 其中状态 x_1 一般被认为是输出信息. 所以针对系统(8)的FT输出反馈控制指的是控制器中不利用 x_2 信息而能实现系统(8)为FTS的控制方法. 目前解决输出反馈控制问题的方法主要分为两类: 第1类是设计观测器以获得未知状态, 然后按照前文设计状态反馈控制思路设计控制器; 第2类是利用已知状态直接设计控制器, 因这类控制器结构中含有低通滤波环节(一阶惯性环节), 所以本文称之为滤波控制. 下面分别介绍FT控制领域的这两类方法.

4.1 有限时间状态观测器设计

针对系统(8), 设计FT状态观测器的目的是观测未知状态 x_2 , 因此需要定义 x_1 的观测值为 \hat{x}_1 , 定义 x_2 的观测值为 \hat{x}_2 , 定义观测误差 $\tilde{x}_1 \triangleq \hat{x}_1 - x_1$ 和 $\tilde{x}_2 \triangleq \hat{x}_2 - x_2$, 其中 x_1 为已知信息, 定义 \hat{x}_1 的目的并不是用 \hat{x}_1 替代 x_1 , 而是用 \tilde{x}_1 做为驱动信息实现观测器功能. 由此, 观

测器的目的转化为要实现 \tilde{x}_2 趋于0. 当观测器目的达到以后, 则可用已知的 \hat{x}_2 替代未知的 x_2 , 参考前文介绍的控制方法进一步实现 x_1 和 x_2 向0收敛. FT状态观测器从结构上分类可分为以下两类:

1) 以龙伯格观测器为原型的FT观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1 \text{sig}(\tilde{x}_1)^{p_1}, \\ \dot{\hat{x}}_2 = -k_2 \text{sig}(\tilde{x}_1)^{p_2} + h(x_1)u + f(x_1, \hat{x}_2), \end{cases} \quad (53)$$

其中指数参数需满足 $p_1 \in [0.5, 1)$, $p_2 = 2p_1 - 1$. 如果 $p_1 = 1$, 则观测器(53)不再具有FTS特性, 而转变为龙伯格观测器, 所以后面也称观测器(53)为类龙伯格观测器.

2) 用等效注入方式设计的终端滑模观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 = -k_2 \text{sgn}(k_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1)) + h(x_1)u + f(x_1, \hat{x}_2), \end{cases} \quad (54)$$

其功能实现的前提条件为: 需假设 $|\tilde{x}_2| \leq c_1$ 和 $|\tilde{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})| \leq c_2$ 成立, 其中 $\tilde{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \triangleq f(x_1, \hat{x}_2) - f(x_1, x_2)$, 进而控制参数需满足 $k_1 > c_1$ 和 $k_2 > c_2$.

FT状态观测器从稳定性分析角度可分为4类, 其中针对观测器(53)的方法分为3种, 分别为基于引理3–5的标准齐次理论方法(第4.1.1小节)、基于引理6的齐次反推Lyapunov定理方法(第4.1.2小节)、基于引理1的学者Moreno提出的方法(第4.1.3小节), 而第4类方法为针对观测器(54)的基于引理1的等效注入方法(第4.1.4小节). 下面将分4小节分别介绍这4类方法.

4.1.1 类龙伯格观测器(53)之标准齐次理论方法

本小节主要介绍如何利用引理3–5证明观测器(53)能在FT内观测系统(8)中的 x_2 , 即证明 \tilde{x}_2 为FT收敛. 首先用观测器(53)减系统(8)得到观测误差系统如下:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - k_1 \text{sig}(\tilde{x}_1)^{p_1}, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -k_2 \text{sig}(\tilde{x}_1)^{p_2} + \tilde{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}), \end{cases} \quad (55)$$

从其中分离出子系统如下:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - k_1 \text{sig}(\tilde{x}_1)^{p_1}, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -k_2 \text{sig}(\tilde{x}_1)^{p_2}. \end{cases} \quad (56)$$

针对上式子系统(56), 选择Lyapunov 候选函数 $V = k_2 |\tilde{x}_1|^{2p_1} + p_1 \tilde{x}_2^2$, 对其求导可得

$$\dot{V} = -2k_1 k_2 p_1 |\tilde{x}_1|^{3p_1 - 1} \leq 0,$$

所以子系统为渐近稳定. 利用引理2可得, 子系统(56)关于扩张向量 $(r_1, r_1 p_1)$ 具有负的齐次度 $k = r_1(p_1 - 1) < 0$. 再结合引理3可知子系统(56)为FTS.

有些文献的被控系统中并无 $f(\mathbf{x})$ 项, 比如文献[9]以及文献[263–269], 此时子系统(56)即为观测误差系统(55), 则以上分析过程可证明观测器(53)能FT内观

测未知状态 x_2 .

如果被控对象中含有 $f(x)$,且在子系统为FTS前提下还满足如下条件:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(\varepsilon^{r_1} \tilde{x}_1, \varepsilon^{r_2} \tilde{x}_2)}{\varepsilon^{k+r_2}} = 0. \quad (57)$$

则根据引理4可得观测误差系统(55)为局部FTS,即如果 \tilde{x}_1 和 \tilde{x}_2 在某个区域内,则其会在FT内收敛到0.比如文献[270–272]用该方法证明所设计的观测器为局部FTS.

为了解决引理4不能计算吸引区范围的问题,文献[16]以及文献[273–279]通过进一步研究 $\tilde{f}(x, \hat{x})$ 特性进而计算吸引区范围或证明系统为全局FTS.比如文献[16, 273]在 $|\tilde{f}(x, \hat{x})| \leq c_1 |\tilde{x}_2|$ 成立的前提下,稍微更改观测器结构,然后用Lyapunov方法计算吸引区的范围.比如文献[274–276]在假设 $x_1 \leq c_1$ 和 $x_2 \leq c_2$ 成立的前提下,计算出 $\tilde{f}(x, \hat{x})$ 项的上界,然后用Lyapunov方法计算吸引区的范围.比如文献[277–278]根据被控对象的模型特性,把系统(8)扩展到矩阵形式,推导出 $\tilde{f}(x, \hat{x})$ 的矩阵形式 $\tilde{f}(x, \hat{x})$ 具有 $\tilde{f}(x, \hat{x}) = W(x, \hat{x}) \tilde{x}_2$ 的形式,其中 $W(x, \hat{x})$ 为斜对称矩阵.再利用 $\tilde{x}_2^T W(x, \hat{x}) \tilde{x}_2 = 0$ 的特性,证明系统为全局渐近稳定,根据引理5得到全局FTS的结论.比如文献[279]在 $|\tilde{f}(x, \hat{x})| \leq c_1 |\tilde{x}_2| + c_2 \tilde{x}_2^2$ 成立前提下,通过在观测器中加入负反馈项 $-k_3 \tilde{x}_1$ 以及Lyapunov函数中增加 \tilde{x}_2^2 ,可证明系统为全局渐近稳定,再根据引理5可得到全局FTS的结论.

由以上分析可知,针对观测误差系统中是否含有 $\tilde{f}(x, \hat{x})$ 项,以及 $\tilde{f}(x, \hat{x})$ 项所满足的形式,可根据引理3–5对观测器(53)进行稳定性分析.因为受扰动系统(如系统(9))不具有齐次度也不满足式(57),所以该方法不能分析受扰动系统的稳定性,而且该方法也不能计算收敛时间的上界,这两点是齐次观测器所具有的不足,也是未来值得研究的方向.

注 13 文献[264]用引理6计算收敛时间上界,并给出式(7)中未知常数 c 与观测参数间的表达式.该方法看似解决了齐次方法不可估计时间的问题,但应注意的,该表达式仅适用于 $p_1 \approx 1$ 的情况.而如果 $p_1 = 1$,则观测器(53)退化为龙伯格观测器,其文献中给出的收敛时间上界表达式将趋于无穷.因此,该方法实际上并没有解决齐次方法时间不可估计的问题.

4.1.2 类龙伯格观测器(53)之齐次反推Lyapunov方法

面对第4.1.1小节齐次方法的不足之处,一些学者开始尝试用其他方法分析观测器(53)的稳定性.文献[280–281]提出用引理6中的齐次反推Lyapunov定理方法处理观测系统中的非线性项(或干扰).下面简单介绍该方法.

研究观测器(53)的稳定性,就是研究观测误差系统(55)的稳定情况.为方便理解,称系统(55)为整系统,而称系统(56)为系统(55)的子系统.首先,针对子系统(56)选择Lyapunov函数为 $V_S = 0.5 \tilde{x}_1^2 + 0.5 \tilde{x}_2^{2/p_1}$.对其求导可得

$$\dot{V}_S = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - k_1 |\tilde{x}_1|^{p_1+1} - p_1^{-1} |\tilde{x}_2|^{-1+2/p_1} k_2 \text{sig}(\tilde{x}_1)^{2p_1-1}. \quad (58)$$

利用引理2计算可得,子系统(56)关于 $(r_1, r_1 p_1)$ 具有负齐次度 $k = r_1(p_1 - 1)$,且 V_S 关于 $(r_1, r_1 p_1)$ 具有正齐次度 $\sigma = 2r_1$.进而由引理6可得 $\dot{V}_S \leq -cV_S^{(1+p_1)/2}$.结合式(58)可得

$$\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - k_1 |\tilde{x}_1|^{p_1+1} - p_1^{-1} |\tilde{x}_2|^{-1+2/p_1} k_2 \text{sig}(\tilde{x}_1)^{2p_1-1} \leq -cV_S^{(1+p_1)/2}. \quad (59)$$

然后针对整系统(55)选择候选Lyapunov函数为 $V_o = 0.5 \tilde{x}_1^2 + 0.5 \tilde{x}_2^{2/p_1}$,对其求导可得

$$\dot{V}_o = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - k_1 |\tilde{x}_1|^{p_1+1} - p_1^{-1} |\tilde{x}_2|^{-1+2/p_1} k_2 \text{sig}(\tilde{x}_1)^{2p_1-1} + p_1^{-1} |\tilde{x}_2|^{-1+2/p_1} \tilde{f}(x, \hat{x}). \quad (60)$$

以 $|\tilde{f}(x, \hat{x})| \leq c_1 |\tilde{x}_2|$ 的假设条件为例,对式(60)中最后一项处理可得 $p_1^{-1} c_1 |\tilde{x}_2|^{2/p_1} \leq c_2 V_o$,其中 $c_2 = 2p_1^{-1} c_1$.再把式(59)代入到式(60)可得

$$\dot{V}_o \leq -cV_o^{(1+p_1)/2} + c_2 V_o. \quad (61)$$

对上式进一步分析可知系统为局部FTS,且吸引域为 $\{\tilde{x} : V_o^{(1-p_1)/2} \leq c(1-\theta)/c_2\}$,其中常数 $\theta \in (0, 1)$.

齐次反推Lyapunov定理方法优点是能以引理1中式(4)形式为目标对复杂观测误差系统进行稳定性分析,以式(61)为例,不等号右边第1项保证系统具有FTS特性,第2项根据实际情况即可以变形表示 $\tilde{f}(x, \hat{x})$,也可以通过变形表示系统中的干扰等不确定性.因此,该方法一经提出,便受到广泛关注,被用在许多复杂控制问题的研究成果中,比如文献[282–298].然而该方法也具有保守性,因为式(61)中的常数 c 很难求出其具体值,这导致基于式(61)求出的吸引区以及收敛时间上界都只存在于形式上而不可被计算.此外,该方法的稳定性分析过程存在待严谨的地方.在把式(59)代入到式(60)时,该方法认为 $V_o = V_S$,所以可等效替换.然而应注意的是, V_o 和 V_S 虽然形式一样,但其中状态所对应的系统并不一样,因为整系统比子系统多了 $\tilde{f}(x, \hat{x})$ 项(如果考虑扰动,则此处还会多一个干扰项),所以整系统中的状态轨迹与子系统的状态轨迹必然是不同的,即同一时间的 V_o 与 V_S 的值一般是不相等的.因此,如何把子系统的结论 $\dot{V}_S \leq -cV_S^{(1+p_1)/2}$ 用在整系统的 \dot{V}_o 中,对于该方法来说,值得做进一步的研究.

4.1.3 类龙伯格观测器(53)之学者Moreno方法

研究观测器(53)的稳定性时,前两小节介绍的方法都存在着些许保守性,本小节介绍另一种可称之完美的方法,即Moreno方法.令观测器(53)中指数 $p_1 = 0.5$,则观测器(53)转化为超螺旋观测器.早期文献[299]利用系统的几何特性证明了超螺旋系统为FTS,但该方法不能估计收敛时间,为解决该问题,学者Moreno在文献[300]中创造性的给出了超螺旋系统的Lyapunov函数,并用简单的Lyapunov方法证明该系统为FTS.在这之后,文献[301]把Moreno方法用在了超螺旋观测器上,文献[302–303]把将其用在观测器(53)上,下面简单介绍Moreno方法.

定义 $\xi = [\text{sig}(\tilde{x}_1)^{p_1} \tilde{x}_2]^T$ 和 $\tilde{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = [0 \ \tilde{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})]^T$.下面证明 ξ 为FT收敛.对辅助变量 ξ 求导可得

$$\dot{\xi} = |\tilde{x}_1|^{p_1-1} \mathbf{A}\xi + \tilde{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}),$$

其中 $\mathbf{A} = [-p_1 k_1, p_1; -k_2, 0] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.不难验证 \mathbf{A} 为Hurwitz矩阵,则对于任意正定对称矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,存在正定矩阵 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 满足代数Lyapunov方程 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$.选择Lyapunov函数 $V = \xi^T \mathbf{P} \xi$,对其求导可得

$$\dot{V} \leq -|\tilde{x}_1|^{p_1-1} \xi^T \mathbf{Q} \xi + 2\|\tilde{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})\| \cdot \|\mathbf{P}\| \cdot \|\xi\|.$$

以 $\|\tilde{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})\| \leq c_1 |\tilde{x}_2|$ 的假设条件为例,对上式整理可得

$$\dot{V} \leq -c_2 V^{1.5-0.5/p_1} + c_3 V, \quad (62)$$

其中:

$$c_2 = \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \lambda_{\max}(\mathbf{P})^{-1.5+0.5/p_1},$$

$$c_3 = 2c_1 \|\mathbf{P}\| \lambda_{\min}(\mathbf{P})^{-1}.$$

对式(62)进一步分析可知系统为局部FTS,且吸引域为 $\{\tilde{\mathbf{x}}: V^{-0.5+0.5/p_1} \leq (1-\theta)/c_3\}$,其中常数 $\theta \in (0, 1)$.

相比前两小节方法,本节介绍的Moreno方法可称之完美的方法.首先,Moreno方法完全基于Lyapunov稳定定理,因此,当考虑系统扰动等复杂工况时,此方法比齐次方法更适合分析系统.比如上文分析中如以 $\|\tilde{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})\| \leq c_1$ 的假设条件为例,则适合 $\tilde{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ 中含有干扰情况,分析可知系统为FT收敛有界.其次,Moreno方法简单且严谨.由上文分析过程可见,该方法的证明过程并不复杂,甚至相比前两节方法还要简单,而且并没有把系统拆成整系统和子系统,因此也严谨很多.最后,Moreno方法可计算收敛时间上界.由式(62)可知,状态在吸引域 $\dot{V} \leq -c_2 \theta V^{1.5-0.5/p_1}$ 成立,相比式(61)中 c 为未知常数,此处 c_2 可为已知常数,可根据引理1计算收敛时间上界.因为Moreno方法具备以上诸多优点,所以逐渐受到广泛关注和认可,被逐渐应用到越来越多的输出反馈控制研究成果中,比如文献[304–312]中的超螺旋观测器,再比如文献[86, 313–317]中的类龙伯格观测器(53).Moreno方法

是近乎完美的观测器设计方法,但其指数参数 $p_1 \in [0.5, 1)$ 和 $p_2 = 2p_1 - 1$ 依然具有一定的约束性,如何扩大参数选取范围,使之更为完美,值得做进一步的研究.

4.1.4 基于等效注入方法的终端滑模观测器

文献[318]提出形式如式(54)的观测器,并用等效注入方法分析系统稳定性,随后文献[319]称该观测器(54)为终端滑模观测器,之后该观测器及其分析方法被应用在许多研究中,比如文献[320–326].下面对该稳定性分析方法进行简单的介绍.

首先,构造观测误差系统,用观测器(54)减系统(8)得到

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - k_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1), \quad (63)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -k_2 \text{sgn}(k_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1)) + \tilde{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}). \quad (64)$$

后面分析过程分两步,首先,基于式(63)证明 \tilde{x}_1 为FT收敛,其次基于式(64)证明 \tilde{x}_2 为FT收敛.

第1步,针对式(63),选择Lyapunov函数 $V_1 = \tilde{x}_1^2$,对其求导并利用 $|\tilde{x}_2| \leq c_1$ 的假设条件可得 $\dot{V}_1 \leq -2(k_1 - c_1)V_1^{1/2}$.由引理1可知,经过FT后, $\tilde{x}_1 = 0$ 恒成立,其意味着 $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$ 也成立.

第2步,把 $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$ 将其代入式(63)可得 $k_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$,这里把 \tilde{x}_2 作为 $k_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1)$ 的等效注入,即把 $k_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ 代入式(64)可得

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -k_2 \text{sgn}(\tilde{x}_2) + \tilde{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}). \quad (65)$$

针对式(65),选择候选Lyapunov函数为 $V_2 = \tilde{x}_2^2$,对其求导并利用 $|\tilde{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})| \leq c_2$ 的假设条件可得 $\dot{V}_2 \leq -2(k_2 - c_2)V_2^{1/2}$.由引理1可知, \tilde{x}_2 会在FT内收敛到0,即为FTS.

终端滑模观测器的优点与超螺旋观测器(观测器(53)中 $p_1 = 0.5$ 情况)一样,即具有很强的鲁棒性,当干扰存在时也可保证系统为FTS.然而终端滑模观测器的证明过程中,根据 $\tilde{x}_1 = 0$ 直接判断 $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$,该过程有待严谨,缺少相关的理论分析.下面用反证法检验 $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$ 是否成立.把该方法的结论 $\tilde{x}_2 = 0$ 代入式(63)中,可得 $\dot{\tilde{x}}_1 = k_1 \text{sgn}(0)$,由式(2)中 $\text{sgn}(0)$ 定义可知,此时 $\dot{\tilde{x}}_1 \in k_1[-1, 1]$,其表示 $\dot{\tilde{x}}_1$ 在 $-k_1$ 和 k_1 两个值间做零均值无穷频率的抖振,此抖振并不等效为0值.因此,用 $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$ 证明 $\tilde{x}_2 = 0$,而由 $\tilde{x}_2 = 0$ 反过来又证明 $\dot{\tilde{x}}_1 \neq 0$,该前后矛盾的地方表明 $\dot{\tilde{x}}_1$ 是不等于0的.此外,如果把观测器中 $\text{sgn}(\cdot)$ 改成 $\text{sign}(\cdot)$,也是不能解决此矛盾的.如果在第1步中能得到 $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$,代入式(63)中且利用 $\text{sign}(0) = 0$ 可直接得到 $\tilde{x}_2 = 0$,即不需要第2步的稳定性分析,也不需要构造 \tilde{x}_2 的观测部分,便证明了 $\tilde{x}_2 = 0$,这显然是不合常理的.因此,由 $\tilde{x}_1 = 0$ 不应该直接判断 $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$,在第2步的等效注入中,注入的应该是 $k_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2 - \dot{\tilde{x}}_1$ 而不应该是 $k_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1) =$

\tilde{x}_2 . 在 $k_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2 - \dot{\tilde{x}}_1$ 的注入下, 如何证明系统为 FTS, 值得做进一步的研究.

4.2 有限时间滤波控制

上节介绍的基于 FT 观测器的输出反馈控制思路是, 先用观测器的输出 \hat{x}_2 取代未知状态 x_2 , 然后用第3节介绍的 FT 状态反馈控制方法保证系统(8)为 FTS. 其稳定过程在时间上分为先后两部分, 即观测器先实现 \tilde{x}_2 收敛到 0, 然后控制部分实现 x_1 和 x_2 收敛到 0. 本节介绍的 FT 滤波控制, 与前小节最大的不同之处在于, 其没有观测未知状态 x_2 , 而是通过设置辅助变量 φ , 实现 x_1 , x_2 和 φ 同时收敛到 0. 下面分别介绍两种 FT 滤波控制的设计思路.

4.2.1 基于齐次理论的有限时间滤波控制

学者高岱和吕建婷等在文献[327–328]中基于齐次理论首次提出 FT 滤波控制, 针对系统(8), 其控制器形式如下:

$$\begin{aligned} u &= h(x_1)^{-1}(-k_1 \text{sig}(x_1)^{p_1} - k_2 \text{sig}(\varphi + k_3 x_1)^{p_1}), \quad (66) \\ \dot{\varphi} &= -k_4 \text{sig}(\varphi + k_3 x_1)^{p_2}, \quad (67) \end{aligned}$$

其中: $p_1 \in (0, 1)$, $p_2 = (1 + p_1)/2$. 控制器(66)–(67)中不含有状态 x_2 , 所以为输出反馈控制, 下面证明其能稳定系统.

定义变量 $x_3 \triangleq \varphi + k_3 x_1$, 则把控制器(66)–(67)代入到系统(8)可得如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -k_1 \text{sig}(x_1)^{p_1} - k_2 \text{sig}(x_3)^{p_1} + f(x), \\ \dot{x}_3 = k_3 x_2 - k_4 \text{sig}(x_3)^{p_2}. \end{cases} \quad (68)$$

可用第4.1.1小节分析齐次观测误差系统(55)的类似方法分析系统(68)的稳定性. 首先, 从中分离出子系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -k_1 \text{sig}(x_1)^{p_1} - k_2 \text{sig}(x_3)^{p_1}, \\ \dot{x}_3 = k_3 x_2 - k_4 \text{sig}(x_3)^{p_2}. \end{cases} \quad (69)$$

针对子系统(69), 选择 Lyapunov 函数为

$$\begin{aligned} V &= k_1(1 + p_1)^{-1} |x_1|^{1+p_1} + 0.5x_2^2 + \\ &\quad k_2 k_3^{-1} (1 + p_1)^{-1} |x_3|^{1+p_1}, \end{aligned}$$

对上式求导, 并把系统(69)代入其中可得 $\dot{V} = -k_2 k_4 k_3^{-1} |x_3|^{p_1+p_2} \leq 0$, 所以子系统为渐近稳定. 利用引理2可得, 子系统(69)关于扩张向量 $(r_1, 0.5r_1(1+p_1), r_1)$ 具有负的齐次度 $k = 0.5(p_1 - 1)$. 再结合引理3可知子系统(56)为 FTS.

有些文献的被控系统中并无 $f(x)$ 项, 比如文献[329–330], 此时子系统(69)即为系统(68), 则根据以上分析可知控制器(66)–(67)在未使用 x_2 信息下依可保证 x_1 和 x_2 在 FT 内收敛到 0.

如果被控对象中含有 $f(x)$, 且在子系统为 FTS 前提下还满足如下条件:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2, \varepsilon^{r_3} x_3)}{\varepsilon^{k+r_2}} = 0. \quad (70)$$

则根据引理4可得系统(68)为局部 FTS, 即如果 \tilde{x}_1 和 \tilde{x}_2 在某个区域内, 则其会在 FT 内收敛到 0. 相比于齐次观测误差系统(55)中的 $\tilde{f}(x, \hat{x})$ 为观测器中 $f(x_1, \hat{x}_2)$ 与被控对象中 $f(x_1, x_2)$ 之差, 导致一般需要假设条件才能进一步分析 $\tilde{f}(x, \hat{x})$ 特性. 系统(68)中的 $f(x)$ 即为被控对象中的 $f(x)$, 因此, 许多研究成果中利用被控对象模型具有的特殊性, (比如三维姿态模型中利用 $f(x)$ 中包含斜对称矩阵而获得的特性 $x_2^T f(x) = 0$), 可证明系统(68)为全局渐近稳定, 比如文献[331–343], 再基于引理5可证明系统为全局 FTS.

相比下小节要介绍的加幂积分滤波控制, 本小节的齐次滤波控制器(66)–(67)具有参数简单、约束范围小、易于实现的优点. 相比第4.1.1小节齐次观测器研究 $\tilde{f}(x, \hat{x})$ 的特性, 齐次滤波控制方法直接研究具有模型特性的 $f(x)$, 能在一定程度上降低假设条件, 也是该方法的一个优点. 然而受限于齐次理论, 受扰动系统不存在齐次度也不满足式(70)的条件, 因此, 齐次滤波控制无法分析受扰动系统的稳定性, 此外, 该方法也不能估算收敛时间上界. 如何解决这两个问题, 是该方法接下来值得研究的重要方向.

4.2.2 基于加幂积分函数的有限时间滤波控制

学者钱春江在文献[344]中首次提出基于加幂积分函数的 FT 滤波控制方法, 针对系统(8), 其控制器形式如下:

$$u = h(x_1)^{-1} \beta(x_1) \text{sig}(-k_1 x_1 - (\varphi + l(x_1) x_1))^{\frac{p_1}{2-p_1}}, \quad (71)$$

$$\dot{\varphi} = -l(x_1) \text{sig}(\varphi + l(x_1) x_1)^{1/(2-p_1)}, \quad (72)$$

其中变量 $\beta(x_1)$ 和控制参数函数 $l(x_1)$ 需满足如下约束:

$$\beta(x_1) = 1 + k_2 + \rho_1(x_1) + \rho_2(x_1) + \rho_3(x_1) + \rho_4(x_1), \quad (73)$$

$$\begin{aligned} &(2^{1/(2-p_1)} - 1) l(x_1)^{-1/3-p_1/(2-p_1)} > \\ &a_1(x_1) + a_2(x_1) + a_3(x_1) + 0.25. \end{aligned} \quad (74)$$

式(73)–(74)中的变量 $\rho_i(x_1)$ 和 $a_i(x_1)$, $i = 1, 2, 3, 4$, 为稳定分析中进行不等式缩放时产生的相关变量, 其定义可参考文献[344–345], 因其结构复杂, 且形式多样, 所以此处不给出其具体形式.

该方法在稳定分析中的选择的 Lyapunov 函数形式为 $V = V_1 + V_2 + V_3$, 其中: $V_1 = 0.5x_1^2$, $V_3 = 0.5e^2$, V_2 定义为

$$V_2 = \int_{x_{2d}}^{\hat{x}_2} \text{sig}(\text{sig}(s)^{2-p_1} - \text{sig}(x_{2d})^{2-p_1})^{2-1/(2-p_1)} ds. \quad (75)$$

式(75)为加幂积分函数,其中辅助变量 \hat{x}_2 和 x_{2d} 的定义为 $\hat{x}_2 = \text{sig}(\varphi + l(x_1)x_1)^{1/(2-p_1)}$ 和 $v_{x_{2d}} = -k_1 \text{sig}(x_1)^{1/(2-p_1)}$. \hat{x}_2 可在一定程度上认为是 x_2 的估计值,而 x_{2d} 为反步法中的虚拟控制. V_3 中 e 的表达式为 $e = \text{sig}(x_2)^{2-p_1} - \text{sig}(\hat{x}_2)^{2-p_1}$,可在一定程度上将其看作是 x_2 与其估计值 \hat{x}_2 之间的误差.这样通过复杂的推导,可证明 V 的导数满足引理1中的判断条件(4),所以可得控制器(71)–(72)在不使用 x_2 信息情况下依然能保证 x_1 和 x_2 为FT收敛.

针对某些齐次度不存在且不满足式(70)的系统(比如受扰动系统)设计FT滤波控制器时,由于齐次滤波控制方法不再适用,此时只能选择本小节的加幂积分滤波控制方法.除此之外,本小节方法还能给出收敛时间上界的表达式,因此被应用在许多研究成果当中,比如文献[345–358].然而此方法的不足之处也是很明显的,由于在稳定性分析中频繁对不等式进行缩放,导致其控制器中变量参数 $\beta(x_1)$ 的形式有些复杂,而参数函数 $l(x_1)$ 的约束条件又有些苛刻.因此,与第3.3节加幂积分状态反馈控制方法一样,如何简化参数的约束条件,扩大参数的选择范围,值得做进一步的研究.

注 14 在加幂积分滤波控制的研究中,习惯称式(72)为降阶观测器而非滤波器,这里解释其原因以及本文称其为滤波器的原因.在加幂积分滤波控制中,为了方便稳定性分析,定义了变量 \hat{x}_2 ,根据 \hat{x}_2 的定义式,控制器(71)可写为更接近基于观测器的形式,即

$$u = -h(x_1)^{-1} \beta(x_1) \text{sig}(\text{sig}(\hat{x}_2)^{2-p_1} + k_1 x_1)^{p_1/(2-p_1)}.$$

如果认为 \hat{x}_2 是 x_2 的观测值,则 e 刚好可认为是观测误差,再根据稳定分析中证明了 e 为FT收敛,因此有理由称 \hat{x}_2 为观测值,而称式(72)为降阶观测器(或一阶观测器).下面解释本文称式(72)为滤波器的原因.首先,如果令 $p_1 = 1$,则式(67)(72)都转变为典型的低通滤波环节,因此可认为式(67)(72)是滤波器在FT控制领域的延伸.其次,对比式(66)–(67)与式(71)–(72),如果令 $p_1 = 1$,则两种控制器的结构几乎一样,因此可认为两种控制器是同类型控制方法,而在齐次滤波控制研究中,一般称式(67)为滤波器,所以为了统一名称,可称式(72)为滤波器.最后,第4.1节的FT观测器具有观测误差先于状态收敛的性质,其表明观测部分稳定性独立于控制部分稳定性,即观测误差的收敛不受状态是否收敛的限制.而第4.2.2小节的 e 需随着状态一起收敛,其表明式(72)的稳定需依赖于状态的稳定,这与第4.1节的FT观测器是显著不同的.因此,为了更好区分式(72)与FT观测器,本文称式(72)为滤波器,称这种控制方法为滤波控制.

注 15 文献[1]已介绍过FT控制在4种典型系统(混沌系统、空间飞行器姿态控制系统、多智能系统和永磁同步电机系统)中的应用和研究成果.而本文侧重从控制器设计方法角度对现有FT控制的研究成果进行了较为细致的分类和分析,限于篇幅,不再从典型系统角度介绍FT控制所能解决的具体问题.虽然控制系统种类繁多,但对于可通过坐标变换方

法,转化成式(8)或式(9)的二阶系统,本文所综述的内容和结论都具有适用性.此外,FT控制不仅在理论上取得一系列的研究成果和关注,在实际系统的应用中,已有很多成果可表明FT控制具有优良的控制性能,如在压电执行器^[359]、机械臂^[360]、面向航天器的实验气浮平台^[361]、移动卫星天线^[362]、形状记忆合金执行器^[363]、电动汽车的无刷电机^[364]等实际应用中验证了第3.1.3小节经典非奇异终端滑模控制的有效性,再比如文献[105,113]分别在机械臂和双边遥操作系统的实际工程中用到了基于滑模替换法的终端滑模控制技术,再比如第3.2.2小节提及的基于积分滑模的反步FT控制用在了压电执行器^[365]和电子油门^[366]等实际应用中,此外,还有用了反步FT控制技术的双连杆平面机器人^[172]、用了加幂积分FT控制的直流–直流转换器^[195]、用了齐次FT控制的四旋翼^[217]、用了基于齐次系统的积分滑模FT控制的上肢外骨骼^[367]、用了Moreno观测器的气动伺服系统^[64]、用了终端滑模观测器的微卫星地面实验平台^[368]等,这些实际应用不仅验证了FT控制技术的有效性,也推动了其发展.

注 16 相比文献[1–3],本文更细致且深入的对主流FT控制方法进行了分类和分析,并通过稳定性分析指出每种方法的优缺点,这也是本文的主要贡献.但限于主题和篇幅,本文没有介绍更多的FTS概念,比如系统状态FT内收敛到包含平衡点邻域内的实际FT稳定^[313],再比如系统收敛时间上界可与系统初值无关的固定时间稳定概念^[13]等.其中固定时间控制作为FT控制中的重要一部分,近几年被广泛应用到各种系统中,但其控制方法的设计思路与FT控制大体相同,面临的主要问题也基本一致,可参考本文的核心思路分析固定时间控制,亦可参考文献[2–3]等.此外,本文介绍的众多控制方法都是针对二阶系统的,并非都能扩展到高阶系统中,比如第3.1.3小节1)中的CNTSM控制、2)中的正弦函数法FT控制等方法都很难应用在高阶系统中.实际上,高阶系统控制问题要比二阶系统复杂的多,而本文给出的各种控制方法结论是否适用于高阶系统,需要结合具体的高阶模型进行逐一验证,可参考文献[1]了解更多高阶系统FT控制内容.

5 结论

本文针对系统(8),基于引理1–6,综述了17种FT状态反馈控制方法及6种FT输出反馈控制方法,详细讨论了各种方法优点以及存在的问题,并将它们归纳到下面的表1–2中.虽然近十余年,有限时间控制方法取得了较大的发展,众多方法被相继提出,但目前仍不存在一个完美的FT控制方法能同时做到参数简单、收敛时间上界可求、无奇异且无近乎奇异现象、能对受扰动系统进行稳定性分析,所以,未来FT控制的发展希望能在以下几个方向上取得进一步成果:

1) 齐次控制方法的鲁棒性及收敛时间上界的研究.齐次控制器的形式和参数最为简单,可直观认为是PID控制在FT控制领域的延伸,对齐次控制的理论研究具有重要的理论和工程意义.但目前齐次状态反馈控制和齐次滤波控制都不能分析受扰动系统的稳定性.考虑到学者Moreno的方法近乎完美解决了齐次

观测器的分析鲁棒性及计算收敛时间上界的问题,因此希望在不久的将来,齐次控制的问题也能如愿解决.

2) 基于加幂积分函数的有限时间状态反馈控制及输出反馈控制中的参数简化问题研究.

3) 终端滑模控制中的“控制奇异与收敛时间矛盾性”问题研究.

4) 进一步扩大指数参数选择范围的研究. 注意齐次控制器(45)中 $p_2 = 2p_1/(1 + p_1)$, 齐次滤波控制器(66)中 $p_2 = (1 + p_1)/2$, 这两项指数参数直接受 p_1 参数的限制. 在实际仿真和应用中, 本文更希望 p_1 和 p_2 都能在(0, 1)内自由调整. 考虑到终端滑模的指数参

数 p_1 和 p_2 就可在(0, 1)内自由选取, 因此有理由猜想, 如果控制器(45)(66)中 p_2 的限制条件仅为 $p_2 \in (0, 1)$, 系统应该也为FTS. 但该如何证明? 此外, 学者Moreno方法近乎完美解决了FT观测问题, 但观测器(53)中指数参数 p_1 和 p_2 需满足约束条件 $p_1 \in [0.5, 1)$ 和 $p_2 = 2p_1 - 1$, 如何扩大参数选取范围, 使之更为完美, 值得做进一步的研究.

5) 本文表1-2中对23种FT控制方法的总结仅适用于一般的二阶系统, 当面对高阶系统、非完整系统、非光滑系统等更复杂的系统时, 如何设计具有所有优点的FT控制器是个长久且充满挑战的课题.

表 1 连续有限时间状态反馈控制方法总结

Table 1 Overview of continuous FT state feedback control methods

| 控制方法 | | 可对受扰动系统进行分析 | 控制无奇异且无近乎奇异现象 | 收敛时间上界有界且不用引理6可表达 | 控制参数约束小 | 值得进一步研究的课题 |
|---------------------------|-----------------------|-------------|-----------------------------|--|---------|---------------------|
| 3.1.1 基于FT趋近律的普通滑模控制 | | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | |
| 3.1.2 标准终端滑模FT控制 | | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | |
| 3.1.3 1) 经典非奇异终端滑模FT控制 | | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | |
| 终端滑模控制 | 3.1.3 2) 正弦函数法 | ✓ | | 存在未知时间段且受 ϵ 影响 ϵ 过大导致无界 | ✓ | 解决“控制奇异与收敛时间矛盾性”的课题 |
| | 3.1.3 3) 饱和函数法 | ✓ | 阈值 ϵ 过小会导致“近乎奇异”现象 | | ✓ | |
| | 3.1.3 4) 滑模替换法 | ✓ | | ✗ | ✓ | |
| | 注9 简易滑模替换法 | ✓ | | ✗ | ✓ | |
| | 3.1.3 5) a) 边界层法 | ✓ | ✓ | ✓ | | |
| 3.1.3 5) b) 自定义滑模变量导数 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | |
| | 3.1.3 5) c) 奇异点替换法 | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | |
| 3.2.1 标准反步FT控制 | | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | |
| 3.2.2 基于积分滑模的反步FT控制 | | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | |
| 加幂积分 | 3.3.1 加幂积分FT控制 | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | 参数简化 |
| | 3.3.2 基于加幂积分的积分滑模FT控制 | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | |
| 齐次理论 | 3.4.1 齐次FT控制 | ✗ | ✓ | ✗ | ✓ | 鲁棒性及收敛时间上界 |
| | 3.4.2 基于齐次系统的积分滑模FT控制 | ✗ | ✓ | ✗ | ✓ | |
| 3.5 微分包含意义下的FT控制(50)-(52) | | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | 参数简化 |

表 2 连续有限时间输出反馈控制方法总结

Table 2 Overview of continuous FT output feedback control methods

| 控制方法 | | 可对受扰动系统进行分析 | 收敛时间上界有界且不用引理6可表达 | 参数约束小 | 值得进一步研究的课题 |
|------|-----------------------|----------------------|-------------------|-------|--------------|
| 观测器 | 4.1.1 齐次理论方法 | ✗ | ✗ | ✓ | 鲁棒性及收敛时间上界 |
| | 类龙伯格观测器(53) | 4.1.2 齐次反推Lyapunov方法 | ✓ | ✓ | 稳定性证明值得进一步研究 |
| | 4.1.3 学者More方法 | ✓ | ✓ | ✓ | 扩大指数参数的选择范围 |
| | 4.1.4 基于等效注入的终端滑模观测器 | ✓ | ✓ | ✓ | 稳定性证明值得进一步研究 |
| 滤波控制 | 4.2.1 基于齐次理论的FT滤波控制 | ✗ | ✗ | ✓ | 鲁棒性及收敛时间上界 |
| | 4.2.2 基于加幂积分函数的FT滤波控制 | ✓ | ✓ | ✗ | 参数简化 |

综上所述,虽然FT控制技术被用在许多控制领域中解决各种控制问题,近十年来发展迅速,但即使针对简单如式(8)的系统,目前却没有完美的FT控制方案,这反映了FT控制方法本身还存在许多问题亟需解决,希望能引起学者们的关注和研究.最后,本文想引用文献[1]的原文对全文进行总结:“尽管关于有限时间控制方面已经取得了一些成果,但目前还处在发展阶段,仍然有很多方面有待进一步的深入研究.笔者有理由相信,通过研究人员的坚持不懈的努力,这个课题将会得到更为迅速和全面的发展^[1].”

参考文献:

- [1] DING Shihong, LI Shihua. A survey for finite-time control problems. *Control and Decision*, 2011, 26(2): 161 – 169.
(丁世宏, 李世华. 有限时间控制问题综述. 控制与决策, 2011, 26(2): 161 – 169.)
- [2] LIU Yang, JING Yuanwei, LIU Xiaoping, et al. Survey on finite-time control for nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(1): 4 – 15.
(刘洋, 井元伟, 刘晓平, 等. 非线性系统有限时间控制研究综述. 控制理论与应用, 2020, 37(1): 4 – 15.)
- [3] JIANG Boyan. *Research on finite-time control problem for second order system*. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2018.
(姜博严. 二阶系统有限时间控制问题研究. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2018.)
- [4] SONG Shenmin, GUO Yong, LI Xuehui. Finite-time attitude tracking control for spacecraft with input saturation. *Control and Decision*, 2015, 30(11): 2004 – 2008.
(宋申民, 郭永, 李学辉. 航天器姿态跟踪有限时间饱和控制. 控制与决策, 2015, 30(11): 2004 – 2008.)
- [5] SONG Y, WANG Y, HOLLOWAY J, et al. Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time. *Automatica*, 2017, 83: 243 – 251.
- [6] SONG Y, WANG Y, KRSTIC M. Time-varying feedback for stabilization in prescribed finite time. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(3): 618 – 633.
- [7] LU Y S, CHIU C W, CHEN J S. Time-varying sliding-mode control for finite-time convergence. *Electrical Engineering*, 2010, 92(7/8): 257 – 268.
- [8] XIAO B, HU Q L, ZHANG Y M. Finite-time attitude tracking of spacecraft with fault-tolerant capability. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, 23(4): 1338 – 1350.
- [9] HONG Y. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems. *Systems & Control Letters*, 2002, 46(4): 231 – 236.
- [10] ZHENG Kai. *Nonsmooth control system design based on the solution of filippov's differential inclusion*. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2009.
(郑凯. 基于Filippov微分包含解的非平滑控制系统设计方法研究. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2009.)
- [11] BHAT S, BERNSTEIN D S. Lyapunov analysis of finite-time differential equations. *Proceedings of 1995 American Control Conference*. Seattle: IEEE, 1995, 3: 1831 – 1832.
- [12] YU X, ZHIHONG M. Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(2): 261 – 264.
- [13] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 57(8): 2106 – 2110.
- [14] DING Shihong, LI Shihua, LI Qi. Globally uniform stability of a class of continuous cascaded systems. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(10): 1268 – 1274.
(丁世宏, 李世华, 李奇. 一类连续级联系统的全局一致稳定性. 自动化学报, 2008, 34(10): 1268 – 1274.)
- [15] BHAT S, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of homogeneous systems. *Proceedings of 1997 American Control Conference*. Albuquerque: IEEE, 1997, 4: 2513 – 2514.
- [16] DU H, HE Y, CHENG Y. Finite-time synchronization of a class of second-order nonlinear multi-agent systems using output feedback control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2014, 61(6): 1778 – 1788.
- [17] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control Signals & Systems*, 2005, 17(2): 101 – 127.
- [18] ZOU A M, FAN Z. Fixed-time attitude tracking control for rigid spacecraft without angular velocity measurements. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 67(8): 6795 – 6805.
- [19] LEE K W, SINGH S N. Adaptive and supertwisting adaptive spacecraft orbit control around asteroids. *Journal of Aerospace Engineering*, 2019, 32(4): 04019042.
- [20] LIANG K, LIN X, CHEN Y, et al. Adaptive sliding mode output feedback control for dynamic positioning ships with input saturation. *Ocean Engineering*, 2020, 206: 107245.
- [21] SHAO X, TIAN B, YANG W. Fixed-time trajectory following for quadrotors via output feedback. *ISA Transactions*, 2021, 110: 213 – 224.
- [22] XIAO B, YIN S, KAYNAK O. Tracking control of robotic manipulators with uncertain kinematics and dynamics. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(10): 6439 – 6449.
- [23] MOBAYEN S. Finite-time robust-tracking and model-following controller for uncertain dynamical systems. *Journal of Vibration and Control*, 2016, 22(4): 1117 – 1127.
- [24] ZHU Z, GUO Y, GAO Z. Adaptive finite-time actuator fault-tolerant coordinated attitude control of multispacecraft with input saturation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2019, 33(4): 644 – 663.
- [25] ZHU Z, GUO Y. Robust adaptive finite-time attitude tracking and synchronization control for multi-spacecraft with actuator saturation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2019, 233(2): 629 – 640.
- [26] RAZA A, MALIK F M, MAZHAR N, et al. Finite-time trajectory tracking control of output-constrained uncertain quadrotor. *IEEE Access*, 2020, 8: 215603 – 215612.
- [27] ZHOU Jian, GONG Chunlin, SU Hua. Finite-time distributed synchronization of spacecraft formation attitude with complex constraints. *Journal of Astronautics*, 2018, 39(12): 1340 – 1347.
(周健, 龚春林, 粟华. 复杂约束下的编队姿态有限时间协同控制方法. 宇航学报, 2018, 39(12): 1340 – 1347.)
- [28] ZHANG G, YANG P, WANG J, et al. Multivariable finite-time control of 5 DOF upper-limb exoskeleton based on linear extended observer. *IEEE Access*, 2018, 6: 43213 – 43221.
- [29] MA X, SUN F, LI H, et al. Attitude control of rigid body with inertia uncertainty and saturation input. *Tsinghua Science and Technology*, 2017, 22(1): 83 – 91.
- [30] MAN Z H, PAPLINSKI A P, WU H R. A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2464 – 2469.

- [31] ZHANG J, BIGGS J D, YE D, et al. Finite-time attitude set-point tracking for thrust-vectoring spacecraft rendezvous. *Aerospace Science and Technology*, 2020, 96: 105588.
- [32] ZERROUG N, HARMAS M N, BENAGGOUNE S, et al. DSP-based implementation of fast terminal synergetic control for a DC-DC buck converter. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 355(5): 2329 – 2343.
- [33] CHEN Z, YUAN X, WU X, et al. Global fast terminal sliding mode controller for hydraulic turbine regulating system with actuator dead zone. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(15): 8366 – 8387.
- [34] WANG Y, JI H. Integrated relative position and attitude control for spacecraft rendezvous with ISS and finite-time convergence. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 85: 234 – 245.
- [35] HAN T, GUAN Z H, LIAO R Q, et al. Distributed finite-time formation tracking control of multi-agent systems via FTSMC approach. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(15): 2585 – 2590.
- [36] KHAN Q, AKMELIAWATI R, BHATTI A I, et al. Robust stabilization of underactuated nonlinear systems: A fast terminal sliding mode approach. *ISA Transactions*, 2017, 66: 241 – 248.
- [37] XIONG J J, ZHANG G B. Global fast dynamic terminal sliding mode control for a quadrotor UAV. *ISA Transactions*, 2017, 66: 233 – 240.
- [38] WANG H, MAN Z, KONG H, et al. Design and implementation of adaptive terminal sliding-mode control on a steer-by-wire equipped road vehicle. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(9): 5774 – 5785.
- [39] MA L, WANG S, MIN H, et al. Distributed finite-time attitude containment control of multi-rigid-body systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(5): 2187 – 2203.
- [40] CHU X, PENG Z, WEN G, et al. Robust fixed-time consensus tracking with application to formation control of unicycles. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(1): 53 – 59.
- [41] STONIER D J, STONIER R J. Obstacle avoidance and finite-time tracking of mobile targets. *The 2nd International Conference on Autonomous Robots and Agents*. Palmerston North: ICARA, 2004: 58 – 63.
- [42] ZHANG J, YE D, BIGGS J D, et al. Finite-time relative orbit-attitude tracking control for multi-spacecraft with collision avoidance and changing network topologies. *Advances in Space Research*, 2019, 63(3): 1161 – 1175.
- [43] MA R, ZHANG G, KRAUSE O. Fast terminal sliding-mode finite-time tracking control with differential evolution optimization algorithm using integral chain differentiator in uncertain nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(2): 625 – 639.
- [44] RAN D, CHEN X, SHENG T. Adaptive fuzzy fault-tolerant control for rigid spacecraft attitude maneuver with finite-time convergence. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2016, 230(5): 779 – 792.
- [45] ZHANG J, YUAN C, JIANG D, et al. Adaptive terminal sliding mode control of electromagnetic spacecraft formation flying in near-earth orbits. *Advances in Mechanical Engineering*, 2014, 6: 512583.
- [46] WU S, RADICE G, GAO Y, et al. Quaternion-based finite time control for spacecraft attitude tracking. *Acta Astronautica*, 2011, 69(1/2): 48 – 58.
- [47] YU S, YU X, SHIRINZADEH B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 2005, 41(11): 1957 – 1964.
- [48] LEE D, LEEGHIM H. Reaction wheel fault-tolerant finite-time control for spacecraft attitude tracking without unwinding. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(9): 3672 – 3691.
- [49] YAN R, WU Z. Super-twisting disturbance observer-based finite-time attitude stabilization of flexible spacecraft subject to complex disturbances. *Journal of Vibration and Control*, 2019, 25(5): 1008 – 1018.
- [50] ZHANG L, WEI C, WU R, et al. Adaptive fault-tolerant control for a VTVL reusable launch vehicle. *Acta Astronautica*, 2019, 159: 362 – 370.
- [51] SUI W S, DUAN G R, HOU M Z, et al. Distributed fixed-time attitude synchronization control for multiple rigid spacecraft. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2019, 17(5): 1117 – 1130.
- [52] ZHANG L, WEI C, WU R, et al. Fixed-time extended state observer based non-singular fast terminal sliding mode control for a VTVL reusable launch vehicle. *Aerospace Science and Technology*, 2018, 82: 70 – 79.
- [53] ROUHANI E, ERFANIAN A. A finite-time adaptive fuzzy terminal sliding mode control for uncertain nonlinear systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2018, 16(4): 1938 – 1950.
- [54] CHEN Q, XIE S, SUN M, et al. Adaptive nonsingular fixed-time attitude stabilization of uncertain spacecraft. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2018, 54(6): 2937 – 2950.
- [55] WANG Xiao, GUO Jie, TANG Shengjing, et al. Robust nonsingular Terminal sliding mode backstepping control for air-breathing hypersonic vehicles. *Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica*, 2017, 38(3): 189 – 201.
(王肖, 郭杰, 唐胜景, 等. 吸气式高超声速飞行器鲁棒非奇异Terminal滑模反步控制. 航空学报, 2017, 38(3): 189 – 201.)
- [56] HE X, WANG Q, YU W. Finite-time distributed cooperative attitude tracking control for multiple rigid spacecraft. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 256: 724 – 734.
- [57] MENG Z, REN W, YOU Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies. *Automatica*, 2010, 46(12): 2092 – 2099.
- [58] CHU Z, ZHU D, YANG S X. Observer-based adaptive neural network trajectory tracking control for remotely operated vehicle. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, 28(7): 1633 – 1645.
- [59] BOUKATTAYA M, MEZGHANI N, DAMAK T. Adaptive nonsingular fast terminal sliding-mode control for the tracking problem of uncertain dynamical systems. *ISA Transactions*, 2018, 77: 1 – 19.
- [60] MING C, WANG X, SUN R. A novel non-singular terminal sliding mode control-based integrated missile guidance and control with impact angle constraint. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 94: 105368.
- [61] XIONG Shaofeng, WANG Weihong, WANG Sen. Nonsingular fast terminal sliding-mode guidance with intercept angle constraint. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(3): 269 – 278.
(熊少锋, 王卫红, 王森. 带攻击角度约束的非奇异快速终端滑模制导律. 控制理论与应用, 2014, 31(3): 269 – 278.)
- [62] CAO L, XIAO B, GOLESTANI M. Robust fixed-time attitude stabilization control of flexible spacecraft with actuator uncertainty. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 100(3): 2505 – 2519.
- [63] ZHAI S, WEI X, YANG J. Cooperative guidance law based on time-varying terminal sliding mode for maneuvering target with unknown uncertainty in simultaneous attack. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(16): 11914 – 11938.
- [64] ZHAO L, ZHANG B, YANG H, et al. Finite-time tracking control for pneumatic servo system via extended state observer. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(16): 2808 – 2816.
- [65] CAO L, QIAO D, XU J. Suboptimal artificial potential function sliding mode control for spacecraft rendezvous with obstacle avoidance. *Acta Astronautica*, 2018, 143: 133 – 146.

- [66] ZHOU J, YANG J. Smooth sliding mode control for missile interception with finite-time convergence. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, 38(7): 1311 – 1318.
- [67] CAO L, CHEN X Q, SHENG T. Fault tolerant small satellite attitude control using adaptive non-singular terminal sliding mode. *Advances in Space Research*, 2013, 51(12): 2374 – 2393.
- [68] WANG J, LI S, YANG J, et al. Finite-time disturbance observer based non-singular terminal sliding-mode control for pulse width modulation based DC-DC buck converters with mismatched load disturbances. *IET Power Electronics*, 2016, 9(9): 1995 – 2002.
- [69] DING S, LIU L, PARK J H. A novel adaptive nonsingular terminal sliding mode controller design and its application to active front steering system. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(12): 4250 – 4269.
- [70] DING S, ZHENG W X. Nonsingular terminal sliding mode control of nonlinear second-order systems with input saturation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(9): 1857 – 1872.
- [71] XU B, ZHANG R, LI S, et al. Composite neural learning-based non-singular terminal sliding mode control of MEMS gyroscopes. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, 31(4): 1375 – 1386.
- [72] WANG H, SHI L, MAN Z, et al. Continuous fast nonsingular terminal sliding mode control of automotive electronic throttle systems using finite-time exact observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(9): 7160 – 7172.
- [73] WU Y, WANG L, ZHANG J, et al. Path following control of autonomous ground vehicle based on nonsingular terminal sliding mode and active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2019, 68(7): 6379 – 6390.
- [74] LIANG X, WANG Q, HU C, et al. Fixed-time observer based fault tolerant attitude control for reusable launch vehicle with actuator faults. *Aerospace Science and Technology*, 2020, 107: 106314.
- [75] ZHANG J, WANG H, CAO Z, et al. Fast nonsingular terminal sliding mode control for permanent-magnet linear motor via ELM. *Neural Computing and Applications*, 2020, 32(18): 14447 – 14457.
- [76] LIU Y, WANG J, TU H. Design and implementation of finite time nonsingular fast terminal sliding mode control for a novel high step-up DC-DC converter. *Energies*, 2019, 12(9): 1716.
- [77] WU R, WEI C, YANG F, et al. FxTDO-based non-singular terminal sliding mode control for second-order uncertain systems. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(18): 2459 – 2467.
- [78] FENG Y, YU X, MAN Z. Non-singular terminal sliding mode control and its application for robot manipulators. *The International Symposium on Circuits and Systems*. Sydney: IEEE, 2001, 3: 545 – 548.
- [79] FENG Yong, BAO Sheng, YU Xinghuo. Design method of non-singular terminal sliding mode control systems. *Control and Decision*, 2002, 17(2): 194 – 198.
(冯勇, 鲍晟, 余星火. 非奇异终端滑模控制系统的设计方法. 控制与决策, 2002, 17(2): 194 – 198.)
- [80] FENG Y, YU X, MAN Z. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 2002, 38(12): 2159 – 2167.
- [81] DING S, LI S. Stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with external disturbances using finite-time control techniques. *Aerospace Science and Technology*, 2009, 13(4/5): 256 – 265.
- [82] ZUO Z. Non-singular fixed-time terminal sliding mode control of non-linear systems. *IET Control Theory & Applications*, 2015, 9(4): 545 – 552.
- [83] ZUO Z. Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks. *Automatica*, 2015, 54: 305 – 309.
- [84] WU S, CHEN L, ZHANG D, et al. Disturbance observer based fixed time sliding mode control for spacecraft proximity operations with coupled dynamics. *Advances in Space Research*, 2020, 66(9): 2179 – 2193.
- [85] HUANG Y, JIA Y. Adaptive fixed-time six-DOF tracking control for noncooperative spacecraft fly-around mission. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, 27(4): 1796 – 1804.
- [86] HU Q L, JIANG B Y. Continuous finite-time attitude control for rigid spacecraft based on angular velocity observer. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2017, 54(3): 1082 – 1092.
- [87] HUANG Y, ZHU M, ZHENG Z, et al. Fixed-time autonomous ship-board landing control of a helicopter with external disturbances. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 84: 18 – 30.
- [88] ZHANG L, XU S J, JU X Z, et al. Flexible satellite control via fixed-time prescribed performance control and fully adaptive component synthesis vibration suppression. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 100(4): 3413 – 3432.
- [89] FU J, WANG J. Fixed-time coordinated tracking for second-order multi-agent systems with bounded input uncertainties. *Systems & Control Letters*, 2016, 93: 1 – 12.
- [90] HUANG Y, JIA Y. Fixed-time consensus tracking control for second-order multi-agent systems with bounded input uncertainties via NFFTSM. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(16): 2900 – 2909.
- [91] KHANZADEH A, POURGHOLI M. Fixed-time leader-follower consensus tracking of second-order multi-agent systems with bounded input uncertainties using non-singular terminal sliding mode technique. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(5): 679 – 686.
- [92] YOU M, ZONG Q, TIAN B, et al. Comprehensive design of uniform robust exact disturbance observer and fixed-time controller for reusable launch vehicles. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(5): 638 – 648.
- [93] ZHANG L, WEI C, JING L, et al. Fixed-time sliding mode attitude tracking control for a submarine-launched missile with multiple disturbances. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 93(4): 2543 – 2563.
- [94] FENG Y, YU X, HAN F. On nonsingular terminal sliding-mode control of nonlinear systems. *Automatica*, 2013, 49(6): 1715 – 1722.
- [95] LI J, DU H, CHENG Y, et al. Position tracking control for permanent magnet linear motor via fast nonsingular terminal sliding mode control. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97(4): 2595 – 2605.
- [96] MA Guangfu, ZHU Qinghua, WANG Pengyu, et al. Adaptive prescribed performance attitude tracking control for spacecraft via terminal sliding mode technique. *Acta Astronautica ET Astronautica Sinica*, 2018, 39(6): 136 – 146.
(马广富, 朱庆华, 王鹏宇, 等. 基于终端滑模的航天器自适应预设性能姿态跟踪控制. 航空学报, 2018, 39(6): 136 – 146.)
- [97] SUN J G, XU S L, SONG S M, et al. Finite-time tracking control of hypersonic vehicle with input saturation. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 71: 272 – 284.
- [98] GUO Y, SONG S M, LI X H. Quaternion-based finite-time control for attitude tracking of the spacecraft without unwinding. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2015, 13(6): 1351 – 1359.
- [99] LI A, TIAN H, WANG C. Fixed-time terminal sliding mode control of spinning tether system for artificial gravity environment in high eccentricity orbit. *Acta Astronautica*, 2020, 177: 834 – 841.
- [100] LI B, HU Q L, MA G F, et al. Fault-tolerant attitude stabilization incorporating closed-loop control allocation under actuator failure. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2018, 55(4): 1989 – 2000.

- [101] FENG Y, ZHOU M, ZHENG X, et al. Full-order terminal sliding-mode control of MIMO systems with unmatched uncertainties. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 355(2): 653 – 674.
- [102] NI J, LIU L, LIU C, et al. Fast fixed-time nonsingular terminal sliding mode control and its application to chaos suppression in power system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2016, 64(2): 151 – 155.
- [103] WANG L Y, CHAI T, ZHAI L. Neural-network-based terminal sliding-mode control of robotic manipulators including actuator dynamics. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(9): 3296 – 3304.
- [104] JIANG B Y, HU Q L, FRISWELL M I. Fixed-time attitude control for rigid spacecraft with actuator saturation and faults. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2016, 24(5): 1892 – 1898.
- [105] WANG Y, ZHU K, CHEN B, et al. Model-free continuous nonsingular fast terminal sliding mode control for cable-driven manipulators. *ISA Transactions*, 2020, 98: 483 – 495.
- [106] JI Y, LIN D, WANG W, et al. Three-dimensional terminal angle constrained robust guidance law with autopilot lag consideration. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 86: 160 – 176.
- [107] YIN L, DENG Z, HUO B, et al. Finite-time synchronization for chaotic gyros systems with terminal sliding mode control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 49(6): 1131 – 1140.
- [108] ZHAI J, SONG Z. Adaptive sliding mode trajectory tracking control for wheeled mobile robots. *International Journal of Control*, 2019, 92(10): 2255 – 2262.
- [109] LIANG K, LIN X, CHEN Y, et al. Adaptive sliding mode output feedback control for dynamic positioning ships with input saturation. *Ocean Engineering*, 2020, 206: 107245.
- [110] CHEN Q, REN X, NA J, et al. Adaptive robust finite-time neural control of uncertain PMSM servo system with nonlinear dead zone. *Neural Computing and Applications*, 2017, 28(12): 3725 – 3736.
- [111] CHEN G, SONG Y, GUAN Y. Terminal sliding mode-based consensus tracking control for networked uncertain mechanical systems on digraphs. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, 29(3): 749 – 756.
- [112] HUA C, LI J, YANG Y, et al. Extended-state-observer-based finite-time synchronization control design of teleoperation with experimental validation. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(1): 317 – 331.
- [113] YANG Y, HUA C, GUAN X. Finite time control design for bilateral teleoperation system with position synchronization error constrained. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, 46(3): 609 – 619.
- [114] TAO M, CHEN Q, HE X, et al. Adaptive fixed-time fault-tolerant control for rigid spacecraft using a double power reaching law. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(12): 4022 – 4040.
- [115] CUI B, XIA Y, LIU K, et al. Truly distributed finite-time attitude formation-containment control for networked uncertain rigid spacecraft. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 52(7): 5882 – 5896.
- [116] XU C, WU B, WANG D, et al. Distributed fixed-time output-feedback attitude consensus control for multiple spacecraft. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(6): 4779 – 4795.
- [117] ZHOU N, KAWANO Y, CAO M. Neural network-based adaptive control for spacecraft under actuator failures and input saturations. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, 31(9): 3696 – 3710.
- [118] ZHAO X, ZONG Q, TIAN B, et al. Adaptive multivariable finite-time continuous fault-tolerant control of rigid spacecraft. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(10): 2927 – 2940.
- [119] HUANG Y, JIA Y. Adaptive fixed-time relative position tracking and attitude synchronization control for non-cooperative target spacecraft fly-around mission. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(18): 8461 – 8489.
- [120] ZHOU N, XIA Y, CHEN R. Finite-time fault-tolerant coordination control for multiple Euler-Lagrange systems in obstacle environments. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(8): 3405 – 3429.
- [121] ESMAEILZADEH S M, GOLESTANI M, MOBAYEN S. Chattering-free fault-tolerant attitude control with fast fixed-time convergence for flexible spacecraft. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2021, 19(2): 767 – 776.
- [122] ZHU W, ZONG Q, TIAN B. Adaptive tracking and command shaped vibration control of flexible spacecraft. *IET Control Theory & Applications*, 2019, 13(8): 1121 – 1128.
- [123] GUO Y, SONG S M, LI X H. Terminal sliding mode control for attitude tracking of spacecraft based on rotation matrix. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015: 187924.
- [124] SI Y J, SONG S M. Adaptive reaching law based three-dimensional finite-time guidance law against maneuvering targets with input saturation. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 70: 198 – 210.
- [125] HUANG B, LI A, GUO Y, et al. Fixed-time attitude tracking control for spacecraft without unwinding. *Acta Astronautica*, 2018, 151: 818 – 827.
- [126] HAI-TAO C, SHEN-MIN S, ZHU Z B. Robust finite-time attitude tracking control of rigid spacecraft under actuator saturation. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2018, 16(1): 1 – 15.
- [127] HUANG Cheng, WANG Yan, ZHOU Naixin. Coupled attitude and position finite-time control for rendezvous and docking simulator. *Control and Decision*, 2017, 32(10): 1789 – 1795. (黄成, 王岩, 周乃新. 交会对接模拟系统姿态位置耦合有限时间控制. *控制与决策*, 2017, 32(10): 1789 – 1795.)
- [128] CHEN Haitao, SONG Shenmin, LI Xuehui. Finite-time saturated attitude tracking control for rigid spacecraft. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2017, 25(4): 536 – 543. (陈海涛, 宋申民, 李学辉. 航天器有限时间饱和姿态跟踪控制. *中国惯性技术学报*, 2017, 25(4): 536 – 543.)
- [129] GAO S, JING Y, LIU X, et al. Finite-time adaptive fault-tolerant control for rigid spacecraft attitude tracking. *Asian Journal of Control*, 2021, 23(2): 1003 – 1024.
- [130] YUJIE S I, SHENMIN S. Three-dimensional adaptive finite-time guidance law for intercepting maneuvering targets. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2017, 30(6): 1985 – 2003.
- [131] GUO Y, HUANG B, WANG S, et al. Adaptive finite-time control for attitude tracking of spacecraft under input saturation. *Journal of Aerospace Engineering*, 2018, 31(2): 04017086.
- [132] GUO Y, SONG S M, LI X H, et al. Terminal sliding mode control for attitude tracking of spacecraft under input saturation. *Journal of Aerospace Engineering*, 2017, 30(3): 06016006.
- [133] ZHAO D, LI S, GAO F. A new terminal sliding mode control for robotic manipulators. *International Journal of Control*, 2009, 82(10): 1804 – 1813.
- [134] ZHAO D, LI S, ZHU Q, et al. Robust finite-time control approach for robotic manipulators. *IET Control Theory & Applications*, 2010, 4(1): 1 – 15.
- [135] CHEN Q, TANG X, NAN Y, et al. Finite-time neural funnel control for motor servo systems with unknown input constraint. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2017, 30(3): 579 – 594.
- [136] PANWAR V. Wavelet neural network-based H_∞ trajectory tracking for robot manipulators using fast terminal sliding mode control. *Robotica*, 2017, 35(7): 1488 – 1503.

- [137] ZHANG Haibo, HU Qinglei, MA Guangfu, et al. Distributed finite-time attitude coordinated tracking control for multiple. *Control and Decision*, 2014, 29(9): 1593 – 1598.
(张海博, 胡庆雷, 马广富, 等. 多航天器系统分布式有限时间姿态协同跟踪控制. *控制与决策*, 2014, 29(9): 1593 – 1598.)
- [138] SUN Y, MA G, LIU M, et al. Distributed finite-time coordinated control for multi-robot systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2018, 40(9): 2912 – 2927.
- [139] WANG X, WANG J. Partial integrated missile guidance and control with finite time convergence. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, 36(5): 1399 – 1409.
- [140] SHEN Q, WANG D, ZHU S, et al. Finite-time fault-tolerant attitude stabilization for spacecraft with actuator saturation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, 51(3): 2390 – 2405.
- [141] SHAHNA M H, ABEDI M. An anti-unwinding finite time fault tolerant sliding mode control of a satellite based on accurate estimation of inertia moments. *ISA Transactions*, 2020, 101: 23 – 41.
- [142] ZHANG X, ZHOU Z. Integrated fault estimation and fault tolerant attitude control for rigid spacecraft with multiple actuator faults and saturation. *IET Control Theory & Applications*, 2019, 13(15): 2365 – 2375.
- [143] ZHU S, WANG D, SHEN Q, et al. Satellite attitude stabilization control with actuator faults. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2017, 40(5): 1304 – 1313.
- [144] PUKDEBOON C. Adaptive backstepping finite-time sliding mode control of spacecraft attitude tracking. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2015, 26(4): 826 – 839.
- [145] WANG C, YE D, MU Z, et al. Finite-time attitude stabilization adaptive control for spacecraft with actuator dynamics. *Sensors*, 2019, 19(24): 5568.
- [146] SONG Z, SUN K. Attitude tracking control of a quad-rotor with partial loss of rotation effectiveness. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(5): 1812 – 1821.
- [147] GAO Z, CHENG P, QIAN M, et al. Active fault-tolerant control approach design for rigid spacecraft with multiple actuator faults. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2018, 232(10): 1365 – 1378.
- [148] WEI X, YU W, WANG H, et al. An observer-based fixed-time consensus control for second-order multi-agent systems with disturbances. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2018, 66(2): 247 – 251.
- [149] MA C, LIU C, ZHANG X. Fixed-time feedback control of the hydraulic turbine governing system. *Complexity*, 2018: 8767158.
- [150] SUI S, CHEN C L P. Adaptive output-feedback finite-time stabilisation of stochastic non-linear systems with application to a two-stage chemical reactor. *IET Control Theory & Applications*, 2019, 13(4): 534 – 542.
- [151] SMAEILZADEH S M, GOLESTANI M. A finite-time adaptive robust control for a spacecraft attitude control considering actuator fault and saturation with reduced steady-state error. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2019, 41(4): 1002 – 1009.
- [152] HUANG C, ZHANG X, ZHANG G. Improved decentralized finite-time formation control of underactuated USVs via a novel disturbance observer. *Ocean Engineering*, 2019, 174: 117 – 124.
- [153] ZHANG G, DENG Y, ZHANG W. Robust neural path-following control for underactuated ships with the DVS obstacles avoidance guidance. *Ocean Engineering*, 2017, 143: 198 – 208.
- [154] XIAO B, YIN S, KAYNAK O. Tracking control of robotic manipulators with uncertain kinematics and dynamics. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(10): 6439 – 6449.
- [155] YUN Y, GUO J, TANG S. Robust smooth Sliding-Mode-Based controller with fixed-time convergence for missiles considering aerodynamic uncertainty. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2018, DOI: 10.1155/2018/9875462.
- [156] WARIER R R, SANYAL A K, VISWANATHAN S P. Finite time stable attitude estimation of rigid bodies with unknown dynamics. *Asian Journal of Control*, 2019, 21(4): 1522 – 1530.
- [157] SONG Z, LI H, SUN K. Finite-time control for nonlinear spacecraft attitude based on terminal sliding mode technique. *ISA Transactions*, 2014, 53(1): 117 – 124.
- [158] QIAO L, ZHANG W. Double-loop integral terminal sliding mode tracking control for UUVs with adaptive dynamic compensation of uncertainties and disturbances. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2018, 44(1): 29 – 53.
- [159] HU Q L, YU Y, LI B, et al. Finite-time attitude tracking control for spacecraft with uncertain actuator configuration. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2015, 229(13): 2457 – 2468.
- [160] LU Y, HUANG P, MENG Z, et al. Finite time attitude takeover control for combination via tethered space robot. *Acta Astronautica*, 2017, 136: 9 – 21.
- [161] GAO Z, ZHOU Z, JIANG G, et al. Active fault tolerant control scheme for satellite attitude systems: Multiple actuator faults case. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2018, 16(4): 1794 – 1804.
- [162] GUO J G, LIU Y C, JUN Z. Integral terminal sliding mode control for nonlinear systems. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2018, 29(3): 571 – 579.
- [163] QIAO J, ZHANG D, ZHU Y, et al. Disturbance observer-based finite-time attitude maneuver control for micro satellite under actuator deviation fault. *Aerospace Science and Technology*, 2018, 82: 262 – 271.
- [164] HU Q L, SHAO X D. Smooth finite-time fault-tolerant attitude tracking control for rigid spacecraft. *Aerospace Science and Technology*, 2016, 55: 144 – 157.
- [165] GUO Y, SONG S. Adaptive finite-time backstepping control for attitude tracking of spacecraft based on rotation matrix. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2014, 27(2): 375 – 382.
- [166] GUO Y, GUO J, SONG S. Backstepping control for attitude tracking of the spacecraft under input saturation. *Acta Astronautica*, 2017, 138: 318 – 325.
- [167] YANG Y, HUA C, LI J, et al. Fixed-time coordination control for bilateral telerobotics system with asymmetric time-varying delays. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2017, 86(3/4): 447 – 466.
- [168] ZHAO D, LI S, ZHU Q, et al. Robust finite-time control approach for robotic manipulators. *IET Control Theory & Applications*, 2010, 4(1): 1 – 15.
- [169] MOKHTARI M R, CHERKI B. A new robust control for mini-robotcraft unmanned aerial vehicles. *ISA Transactions*, 2015, 56: 86 – 101.
- [170] CHEN C, ZHANG C, HU T, et al. Finite-time tracking control for uncertain robotic manipulators using backstepping method and novel extended state observer. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2019, 16(3): 1729881419844655.
- [171] WU D, CHEN M, GONG H. Robust control of post-stall pitching maneuver based on finite-time observer. *ISA Transactions*, 2017, 70: 53 – 63.
- [172] LIU H, ZHANG T. Adaptive neural network finite-time control for uncertain robotic manipulators. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2014, 75(3): 363 – 377.
- [173] LIU H, TIAN X, WANG G, et al. Robust H_∞ finite-time stability control of a class of nonlinear systems. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(7/8): 5111 – 5122.

- [174] WANG Y, TANG S, GUO J, et al. Fuzzy-logic-based fixed-time geometric backstepping control on SO(3) for spacecraft attitude tracking. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2019, 55(6): 2938 – 2950.
- [175] SUN J, YI J, PU Z, et al. Fixed-time sliding mode disturbance observer-based nonsmooth backstepping control for hypersonic vehicles. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 50(11): 4377 – 4386.
- [176] SHAHVALI M, NAGHIBI-SISTANI M B, ASKARI J. Adaptive output-feedback bipartite consensus for nonstrict-feedback nonlinear multi-agent systems: A finite-time approach. *Neurocomputing*, 2018, 318: 7 – 17.
- [177] YOU M, ZONG Q, ZUO L, et al. Multivariable supertwisting fixed-time approach for RLV re-entry attitude control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(4): 973 – 989.
- [178] DONG Q, ZONG Q, TIAN B, et al. Adaptive-gain multivariable super-twisting sliding mode control for reentry RLV with torque perturbation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(4): 620 – 638.
- [179] DONG Q, ZONG Q, TIAN B, et al. Integrated finite-time disturbance observer and controller design for reusable launch vehicle in reentry phase. *Journal of Aerospace Engineering*, 2017, 30(1): 04016076.
- [180] YI S, WANG J, LI B. Composite backstepping control with finite-time convergence. *Optik*, 2017, 142: 260 – 272.
- [181] HUSSIAN A, ZHAO X, ZONG G. Finite-time exact tracking control for a class of non-linear dynamical systems. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(12): 2020 – 2027.
- [182] LI J, YANG Y, HUA C, et al. Fixed-time backstepping control design for high-order strict-feedback non-linear systems via terminal sliding mode. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(8): 1184 – 1193.
- [183] CHENG C C, CHIANG Y C. Design of non-singular adaptive terminal backstepping controllers with perturbation estimation for non-linear systems in semi-strict feedback form. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(10): 1589 – 1595.
- [184] GAO Z, GUO G. Command-filtered fixed-time trajectory tracking control of surface vehicles based on a disturbance observer. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(13): 4348 – 4365.
- [185] LI Y, LI K, TONG S. Finite-time adaptive fuzzy output feedback dynamic surface control for MIMO nonstrict feedback systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 27(1): 96 – 110.
- [186] XU P, LI Y, TONG S. Fuzzy adaptive finite time fault-tolerant control for multi-input and multi-output nonlinear systems with actuator faults. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2019, 17(7): 1655 – 1665.
- [187] YU Z, YANG Y, LI S, et al. Observer-based adaptive finite-time quantized tracking control of nonstrict-feedback nonlinear systems with asymmetric actuator saturation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 50(11): 4545 – 4556.
- [188] LÜW, WANG F, LI Y. Finite-time adaptive fuzzy output-feedback control of MIMO nonlinear systems with hysteresis. *Neurocomputing*, 2018, 296: 74 – 81.
- [189] WANG F, CHEN B, LIN C, et al. Adaptive neural network finite-time output feedback control of quantized nonlinear systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 48(6): 1839 – 1848.
- [190] WANG F, ZHANG L L, ZHOU S, et al. Neural network-based finite-time control of quantized stochastic nonlinear systems. *Neurocomputing*, 2019, 362: 195 – 202.
- [191] ZHAO S, LIANG H, DU P, et al. Adaptive NN finite-time tracking control of output constrained nonlinear system with input saturation. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 92(4): 1845 – 1856.
- [192] LIN W, QIAN C. Adding one power integrator: A tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems. *Systems & Control Letters*, 2000, 39(5): 339 – 351.
- [193] HUANG X, LIN W, YANG B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 2005, 41(5): 881 – 888.
- [194] ZHANG L, WANG Z, LI S, et al. Universal finite-time observer based second-order sliding mode control for DC-DC buck converters with only output voltage measurement. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(16): 11863 – 11879.
- [195] CHENG Y, JIN Q, DU H, et al. Observer-based finite-time output-feedback controller for DC-DC buck converters with unknown load variations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(15): 5274 – 5289.
- [196] HU Q L, JIANG B Y, FRISWELL M I. Robust saturated finite time output feedback attitude stabilization for rigid spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and dynamics*, 2014, 37(6): 1914 – 1929.
- [197] ZHANG L, XIA Y, CUI B, et al. Finite-time cooperative attitude control for leader-follower spacecraft with fixed-time observer. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(17): 7013 – 7030.
- [198] YAO Q. Robust adaptive finite-time attitude tracking control of a 3D pendulum with external disturbance: Numerical simulations and hardware experiments. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102(1): 223 – 239.
- [199] ZOU A M, KUMAR K D. Finite-time attitude control for rigid spacecraft subject to actuator saturation. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 96(2): 1017 – 1035.
- [200] ZHAO L, YU J, YU H. Adaptive finite-time attitude tracking control for spacecraft with disturbances. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2017, 54(3): 1297 – 1305.
- [201] WANG Y, SONG Y, KRSTIC M. Collectively rotating formation and containment deployment of multiagent systems: A polar coordinate-based finite time approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 47(8): 2161 – 2172.
- [202] WU J, LI J, ZONG G, et al. Global finite-time adaptive stabilization of nonlinearly parametrized systems with multiple unknown control directions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2016, 47(7): 1405 – 1414.
- [203] LIU W, HO D W C, XU S, et al. Adaptive finite-time stabilization of a class of quantized nonlinearly parameterized systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(18): 4554 – 4573.
- [204] YANG J, DING Z. Global output regulation for a class of lower triangular nonlinear systems: A feedback domination approach. *Automatica*, 2017, 76: 65 – 69.
- [205] ZHAO L, JIA Y, YU J. Adaptive finite-time bipartite consensus for second-order multi-agent systems with antagonistic interactions. *Systems & Control Letters*, 2017, 102: 22 – 31.
- [206] DU H, WEN G, CHEN G, et al. A distributed finite-time consensus algorithm for higher-order leaderless and leader-following multiagent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 47(7): 1625 – 1634.
- [207] WANG Y, SONG Y, KRSTIC M, et al. Fault-tolerant finite time consensus for multiple uncertain nonlinear mechanical systems under single-way directed communication interactions and actuation failures. *Automatica*, 2016, 63: 374 – 383.
- [208] WANG H, ZHU Q. Finite-time stabilization of high-order stochastic nonlinear systems in strict-feedback form. *Automatica*, 2015, 54: 284 – 291.
- [209] FU J, MA R, CHAI T. Global finite-time stabilization of a class of switched nonlinear systems with the powers of positive odd rational numbers. *Automatica*, 2015, 54: 360 – 373.

- [210] SUN Z Y, XUE L R, ZHANG K. A new approach to finite-time adaptive stabilization of high-order uncertain nonlinear system. *Automatica*, 2015, 58: 60 – 66.
- [211] LU Q, HAN Q L, XIE X, et al. A finite-time motion control strategy for odor source localization. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(10): 5419 – 5430.
- [212] KHOO S, YIN J, MAN Z, et al. Finite-time stabilization of stochastic nonlinear systems in strict-feedback form. *Automatica*, 2013, 49(5): 1403 – 1410.
- [213] DING S, QIAN C, LI S. Global stabilization of a class of feedforward systems with lower-order nonlinearities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(3): 691 – 696.
- [214] GENG J, SHENG Y, LIU X. Finite-time sliding mode attitude control for a reentry vehicle with blended aerodynamic surfaces and a reaction control system. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2014, 27(4): 964 – 976.
- [215] GUI H, VUKOVICH G. Adaptive integral sliding mode control for spacecraft attitude tracking with actuator uncertainty. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(12): 5832 – 5852.
- [216] WANG L, SONG Z, LIU X, et al. Continuous finite-time integral sliding mode control for attitude stabilization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, 67(10): 2084 – 2088.
- [217] DU H, YU B, WEI J, et al. Attitude trajectory planning and attitude control for quad-rotor aircraft based on finite-time control technique. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, 386: 125493.
- [218] CHENG Y, DU H, YANG C, et al. Fast adaptive finite-time voltage regulation control algorithm for a buck converter system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2016, 64(9): 1082 – 1086.
- [219] CHEN T, WEN H, HU H, et al. Distributed finite-time tracking for a team of planar flexible spacecraft. *ISA Transactions*, 2017, 69: 214 – 221.
- [220] GUI H, VUKOVICH G. Distributed almost global finite-time attitude consensus of multiple spacecraft without velocity measurements. *Aerospace Science and Technology*, 2018, 75: 284 – 296.
- [221] ZAVALA-RIO A, ZAMORA-GOMEZ G. Local-homogeneity-based global continuous control for mechanical systems with constrained inputs: Finite-time and exponential stabilisation. *International Journal of Control*, 2017, 90(5): 1037 – 1051.
- [222] SU Y, ZHENG C, MERCORELLI P. Global finite-time stabilization of planar linear systems with actuator saturation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2016, 64(8): 947 – 951.
- [223] GUI H, WANG Y, SU W. Hybrid global finite-time dual-quaternion observer and controller for velocity-free spacecraft pose tracking. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2020, 29(5): 2129 – 2141.
- [224] YU S, LONG X, GUO G. Homogeneous finite-time consensus tracking of high-order-integrator agents by parametric approach. *International Journal of Control*, 2017, 90(12): 2655 – 2666.
- [225] CHENG Yingying, DU Haibo, HE Yigang. Finite-time attitude stabilization of a rigid spacecraft under input saturation. *Control and Decision*, 2015, 30(8): 1386 – 1392.
(程盈盈, 都海波, 何怡刚. 输入饱和和受限下的刚体飞行器姿态系统的有限时间镇定. *控制与决策*, 2015, 30(8): 1386 – 1392.)
- [226] DING S, LEVANT A, LI S. Simple homogeneous sliding-mode controller. *Automatica*, 2016, 67: 22 – 32.
- [227] GUI H, VUKOVICH G. Global finite-time attitude tracking via quaternion feedback. *Systems & Control Letters*, 2016, 97: 176 – 183.
- [228] DU H, ZHU W, WEN G, et al. Finite-time formation control for a group of quadrotor aircraft. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 69: 609 – 616.
- [229] GUI H, DE RUITER A H J. Adaptive fault-tolerant spacecraft pose tracking with control allocation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017, 27(2): 479 – 494.
- [230] GUI H, DE RUITER A H J. Global finite-time attitude consensus of leader-following spacecraft systems based on distributed observers. *Automatica*, 2018, 91: 225 – 232.
- [231] ZHOU Y, ZHU W, DU H. Global finite-time attitude regulation using bounded feedback for a rigid spacecraft. *Control Theory and Technology*, 2017, 15(1): 26 – 33.
- [232] ZHU W, DU H, CHENG Y, et al. Hovering control for quadrotor aircraft based on finite-time control algorithm. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88(4): 2359 – 2369.
- [233] LYU J, QIN J, MA Q, et al. Finite-time attitude synchronisation for multiple spacecraft. *IET Control Theory & Applications*, 2016, 10(10): 1106 – 1114.
- [234] GE M F, GUAN Z H, YANG C, et al. Time-varying formation tracking of multiple manipulators via distributed finite-time control. *Neurocomputing*, 2016, 202: 20 – 26.
- [235] GUI H, JIN L, XU S. Simple finite-time attitude stabilization laws for rigid spacecraft with bounded inputs. *Aerospace Science and Technology*, 2015, 42: 176 – 186.
- [236] ZAVALA-RIO A, FANTONI I. Global finite-time stability characterized through a local notion of homogeneity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 59(2): 471 – 477.
- [237] GOLESTANI M, MOHAMMADZAMAN I, YAZDANPANAH M J. Robust finite-time stabilization of uncertain nonlinear systems based on partial stability. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(1): 87 – 96.
- [238] WU F, DING J, WANG Z. Robust finite-time terminal sliding mode control for a Francis hydroturbine governing system. *Journal of Control Science and Engineering*, 2016: 2518734.
- [239] GALICKI M. Finite-time trajectory tracking control in a task space of robotic manipulators. *Automatica*, 2016, 67: 165 – 170.
- [240] SU Y, ZHENG C. A new nonsingular integral terminal sliding mode control for robot manipulators. *International Journal of Systems Science*, 2020, 51(8): 1418 – 1428.
- [241] SONG J, SONG S. Three-dimensional guidance law based on adaptive integral sliding mode control. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2016, 29(1): 202 – 214.
- [242] FU J, WANG J. Observer-based finite-time coordinated tracking for general linear multi-agent systems. *Automatica*, 2016, 66: 231 – 237.
- [243] YANG Y, HUA C, GUAN X. Multi-manipulators coordination for bilateral teleoperation system using fixed-time control approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(18): 5667 – 5687.
- [244] GAO J, CAI Y. Adaptive finite-time control for attitude tracking of rigid spacecraft. *Journal of Aerospace Engineering*, 2016, 29(4): 04016016.
- [245] GUI H, VUKOVICH G. Adaptive fault-tolerant spacecraft attitude control using a novel integral terminal sliding mode. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(16): 3174 – 3196.
- [246] GALICKI M. Constraint finite-time control of redundant manipulators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(4): 639 – 660.
- [247] ZHU W, CHEN D, DU H, et al. Position control for permanent magnet synchronous motor based on neural network and terminal sliding mode control. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2020, 42(9): 1632 – 1640.
- [248] TIAN B, ZUO Z, WANG H. Leader-follower fixed-time consensus of multi-agent systems with high-order integrator dynamics. *International Journal of Control*, 2017, 90(7): 1420 – 1427.

- [249] ZUO Z, TIAN B, DEFOORT M, et al. Fixed-time consensus tracking for multiagent systems with high-order integrator dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 63(2): 563 – 570.
- [250] ZHOU J, CHENG Y, DU H, et al. Active finite-time disturbance rejection control for attitude tracking of quad-rotor under input saturation. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(16): 11153 – 11170.
- [251] SUI W, DUAN G, HOU M, et al. Distributed fixed-time attitude coordinated tracking for multiple rigid spacecraft via a novel integral sliding mode approach. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(14): 9399 – 9422.
- [252] YU X, LIP, ZHANG Y. The design of fixed-time observer and finite-time fault-tolerant control for hypersonic gliding vehicles. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 65(5): 4135 – 4144.
- [253] CHENG Y, JIA R, DU H, et al. Robust finite-time consensus formation control for multiple nonholonomic wheeled mobile robots via output feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(6): 2082 – 2096.
- [254] ZHAO L, ZHANG B, YANG H, et al. Observer-based integral sliding mode tracking control for a pneumatic cylinder with varying loads. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 50(7): 2650 – 2658.
- [255] FANG X, LIU F. High-order mismatched disturbance rejection control for small-scale unmanned helicopter via continuous nonsingular terminal sliding-mode approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(4): 935 – 948.
- [256] WANG G, CHEN C, YU S. Finite-time sliding mode tracking control for active suspension systems via extended super-twisting observer. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2017, 231(6): 459 – 470.
- [257] GUO Zhenyuan. *Theory of differential equations with discontinuous righthand sides and its applications*. Changsha: Hunan University, 2011.
(郭振远. 右端不连续微分方程理论及其应用. 长沙: 湖南大学, 2011.)
- [258] LEVANT A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 1993, 58(6): 1247 – 1263.
- [259] MORENO J A. A Lyapunov approach to output feedback control using second-order sliding modes. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2012, 29(3): 291 – 308.
- [260] TORRES-GONZALEZ V, SANCHEZ T, FRIDMAN L M, et al. Design of continuous twisting algorithm. *Automatica*, 2017, 80: 119 – 126.
- [261] GOEL A, SWARUP A. MIMO uncertain nonlinear system control via adaptive high-order super twisting sliding mode and its application to robotic manipulator. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 2017, 28(1): 36 – 49.
- [262] KAMAL S, MORENO J A, CHALANGA A, et al. Continuous terminal sliding-mode controller. *Automatica*, 2016, 69: 308 – 314.
- [263] HONG Y, HHUANG J, XU Y. On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(2): 305 – 309.
- [264] BASIN M V, YU P, SHTESSEL Y B. Hypersonic missile adaptive sliding mode control using finite- and fixed-time observers. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 65(1): 930 – 941.
- [265] LYU T, LI C, GUO Y, et al. Three-dimensional finite-time cooperative guidance for multiple missiles without radial velocity measurements. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2019, 32(5): 1294 – 1304.
- [266] CHENG Y, DU H, HE Y, et al. Robust finite-time synchronization of coupled harmonic oscillations with external disturbance. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(10): 4366 – 4381.
- [267] PERRUQUETTI W, FLOQUET T, MOULAY E. Finite-time observers: Application to secure communication. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(1): 356 – 360.
- [268] WU D, CHENG Y, DU H, et al. Finite-time output feedback tracking control for a nonholonomic wheeled mobile robot. *Aerospace Science and Technology*, 2018, 78: 574 – 579.
- [269] ZHAO Y, DUAN Z, WEN G, et al. Distributed finite-time tracking control for multi-agent systems: An observer-based approach. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(1): 22 – 28.
- [270] WANG X, SUN X, LI S, et al. Output feedback domination approach for finite-time force control of an electrohydraulic actuator. *IET Control Theory & Applications*, 2012, 6(7): 921 – 934.
- [271] WANG X, LI G, LI S, et al. Finite-time output feedback control for a pneumatic servo system. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2016, 38(12): 1520 – 1534.
- [272] ZOU A M, DE RUITER A H J, KUMAR K D. Finite-time attitude tracking control for rigid spacecraft with control input constraints. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(7): 931 – 940.
- [273] DU H, CHENG Y, HE Y, et al. Finite-time output feedback control for a class of second-order nonlinear systems with application to DC-DC buck converters. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(3): 2021 – 2030.
- [274] DU H, LI S. Semi-global finite-time attitude stabilization by output feedback for a rigid spacecraft. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2013, 227(12): 1881 – 1891.
- [275] HU Q L, ZHANG J. Bounded finite-time coordinated attitude control via output feedback for spacecraft formation. *Journal of Aerospace Engineering*, 2015, 28(5): 04014129.
- [276] SUN S, ZHAO L, JIA Y. Finite-time output feedback attitude stabilization for rigid spacecraft with input constraints. *IET Control Theory & Applications*, 2016, 10(14): 1740 – 1750.
- [277] GUI H, VUKOVICH G. Finite-time angular velocity observers for rigid-body attitude tracking with bounded inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(1): 15 – 38.
- [278] GAO T, HUANG J, ZHOU Y, et al. Finite-time consensus control of second-order nonlinear systems with input saturation. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2016, 38(11): 1381 – 1391.
- [279] XU C, WU B, WANG D, et al. Distributed fixed-time output-feedback attitude consensus control for multiple spacecraft. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(6): 4779 – 4795.
- [280] SHEN Y, XIA X. Semi-global finite-time observers for nonlinear systems. *Automatica*, 2008, 44(12): 3152 – 3156.
- [281] SHEN Yanjun, LIU Wanhai, ZHANG Yong. Global finite-time observers for a class of nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(5): 668 – 674.
(沈艳军, 刘万海, 张勇. 一类非线性系统全局有限时间观测器设计. 控制理论与应用, 2010, 27(5): 668 – 674.)
- [282] XIA G, LIU C, ZHAO B, et al. Finite time output feedback control for ship dynamic positioning assisted mooring positioning system with disturbances. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2019, 17(11): 2948 – 2960.
- [283] SANCHEZ T, MORENO J A. Homogeneous output-feedback control with disturbance-observer for a class of nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31(9): 3686 – 3707.
- [284] RAN D, DE RUITER A H J, YAO W, et al. Distributed and reliable output feedback control of spacecraft formation with velocity constraints and time delays. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2019, 24(6): 2541 – 2549.

- [285] ZHAO Z L, JIANG Z P. Semi-global finite-time output-feedback stabilization with an application to robotics. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 66(4): 3148 – 3156.
- [286] FU M, YU L. Finite-time extended state observer-based distributed formation control for marine surface vehicles with input saturation and disturbances. *Ocean Engineering*, 2018, 159: 219 – 227.
- [287] HE S, LIN D. Reliable spacecraft rendezvous without velocity measurement. *Acta Astronautica*, 2018, 144: 52 – 60.
- [288] ZHAO Z L, JIANG Z P. Finite-time output feedback stabilization of lower-triangular nonlinear systems. *Automatica*, 2018, 96: 259 – 269.
- [289] HU Q L, NIU G. Attitude output feedback control for rigid spacecraft with finite-time convergence. *ISA Transactions*, 2017, 70: 173 – 186.
- [290] ZOU A M, DE RUITER A H J, KUMAR K D. Finite-time output feedback attitude control for rigid spacecraft under control input saturation. *Journal of the Franklin Institute*, 2016, 353(17): 4442 – 4470.
- [291] ZOU A M, DE RUITER A H J, KUMAR K D. Distributed finite-time velocity-free attitude coordination control for spacecraft formations. *Automatica*, 2016, 67: 46 – 53.
- [292] ZOU A M. Finite-time output feedback attitude tracking control for rigid spacecraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, 22(1): 338 – 345.
- [293] LI Y, XIA X, SHEN Y. A high-gain-based global finite-time nonlinear observer. *International Journal of Control*, 2013, 86(5): 759 – 767.
- [294] DU H, QIAN C, YANG S, et al. Recursive design of finite-time convergent observers for a class of time-varying nonlinear systems. *Automatica*, 2013, 49(2): 601 – 609.
- [295] SHEN Y, HUANG Y, GU J. Global finite-time observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 56(2): 418 – 424.
- [296] SHEN Y, SHEN W, JIANG M, et al. Semi-global finite-time observers for multi-output nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010, 7(20): 789 – 801.
- [297] MENARD T, MOULAY E, PERRUQUETTI W. A global high-gain finite-time observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(6): 1500 – 1506.
- [298] SHEN Y, HUANG Y. Uniformly observable and globally Lipschitzian nonlinear systems admit global finite-time observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(11): 2621 – 2625.
- [299] LEVANT A. Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, 2007, 43(4): 576 – 586.
- [300] MORENO J A, OSORIO M. Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(4): 1035 – 1040.
- [301] MENG Z, LIN Z. On distributed finite-time observer design and finite-time coordinated tracking of multiple double integrator systems via local interactions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(16): 2473 – 2489.
- [302] ORLOV Y, Aoustin Y, CHEVALLEREAU C. Finite time stabilization of a perturbed double integrator-Part I: Continuous sliding mode-based output feedback synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 56(3): 614 – 618.
- [303] DEFOORT M, DJEMAI M, FLOQUET T, et al. Robust finite time observer design for multicellular converters. *International Journal of Systems Science*, 2011, 42(11): 1859 – 1868.
- [304] APAZA-PEREZ W A, MORENO J A, FRIDMAN L. Global sliding mode observers for some uncertain mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 65(3): 1348 – 1355.
- [305] ZHANG X, ZONG Q, TIAN B, et al. Continuous robust fault-tolerant control and vibration suppression for flexible spacecraft without angular velocity. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(12): 3915 – 3935.
- [306] HU Q L, ZHANG J, ZHANG Y. Velocity-free attitude coordinated tracking control for spacecraft formation flying. *ISA Transactions*, 2018, 73: 54 – 65.
- [307] APAZA-PEREZ W A, MORENO J A, FRIDMAN L M. Dissipative approach to sliding mode observers design for uncertain mechanical systems. *Automatica*, 2018, 87: 330 – 336.
- [308] NEGRETE-CHAVEZ D Y, MORENO J A. Second-order sliding mode output feedback controller with adaptation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2016, 30(8/10): 1523 – 1543.
- [309] HUA C, SUN X, YOU X, et al. Finite-time consensus control for second-order multi-agent systems without velocity measurements. *International Journal of Systems Science*, 2017, 48(2): 337 – 346.
- [310] MENON P P, EDWARDS C, PAULINO N M G. Observer-based controller design with disturbance feedforward framework for formation control of satellites. *IET Control Theory & Applications*, 2015, 9(8): 1285 – 1293.
- [311] MU C, SUN C. A new finite time convergence condition for super-twisting observer based on Lyapunov analysis. *Asian Journal of Control*, 2015, 17(3): 1050 – 1060.
- [312] GUZMAN E, MORENO J A. Super-twisting observer for second-order systems with time-varying coefficient. *IET Control Theory & Applications*, 2015, 9(4): 553 – 562.
- [313] HU Q L, JIANG B Y, ZHANG Y M. Observer-based output feedback attitude stabilization for spacecraft with finite-time convergence. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017, 27(2): 781 – 789.
- [314] CUI B, XIA Y, LIU K, et al. Velocity-observer-based distributed finite-time attitude tracking control for multiple uncertain rigid spacecraft. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2019, 16(4): 2509 – 2519.
- [315] LIANG K, LIN X, CHEN Y, et al. Adaptive sliding mode output feedback control for dynamic positioning ships with input saturation. *Ocean Engineering*, 2020, 206: 107245.
- [316] LIU H, ZHANG T, TIAN X. Continuous output-feedback finite-time control for a class of second-order nonlinear systems with disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(2): 218 – 234.
- [317] WANG X, LIN H. Design and frequency analysis of continuous finite-time-convergent differentiator. *Aerospace Science and Technology*, 2012, 18(1): 69 – 78.
- [318] DALY J M, WANG D W L. Output feedback sliding mode control in the presence of unknown disturbances. *Systems & Control Letters*, 2009, 58(3): 188 – 193.
- [319] TAN C P, YU X, MAN Z. Terminal sliding mode observers for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 2010, 46(8): 1401 – 1404.
- [320] YU H, GUO C, SHEN Z, et al. Output feedback spatial trajectory tracking control of underactuated unmanned undersea vehicles. *IEEE Access*, 2020, 8: 42924 – 42936.
- [321] YANG Y, HUA C, LI J, et al. Finite-time output-feedback synchronization control for bilateral teleoperation system via neural networks. *Information Sciences*, 2017, 406: 216 – 233.
- [322] YANG L, LI J. Robust output feedback control with disturbance estimation for piezoelectric actuators. *Neurocomputing*, 2016, 173: 2129 – 2135.
- [323] ZHAO D, ZHU Q, DUBBELDAM J. Terminal sliding mode control for continuous stirred tank reactor. *Chemical Engineering Research and Design*, 2015, 94: 266 – 274.

- [324] CHU Z, ZHANG M. Fault reconstruction of thruster for autonomous underwater vehicle based on terminal sliding mode observer. *Ocean Engineering*, 2014, 88: 426 – 434.
- [325] ZHAO D, LI S, ZHU Q. Output feedback terminal sliding mode control for a class of second order nonlinear systems. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(1): 237 – 247.
- [326] YU Di, WU Qinghe. Finite time robust containment control of second order directed networks. *Control and Decision*, 2012, 27(10): 1465 – 1470.
(于镛, 伍清河. 二阶有向网络的鲁棒有限时间包容控制. *控制与决策*, 2012, 27(10): 1465 – 1470.)
- [327] DAI G, MENG S, WEI Y, et al. Finite-time attitude control of spacecraft. *The 24th Chinese Control and Decision Conference*. Taiyuan, China: IEEE, 2012: 397 – 1401.
- [328] GAO Dai, LÜ Jianing, WANG Benli. Finite-time output feedback attitude control of spacecraft. *Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica*, 2012, 33(11): 2074 – 2081.
(高岱, 吕建婷, 王本利. 航天器有限时间输出反馈姿态控制. *航空学报*, 2012, 33(11): 2074 – 2081.)
- [329] PAN H, SUN W. Nonlinear output feedback finite-time control for vehicle active suspension systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, 15(4): 2073 – 2082.
- [330] ZHENG Y, ZHU Y, WANG L. Finite-time consensus of multiple second-order dynamic agents without velocity measurements. *International Journal of Systems Science*, 2014, 45(3): 579 – 588.
- [331] LYU J, QIN J, GAO D, et al. Consensus for constrained multi-agent systems with input saturation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(14): 2977 – 2993.
- [332] GUI H, VUKOVICH G. Finite-time output-feedback position and attitude tracking of a rigid body. *Automatica*, 2016, 74: 270 – 278.
- [333] ZAMORA-GOMEZ G I, ZAVALA-RIO A, LOPEZ-ARAUJO D J, et al. Further advancements on the output-feedback global continuous control for the finite-time and exponential stabilisation of bounded-input mechanical systems: Desired conservative-force compensation and experiments. *International Journal of Control*, 2020, 93(7): 1521 – 1533.
- [334] XIA Y, SU Y. Saturated output feedback control for finite-time attitude stabilization of spacecraft. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2020, 234(23): 4557 – 4571.
- [335] HU Q L, ZHANG J, FRISWELL M I. Finite-time coordinated attitude control for spacecraft formation flying under input saturation. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2015, 137(6): 061012.
- [336] GUO Y, SONG S M, LI X H, et al. Finite-time output feedback control for the attitude of the spacecraft without unwinding. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2018, 232(8): 1421 – 1433.
- [337] HUANG Y, JIA Y. Distributed finite-time output feedback synchronisation control for six DOF spacecraft formation subject to input saturation. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(4): 532 – 542.
- [338] HU Q L, ZHANG J. Relative position finite-time coordinated tracking control of spacecraft formation without velocity measurements. *ISA Transactions*, 2015, 54: 60 – 74.
- [339] ZAMORA-GOMEZ G I, ZAVALA-RIO A, LOPEZ-ARAUJO D J. Observer-less output-feedback global continuous control for the finite-time and exponential stabilization of mechanical systems with constrained inputs. *European Journal of Control*, 2017, 36: 30 – 42.
- [340] WANG H, SU Y, ZHANG L. Global output feedback finite-time regulation of robot manipulators under actuator constraints. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2017, 139(6): 064501.
- [341] GUO Y, GUO J, LI A, et al. Attitude coordination control for formation flying spacecraft based on the rotation matrix. *Journal of Aerospace Engineering*, 2017, 30(5): 04017051.
- [342] ZHAO Y, DUAN Z, WEN G. Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with saturated control protocols. *IET Control Theory & Applications*, 2015, 9(3): 312 – 319.
- [343] ZHANG B, JIA Y, MATSUNO F. Finite-time observers for multi-agent systems without velocity measurements and with input saturations. *Systems & Control Letters*, 2014, 68: 86 – 94.
- [344] QIAN C, LI J. Global finite-time stabilization by output feedback for planar systems without observable linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(6): 885 – 890.
- [345] JIANG B Y, LI C J, MA G F. Finite-time output feedback attitude control for spacecraft using “Adding a power integrator” technique. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 66: 342 – 354.
- [346] GAO F, ZHU X, WU Y, et al. Reduced-order observer-based saturated finite-time stabilization of high-order feedforward nonlinear systems by output feedback. *ISA Transactions*, 2019, 93: 70 – 79.
- [347] WANG X, XIANG Z. Global finite-time stabilisation for a class of nonlinear systems in the p-normal form via output feedback. *International Journal of Systems Science*, 2020, 51(9): 1604 – 1621.
- [348] WANG X, HUANG S, XIANG Z. Output feedback finite-time stabilization of a class of nonlinear time-delay systems in the p-normal form. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(11): 4418 – 4432.
- [349] WANG J, ZHANG C, LI S, et al. Finite-time output feedback control for PWM-based DC-DC buck power converters of current sensorless mode. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2016, 25(4): 1359 – 1371.
- [350] LI D, CAO J. Global finite-time output feedback synchronization for a class of high-order nonlinear systems. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 82(1): 1027 – 1037.
- [351] LI F, LIU Y. Global finite-time stabilization via time-varying output-feedback for uncertain nonlinear systems with unknown growth rate. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(17): 4050 – 4070.
- [352] GAO F, WU Y, ZHANG Z. Finite-time stabilization of uncertain nonholonomic systems in feedforward-like form by output feedback. *ISA Transactions*, 2015, 59: 125 – 132.
- [353] LAN Q, LI S, KHOO S, et al. Global finite-time stabilisation for a class of stochastic nonlinear systems by output feedback. *International Journal of Control*, 2015, 88(3): 494 – 506.
- [354] GAO F, WU Y, YUAN F. Global output feedback stabilisation of high-order nonlinear systems with multiple time-varying delays. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(10): 2382 – 2392.
- [355] ZHANG X H, ZHANG K, XIE X J. Finite-time output feedback stabilization of nonlinear high-order feedforward systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(8): 1794 – 1814.
- [356] GAO F, WU Y. Global stabilisation for a class of more general high-order time-delay nonlinear systems by output feedback. *International Journal of Control*, 2015, 88(8): 1540 – 1553.
- [357] DU H, LI S, LIN X. Finite-time formation control of multiagent systems via dynamic output feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 23(14): 1609 – 1628.
- [358] LI J, QIAN C, DING S. Global finite-time stabilisation by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems. *International Journal of Control*, 2010, 83(11): 2241 – 2252.
- [359] YU S, MA J, WU H, et al. Robust precision motion control of piezoelectric actuators using fast nonsingular terminal sliding mode with time delay estimation. *Measurement and Control*, 2019, 52(1/2): 11 – 19.

- [360] BA D X, YEOM H, BAE J. A direct robust nonsingular terminal sliding mode controller based on an adaptive time-delay estimator for servomotor rigid robots. *Mechatronics*, 2019, 59: 82 – 94.
- [361] XIAO Y, YE D, SUN Z. Observer-based continuous finite-time attitude control for rigid-flexible coupling satellites. *International Journal of Control*, 2019, 92(11): 2667 – 2680.
- [362] ZHANG X, ZHAO Y, GUO K, et al. An adaptive B-spline neural network and its application in terminal sliding mode control for a mobile satcom antenna inertially stabilized platform. *Sensors*, 2017, DOI: 10.3390/s17050978.
- [363] MAO Jianliang, LI Qi, ZHU Hairong. Continuous nonsingular terminal sliding mode control of optical-electronic tracking system subject to multiple disturbances. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(4): 413 – 423.
(冒建亮, 李奇, 朱海荣. 多源扰动下光电跟踪系统连续非奇异终端滑模控制. *控制理论与应用*, 2017, 34(4): 413 – 423.)
- [364] WANG Y, ZHANG X, YUAN X, et al. Position-sensorless hybrid sliding-mode control of electric vehicles with brushless DC motor. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2010, 60(2): 421 – 432.
- [365] LEE J, JIN M, KASHIRI N, et al. Inversion-free force tracking control of piezoelectric actuators using fast finite-time integral terminal sliding-mode. *Mechatronics*, 2019, 57: 39 – 50.
- [366] WANG H, LI Z, JIN X, et al. Adaptive integral terminal sliding mode control for automobile electronic throttle via an uncertainty observer and experimental validation. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2018, 67(9): 8129 – 8143.
- [367] RIANI A, MADANI T, BENALLEGUE A, et al. Adaptive integral terminal sliding mode control for upper-limb rehabilitation exoskeleton. *Control Engineering Practice*, 2018, 75: 108 – 117.
- [368] XIAO B, YIN S. Velocity-free fault-tolerant and uncertainty attenuation control for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(7): 4400 – 4411.

作者简介:

姜博严 博士, 讲师, 目前研究方向为非线性控制、有限时间控制等, E-mail: jiangby@czust.edu.cn;

李佳玲 硕士研究生, 目前研究方向为有限时间控制、无人船控制等, E-mail: li_jl_hhu@hhu.edu.cn;

李传江 博士, 教授, 目前研究方向为非线性控制、航天器姿态控制等, E-mail: lichuan@hit.edu.cn;

姚文卿 博士, 讲师, 目前研究方向为复杂系统分析、控制、优化与应用, E-mail: yaowq@czust.edu.cn.