

# 基于事件驱动的无人机吊挂系统在线自适应轨迹规划

蔡佳明, 鲜 斌<sup>†</sup>

(天津大学 电气自动化与信息工程学院, 天津 300072)

**摘要:** 本文针对四旋翼无人机吊挂系统空运过程中负载摆角的非线性最优调节问题, 提出了一种基于事件驱动的在线自适应轨迹规划策略. 在事件驱动的自适应评价网框架下, 利用神经网络的逼近学习能力得到吊挂负载摆动抑制的折现最优控制律. 同时结合该控制律进一步规划四旋翼无人机的飞行轨迹, 实现了对无人机位置的精确调节和吊挂负载摆动的快速抑制, 并且显著降低了无人机机载处理器的计算负担. 然后采用基于Lyapunov稳定性的分析方法, 证明了神经网络输出权值估计误差一致最终有界, 并证明了无人机位置跟踪误差和吊挂负载摆动运动的收敛. 最后, 通过飞行对比实验验证了所提出的轨迹规划策略的有效性.

**关键词:** 轨迹规划; 事件驱动; 无人机吊挂系统; 摆动抑制

**引用格式:** 蔡佳明, 鲜斌. 基于事件驱动的无人机吊挂系统在线自适应轨迹规划. 控制理论与应用, 2024, 41(5): 817 – 828

DOI: 10.7641/CTA.2023.20423

## Event-driven based online adaptive trajectory planning for the UAV slung-payload transportation system

CAI Jia-ming, XIAN Bin<sup>†</sup>

(School of Electrical and Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** This paper proposes a new event-driven based online trajectory planning strategy for the nonlinear optimal adjustment control of the payload's swing motion for the quadrotor slung-payload transportation system. By using the approximate structure of the neural network, the optimal control law of the payload's swing angle is obtained by training the neural network under the framework of the event-driven adaptive critic network. At the same time, the flight trajectory of the quadrotor unmanned aerial vehicle (UAV) is further planned based on the optimal control law, which achieves accurate position regulation of the UAV and fast suppression of the payload's swing motion during the flight while the computation cost of the UAV's airborne processor is reduced significantly. Then, it is proved that the output weight estimation error of the improved neural network is uniformly ultimately bounded, and the convergence of the quadrotor's positioning and payload's swing suppression is proved via the Lyapunov based stability analysis. Finally, flight experimental results are presented to validate the effectiveness of the proposed trajectory planning strategy comparing with other methods.

**Key words:** trajectory planning; event-driven; UAV slung payload system; swing suppression

**Citation:** CAI Jiaming, XIAN Bin. Event-driven based online adaptive trajectory planning for the UAV slung-payload transportation system. *Control Theory & Applications*, 2024, 41(5): 817 – 828

## 1 引言

近年来, 随着搜救、快递、农业、军事等领域对高效作业的需求上升, 研究人员对四旋翼无人机展开了很多相关研究<sup>[1-3]</sup>. 其中, 四旋翼无人机吊挂空运系统又以能够实现物资投放、快递运输、农业施肥及军事援助等应用, 成为了研究的热点之一.

四旋翼无人机吊挂空运系统的控制目标是实现快

速准确定位的同时有效抑制负载的摆动, 这是一项具有挑战性的任务. 为了获得令人满意的性能, 鉴于人工神经网络对特定的函数具有良好的逼近性能, 许多研究人员已经将人工神经网络融入到四旋翼无人机吊挂空运系统的控制器设计以及轨迹规划中去<sup>[4]</sup>. 文献[5]用高阶规划器生成航点, 并用动态规划算法为吊挂负载的四旋翼无人机生成减摆轨迹. 实验验证, 该

收稿日期: 2022-05-22; 录用日期: 2023-04-18.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: xbin@tju.edu.cn; Tel.: +86 22-27400897.

本文责任编辑: 贺威.

国家重点研发计划项目(2018YFB1403900), 国家自然科学基金项目(91748121, 90916004)资助.

Supported by the National Key R&D Program of China (2018YFB1403900) and the National Natural Science Foundation of China (91748121, 90916004).

算法通过多次迭代遍历使得轨迹跟踪误差收敛且负载摆角减小. 文献[6]提出了一种基于有限样本的批量强化学习算法, 带吊挂负载的四旋翼无人机根据不同环境生成相应的合理轨迹, 且系统对噪声和系统未建模动态有一定的鲁棒性. 其核心在于给予无人机有限的轨迹作为学习样本进行自主学习. 文献[7]进一步优化了文献[6]的学习算法, 扩充了轨迹的样本空间, 提出了一种在有静态障碍的环境中进行货物运输的强化学习方法. 文献[8]基于能量整形控制方法构造了一种新型的能量存储函数以处理状态耦合, 然后利用神经网络对系统未建模动态特性进行在线估计, 并采用基于符号函数的鲁棒控制算法补偿神经网络的估计误差.

基于以上分析可得, 现有针对四旋翼无人机吊挂空运系统的研究结果主要是基于时间驱动的策略(time-driven strategy, TDS), 考虑到需要在机载处理器上在线实时更新神经网络, 这不可避免地会遇到计算负担过重的问题. 为了解决上述问题, 除了升级机载处理器这种硬件方法外, 进行时间/事件转换以实现事件驱动策略(event-driven strategy, EDS)的设计已经成为反馈控制社区的一条新途径<sup>[9]</sup>. 在事件驱动方法的一般框架下, 人工神经网络或者控制器仅在满足一定条件时进行更新, 在保证控制性能良好的前提下实现神经网络或者控制器输出的稳定及高效率. 罗德岛大学(金斯敦)的研究人员<sup>[10]</sup>针对非线性仿射系统的近似最优控制问题, 提出一种组合自适应学习规则训练神经网络来得到基于事件驱动的近似最优控制律, 同时研究人员对提出的方法进行了仿真验证. 注意到以上研究人员在仿真验证中采用了固定采样频率替代变频率的做法来满足实际情况. 除此之外, 要求具有初始稳定条件在一定程度上限制了基于事件驱动设计的应用<sup>[11-12]</sup>. 为此, 借鉴文献[11]的结果, 利用神经网络逼近策略推导出基于事件的非线性折现最优控制律, 可以不依赖于特殊的初始条件.

综上所述, 本文在基于事件驱动的前提下, 引入折现代价函数和自适应评价网络机制, 提出了一种新型的四旋翼无人机吊挂空运系统在线自适应轨迹规划方法. 本文将吊挂空运系统负载摆角的动力学方程转换成非线性仿射系统的形式, 在此基础上通过神经网络逼近的方法来求解负载摆角抑制的最优控制问题. 本文利用负载摆角的反馈作为人工神经网络的输入, 通过在线训练神经网络获得输出作为轨迹规划部分的补偿. 本文关于四旋翼无人机吊挂空运系统轨迹规划研究的主要贡献列举如下:

1) 本文应用了事件触发机制, 显著降低了无人飞机载处理器处理神经网络学习和自适应最优控制两个过程的计算负担. 这在四旋翼无人机机载处理器上在线训练人工神经网络提供了一种新的手段;

2) 本文利用 Lyapunov 稳定性分析方法证明了评价网络输出权值估计误差一致最终有界, 并证明了本文提出的轨迹规划策略能保证无人机位置误差和负载摆动的收敛. 在此之前, 基于神经网络的无人机轨迹规划设计成果少有完备的稳定性分析;

3) 本文通过实际飞行实验, 对提出的在线自适应轨迹规划方法进行了验证, 并且与点到点的轨迹跟踪方法进行了对比, 实验结果表明本文设计的基于事件驱动的在线自适应轨迹规划方法具有更好的减摆效果以及良好的定位性能. 在此之前, 基于事件驱动的无人机控制少有完整的实验验证过程, 而多为数值仿真验证结果.

总体而言, 文献检索结果表明, 目前尚未有基于事件驱动的无人机吊挂系统减摆轨迹规划设计, 本文的设计较为新颖. 本文内容安排为: 第1节, 给出了四旋翼吊挂空运系统的二维动力学模型以及负载动力学方程的连续时间非线性仿射系统形式; 第2节, 在事件驱动的自适应评价网框架下, 通过设计神经网络得到事件驱动的折现最优控制律; 第3节, 结合最优控制律进一步规划生成四旋翼无人机的飞行期望轨迹; 第4节, 利用 Lyapunov 稳定性分析方法证明了最优控制律以及设计的期望轨迹的收敛性; 第5节, 给出了实验结果, 并与点到点的轨迹跟踪方法的控制效果进行了对比; 最后, 在第6节中, 对本文设计进行了总结. 需要说明的是: 由于本文的重点是轨迹规划方法设计, 不涉及位置控制器的详细设计与分析, 为此涉及位置控制器的闭环系统稳定性分析等在文中没有赘述.

## 2 问题描述及动力学模型

四旋翼无人机吊挂空运系统模型<sup>[13]</sup>示意图如图1所示. 图1中, 系统的三维模型中:  $\{\mathcal{I}\} = \{x_I, y_I, z_I\}$  表示固定在大地的惯性坐标系,  $\{\mathcal{B}\} = \{x_B, y_B, z_B\}$  表示无人机的机体坐标系. 本节主要考虑四旋翼无人机吊挂空运系统在惯性坐标系  $\{\mathcal{I}\}$  下  $y, z$  方向上的位置状态以及负载摆角及其角速度映射在  $y, z$  平面上的状态, 对四旋翼无人机吊挂空运系统进行建模, 其二维模型如图1所示, 模型中相关的参数定义如表1所示.

参考文献[13-17], 采用欧拉-拉格朗日方法对系统进行建模并且做出如下假设.

**假设 1** 吊挂负载始终处于四旋翼无人机的下方, 即吊挂负载相对无人机的摆角  $\gamma(t)$  始终满足  $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma(t) \leq \frac{\pi}{2}$ .

**假设 2** 吊挂的绳索始终是张紧的且没有弹性形变, 绳索质量可忽略不计. 未知外界扰动  $F_a(t)$  连续且有界.

**假设 3** 四旋翼无人机吊挂空运系统只在纵向  $yOz$  平面运动.

**假设 4** 四旋翼无人机的姿态响应速度足够快.

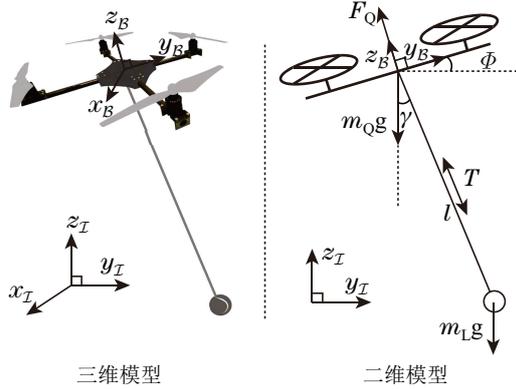


图 1 四旋翼无人机吊挂空运系统模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of UAV slung-payload system

表 1 参数定义

Table 1 Parameter definition

参数符号	参数定义
$m_L \in \mathbb{R}$	吊挂负载质量
$m_Q \in \mathbb{R}$	无人机质量
$l \in \mathbb{R}$	绳索绳长
$\gamma \in \mathbb{R}$	吊挂负载摆角
$T \in \mathbb{R}^2$	绳索张力向量
$P_Q = [y \ z]^T \in \mathbb{R}^2$	无人机位置
$P_L = [y_L \ z_L]^T \in \mathbb{R}^2$	吊挂负载位置
$F_Q = [f_y \ f_z \ 0]^T \in \mathbb{R}^3$	无人机的升力向量
$F_d = [d_y \ d_z \ d_\gamma]^T \in \mathbb{R}^3$	未知外界扰动

通过计算可以得到系统的动力学方程如下:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F_Q + F_d, \quad (1)$$

其中:  $q = [y \ z \ \gamma]^T \in \mathbb{R}^3$  表示系统的状态向量;  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $G(q) \in \mathbb{R}^3$  分别表示四旋翼无人机吊挂空运系统的惯性矩阵、向心力矩阵及重力向量. 式(1)中  $M(q)$  的表达式为

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_L + m_Q & 0 & m_L l \cos \gamma \\ 0 & m_p + m_Q & m_L l \sin \gamma \\ m_L l \cos \gamma & m_L l \sin \gamma & m_L l^2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$C(q, \dot{q})$  的表达式为

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_L l \dot{\gamma} \sin \gamma \\ 0 & 0 & m_L l \dot{\gamma} \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$G(q)$  的表达式为

$$G(q) = [0 \ (m_L + m_Q)g \ m_L g l \sin \gamma]^T. \quad (4)$$

将式(1)展开可得负载摆动运动的动力学方程如下:

$$m_L l \ddot{\gamma} \cos \gamma + m_L l \ddot{z} \sin \gamma + m_L l^2 \ddot{\gamma} + m_L g l \sin \gamma = d_\gamma. \quad (5)$$

基于以上模型, 一般的平面四旋翼无人机吊挂空运系统的轨迹规划设计目标有两点: 1) 设计合适的期望轨迹  $y_d(t)$  和  $z_d(t)$ , 保证在通用位置控制器的作用下, 四旋翼无人机在  $y$  和  $z$  方向跟踪上给定期望轨迹并到达目标位置  $y_d$  和  $z_d$ ; 2) 在四旋翼无人机运动过程中抑制负载的摆动. 可用下述数学语言描述:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_d, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z_d, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0. \quad (6)$$

在上述控制目标的基础上, 进行本文的轨迹规划设计. 考虑实际环境中比例微分 (proportion differentiation, PD) 控制器参数调整便捷且应用广泛的特点, 位置环采用通用成熟的 PD 控制器使四旋翼无人机跟踪上规划的轨迹. 为方便后续实验, 定义四旋翼无人机实时位置  $y(t)$ ,  $z(t)$  与规划的轨迹  $y_d(t)$ ,  $z_d(t)$  之间的误差  $e_y(t)$  与  $e_z(t)$  如下:

$$e_y(t) = y(t) - y_d(t), \quad e_z(t) = z(t) - z_d(t). \quad (7)$$

本文的要点是通过设计期望轨迹加速度  $\ddot{y}_d(t)$  与  $\ddot{z}_d(t)$ , 从而获得期望速度和期望位置来实现位置环跟踪从而实现快速抑制负载摆动. 为了验证规划的轨迹的有效性, 在后文的对比实验中, 要保证使用相同的位置环控制器. 实际飞行实验对比的是本文设计的在线自适应轨迹规划方法与不加轨迹规划的点到点轨迹跟踪方法.

为此在上述两点轨迹规划目标的基础上, 本文的设计目标为: 1) 将吊挂空运系统负载摆角的动力学方程转换成非线性仿射系统的形式, 将问题转换为求解负载摆角抑制的最优控制问题; 2) 设计基于事件驱动的自适应评价网络及其输出权值更新律, 保证在线更新的神经网络权值估计误差一致最终有界. 设计基于事件驱动的近似最优控制律用于轨迹规划中的减摆项; 3) 设计期望轨迹, 所规划的轨迹可以保证四旋翼无人机在  $y$  和  $z$  方向的位置、速度、负载摆角收敛到一定区域内.

输入仿射形式的动力系统在文献和工程中是常见的, 将式(5)整理为如下的连续时间非线性仿射系统形式:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad (8)$$

其中:  $x(t) = [\gamma(t) \ \dot{\gamma}(t)]^T \in \mathbb{R}^2$  作为等效状态向量,  $u(t) = [u_y(t) \ u_z(t)]^T = [\ddot{y}(t) \ \ddot{z}(t)]^T \in \mathbb{R}^2$  为非线性仿射系统的等效输入. 在式(8)中  $f(x)$  的表达式为  $f(x) = [\dot{\gamma} \ -\frac{g \sin \gamma}{l} + \frac{d_\gamma}{m_L l^2}]^T$ ,  $g(x)$  的表达式为

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\cos \gamma}{l} & -\frac{\sin \gamma}{l} \end{bmatrix},$$

$f(\cdot)$  与  $g(\cdot)$  满足局部李普希兹 (Lipschitz) 连续条件.

设  $t = 0$  时,  $x(0) = x_0$ , 且  $x = 0$  为系统平衡点, 此时  $f(0) = 0$ . 在最优调节设计中, 针对特定的代价函数来设计状态反馈控制律  $u(t)$ . 选取  $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  为正定常数矩阵,  $R \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  为 Hermite 正定常数阵, 定义函数  $r(x(\tau), u(\tau))$  如下:

$$r(x(\tau), u(\tau)) = x^T(\tau)Qx(\tau) + u^T(\tau)Ru(\tau). \quad (9)$$

定义折现代价函数<sup>[11]</sup>  $V(x(t), u(t))$  如下:

$$V(x(t), u(t)) = \int_t^\infty e^{-\eta(\tau-t)} r(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad (10)$$

其中  $\eta > 0$ , 为折现因子, 用来调节收敛速率. 后文  $V(x(t), u(t))$  简写为  $V(x(t))$  或者  $V(x)$ . 对于控制输入  $u(t)$ , 若代价函数连续且可微, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} e^{-\eta(\tau-t)} r(x(\tau), u(\tau)) d\tau + \\ & \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} V(x(t+T)) - V(x(t)) + \\ & \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} (e^{-\eta T} - 1) V(x(t+T)) = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

经过适当的数学变换, 可获得式(11)中非线性 Lyapunov 方程的无穷小形式如下式所示:

$$r(x, u) + (\nabla V(x))^T (f(x) + g(x)u) - \eta V(x) = 0, \quad (12)$$

其中:  $\nabla V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}$ ,  $V(0) = 0$ . 定义系统(8)的哈密顿量为

$$H(x, u, \nabla V(x)) = r(x, u) + (\nabla V(x))^T (f(x) + g(x)u) - \eta V(x). \quad (13)$$

据贝尔曼最优准则, 最优代价函数  $V^*(x)$  的表达式为

$$V^*(x) = \min_u \int_t^\infty e^{-\eta(\tau-t)} r(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad (14)$$

上式满足 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程, 即  $\min_u H(x, u, \nabla V^*(x)) = 0$ . 基于文献[12]及后续的稳定性分析, 可将最优控制律  $u^*(x)$  设计为

$$u^*(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} g^T(x) \nabla V^*(x). \quad (15)$$

根据以上最优控制律, 上述的 HJB 方程可改写为

$$r(x, u^*) + (\nabla V^*(x))^T (f(x) + g(x)u^*) - \eta V^*(x) = 0. \quad (16)$$

因为  $R$  为 Hermite 正定阵, 满足  $(R^{-1})^T = R^{-1}$ , 上式可化为

$$\begin{aligned} & x^T Q x - \frac{1}{4} (\nabla V^*(x))^T g(x) R^{-1} g^T(x) \nabla V^*(x) + \\ & (\nabla V^*(x))^T f(x) - \eta V^*(x) = 0, \quad V^*(0) = 0, \quad (17) \end{aligned}$$

上式称为基于时间的经典 HJB 方程, 即  $H(x, u^*, \nabla V^*) = 0$ . 目前, 自适应评价网络方法, 即利用神经网络重构最优代价函数  $V^*(x)$  并逼近求解最优控制律  $u^*(x)$  的方法, 已经成为解决上述最优控制问题的有

力手段. 为此, 下文给出基于事件驱动的自适应评价网设计.

### 3 基于事件驱动的自适应评价网设计

#### 3.1 事件驱动机制

为实现本文中提出的控制目标, 参考文献[18]中的设计, 定义一个单调递增的触发序列  $\{s_i\}_{i=0}^\infty$ ,  $s_i$  为  $i \in N$  的第  $i$  个连续采样时刻, 采样输出为采样状态的一个序列. 对于所有  $t \in [s_i, s_{i+1})$  有

$$x(s_i) \triangleq \hat{x}_i. \quad (18)$$

定义事件驱动的误差函数为

$$e_i(t) = \hat{x}_i - x(t), \quad \forall t \in [s_i, s_{i+1}), \quad (19)$$

当  $t = s_i$  时,  $e_i(t) = 0$ . 在每个触发时刻, 系统状态是采样的,  $e_i(t)$  复位为 0, 反馈控制律

$$u(x(s_i)) = u(\hat{x}_i) \quad (20)$$

得到更新. 控制序列  $\{u(\hat{x}_i)\}_{i=0}^\infty$  通过零阶保持器可成为一个分段的连续时间信号.

上述的触发时刻一般情况下指在不满足本文的式(39)触发条件时, 输入神经网络的系统状态进行采样, 同时神经网络进行迭代更新, 这样可以最大程度降低计算消耗. 但这在实际飞行实验中会带来轨迹跟踪及负载减摆效果降低的问题. 为此, 借鉴现有研究成果<sup>[10]</sup>并结合理论与实践, 在保证神经网络输出权值误差一致最终有界(即满足式(39))的基础上, 通过调节参数在轨迹规划的减摆效果与降低计算消耗之间寻找一个平衡.

将上述事件触发机制与式(15)中的最优控制律设计相结合, 可得如下的控制设计:

$$u^*(\hat{x}_i) = -\frac{1}{2} R^{-1} g^T(\hat{x}_i) \nabla V^*(\hat{x}_i), \quad (21)$$

其中  $\nabla V^*(\hat{x}_i) = \frac{\partial V^*(x)}{\partial x}|_{x=\hat{x}_i}$ . 在自适应评价网的设计中,  $u^*(\hat{x}_i)$  为设计目标.

#### 3.2 自适应评价网设计

据神经网络的逼近策略<sup>[12,19]</sup>, 最优代价函数  $V^*(x)$  可重构为

$$V^*(x) = \omega_c^T \sigma_c(x) + \varepsilon(x), \quad (22)$$

其中:  $\omega_c \in \mathbb{R}^{n_c}$  为理想权值向量,  $\sigma_c(x) \in \mathbb{R}^{n_c}$  为激活函数,  $\varepsilon(x) \in \mathbb{R}$  为重构误差,  $n_c$  为隐含层中神经元的数量. 可得上式的梯度向量为  $\nabla V^*(x) = (\nabla \sigma_c(x))^T \omega_c + \nabla \varepsilon(x)$ , 因为  $\omega_c$  未知, 采用评价网逼近上述重构后的最优代价函数, 可得近似最优代价函数为

$$\hat{V}^*(x) = \hat{\omega}_c^T \sigma_c(x), \quad (23)$$

其中  $\hat{\omega}_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$  为估计权值向量, 可得  $\nabla \hat{V}^*(x) = (\nabla \sigma_c(x))^T \hat{\omega}_c$ , 采用逼近策略重构, 式(21)可改写为

$$u^*(\hat{x}_i) = -\frac{1}{2}R^{-1}g^T(\hat{x}_i)((\nabla\sigma_c(\hat{x}_i))^T\omega_c + \nabla\varepsilon(\hat{x}_i)), \quad (24)$$

采用评价网逼近上述表达式可得基于事件驱动的近似最优控制律 $\hat{u}(\hat{x}_i)$ 为

$$\hat{u}(\hat{x}_i) = -\frac{1}{2}R^{-1}g^T(\hat{x}_i)(\nabla\sigma_c(\hat{x}_i))^T\hat{\omega}_c, \quad (25)$$

由以上可得近似哈密尔顿量为

$$\begin{aligned} \hat{H}(x, \hat{u}(\hat{x}_i), \nabla\hat{V}^*(x)) = \\ r(x, \hat{u}(\hat{x}_i)) - \eta\hat{\omega}_c^T\sigma_c(x) + \\ \hat{\omega}_c^T\nabla\sigma_c(x)(f(x) + g(x)\hat{u}(\hat{x}_i)). \end{aligned} \quad (26)$$

考虑到 $H(x, u^*, \nabla V^*(x)) = 0$ , 定义

$$e_c = \hat{H}(x, \hat{u}(\hat{x}_i), \nabla\hat{V}^*(x)), \quad (27)$$

将上式中的 $e_c(t)$ 对 $\hat{\omega}_c(t)$ 的偏导数定义为 $\rho(t)$ , 即 $\frac{\partial e_c}{\partial \hat{\omega}_c} \triangleq \rho$ , 其中 $\rho(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ . 可以求得如下等式:

$$\rho = \nabla\sigma_c(x)(f(x) + g(x)\hat{u}(\hat{x}_i)) - \eta\sigma_c(x). \quad (28)$$

迭代更新评价网权值使得目标函数 $E_c = \frac{1}{2}e_c^2$ 最小化. 这里采用归一化梯度下降算法, 可得评价网络输出权值 $\hat{\omega}_c^c(t)$ 的更新律<sup>[14, 20]</sup>为

$$\dot{\hat{\omega}}_c^c = -\alpha_c \frac{1}{(1 + \rho^T\rho)^2} \frac{\partial E_c}{\partial \hat{\omega}_c} = -\alpha_c \frac{\rho}{(1 + \rho^T\rho)^2} e_c, \quad (29)$$

其中 $\alpha_c > 0$ 为设计的评价网学习率增益. 为了方便后续稳定性证明, 定义 $\rho_1 = \frac{\rho}{1 + \rho^T\rho}$ ,  $\rho_2 = 1 + \rho^T\rho$ , 其中函数 $\rho(t)$ 的表达式在式(28)中给出.

在传统的自适应评价网设计中, 应该选择一种特殊的权值向量来创建初始的稳定控制器, 然后再开始训练神经网络, 否则可能会导致闭环系统不稳定. 为避免以上情况, 引入一个额外的Lyapunov候选函数来改进评价网的学习准则, 并利用它来调节评价网的权值向量. 以下假设<sup>[10]</sup>将在随后的稳定性证明中使用.

**假设 5** 考虑带折现代价函数(10)的系统(8), 注意到其在基于事件驱动的最优控制策略(21)作用下的闭环形式, 令 $V_s(x)$ 为保证时间导数为负连续可微Lyapunov候选函数, 即

$$\dot{V}_s(x) = (\nabla V_s(x))^T(f(x) + g(x)u^*(\hat{x}_i)) < 0. \quad (30)$$

为此, 存在一个正定矩阵 $\Gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , 使得下述表达式成立:

$$\begin{aligned} (\nabla V_s(x))^T(f(x) + g(x)u^*(\hat{x}_i)) = \\ -(\nabla V_s(x))^T\Gamma\nabla V_s(x) \leq \\ -\lambda_{\min}(\Gamma)\|\nabla V_s(x)\|^2. \end{aligned} \quad (31)$$

根据状态向量选择多项式来确定 $V_s(x)$ , 可选取

$V_s(x) = \frac{1}{2}x^T x$ . 当使用式(21)中的基于事件驱动的最优控制律时, 为使系统稳定, 即 $\dot{V}_s^{\hat{u}}(x) = (\nabla V_s(x))^T \times (f(x) + g(x)\hat{u}(\hat{x}_i)) < 0$ , 需要引入一个额外的项通过沿着 $\hat{\omega}_c(t)$ 的负梯度方向调整 $\dot{V}_s^{\hat{u}}(x)$ 来加强训练过程<sup>[10]</sup>. 为此, 据式(25)中的基于事件驱动的近似最优控制律, 可利用链式法则得到以下梯度下降运算:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_c^s = -\alpha_s \frac{\partial((\nabla V_s(x))^T(f(x) + g(x)\hat{u}(\hat{x}_i)))}{\partial \hat{\omega}_c} = \\ \frac{1}{2}\alpha_s \nabla\sigma_c(\hat{x}_i)g(\hat{x}_i)R^{-1}g^T(x)\nabla V_s(x), \end{aligned} \quad (32)$$

其中 $\alpha_s > 0$ 为正常数. 综上所述, 本文的评价网输出权值更新律由两部分组成, 即 $\dot{\hat{\omega}}_c = \dot{\hat{\omega}}_c^c + \dot{\hat{\omega}}_c^s$ , 可得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_c = -\alpha_c \frac{\rho}{(1 + \rho^T\rho)^2} e_c + \\ \frac{1}{2}\alpha_s \nabla\sigma_c(\hat{x}_i)g(\hat{x}_i)R^{-1}g^T(x)\nabla V_s(x). \end{aligned} \quad (33)$$

#### 4 轨迹规划设计

无人机吊挂系统在实际应用中主要用于物资运输, 为此, 实现四旋翼无人机位置的精准调节, 同时快速抑制吊挂负载的摆动是十分有意义的. 定义四旋翼无人机轨迹跟踪误差信号如下:

$$\begin{cases} \tilde{y} = y_d - y_t, \dot{\tilde{y}} = \dot{y}_d - \dot{y}_t, \\ \tilde{z} = z_d - z_t, \dot{\tilde{z}} = \dot{z}_d - \dot{z}_t. \end{cases} \quad (34)$$

参考文献[21]中的设计, 本文的四旋翼无人机期望轨迹的加速度 $\ddot{y}_d(t)$ 与 $\ddot{z}_d(t)$ 设计为如下形式:

$$\begin{cases} \ddot{y}_d = -k_{11}\tilde{y} - k_{12}\dot{\tilde{y}} + \dot{y}_t + k_\gamma\dot{\gamma}\cos\gamma + \hat{u}_y, \\ \ddot{z}_d = -k_{21}\tilde{z} - k_{22}\dot{\tilde{z}} + \dot{z}_t + k_\gamma\dot{\gamma}\sin\gamma + \hat{u}_z. \end{cases} \quad (35)$$

由式(25)可知, 上式中:  $\hat{u}(\hat{x}_i) = [\hat{u}_y(\hat{x}_i) \ \hat{u}_z(\hat{x}_i)]^T$ 为减摆设计;  $k_\gamma\dot{\gamma}\cos\gamma$ 与 $k_\gamma\dot{\gamma}\sin\gamma$ 为保证系统稳定的辅助函数, 用于后续稳定性分析;  $k_\gamma, k_{11}, k_{12}, k_{21}$ 及 $k_{22}$ 为正常数增益. 标称轨迹 $\ddot{y}_t(t)$ 与 $\ddot{z}_t(t)$ 保证了四旋翼无人机能准确到达目标位置, 标称轨迹要满足如下条件: 1)  $y_t(t), z_t(t)$ 在有限时间收敛到目标位置; 2)  $y_t(t), z_t(t)$ 的一二阶导数均能随时间收敛到0, 且二阶导数的绝对值与一阶导数均是有上界的正实数; 3) 初始值应满足当 $t = 0$ 时,  $y_t(t), z_t(t)$ 及其一阶导数均为0.

本文的控制结构如图2所示. 图中阴影部分即为本文提出的基于事件驱动的在线自适应轨迹规划策略. 首先, 通过对吊挂负载摆角信息 $x(t)$ 进行采样处理得到式(18)中的 $\hat{x}_i$ . 在输出权值更新律(33)的作用下, 自适应评价网络在线逼近式(23)中的近似最优代价函数 $\hat{V}^*(\hat{x}_i)$ , 将求解得到的式(25)负载摆角抑制近似最优控制律 $\hat{u}(\hat{x}_i)$ 经过信号保持处理, 作为实时期望轨迹规划(35)中的部分输入. 最后无人机吊挂系统在位置控制器(72)的作用下跟踪上规划的期望轨迹.

## 5 稳定性分析

### 5.1 事件驱动部分稳定性分析

定义权值的估计误差为  $\tilde{\omega}_c = \omega_c - \hat{\omega}_c$ , 可得  $\dot{\tilde{\omega}}_c = -\dot{\hat{\omega}}_c$ . 由式(33)的评价网络输出权值更新律可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\omega}}_c = & -\alpha_c \rho_1 \rho_1^T \tilde{\omega}_c + \alpha_c \frac{\rho_1}{\rho_2} e_H - \\ & \frac{1}{2} \alpha_s \nabla \sigma_c(\hat{x}_i) g(\hat{x}_i) R^{-1} g^T(x) \nabla V_s(x), \end{aligned} \quad (36)$$

其中  $e_H = -(\nabla \varepsilon(x))^T (f(x) + g(x) \hat{u}(\hat{x}_i))$ .

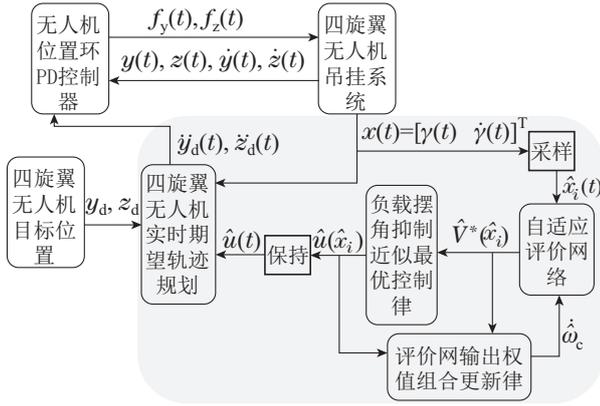


图2 控制结构框图

Fig. 2 Control structure

因为需要识别评价网络的参数以逼近最优代价函数, 本文设计的评价网本质上是一种自适应动态规划方法. 基于文献[11, 20], 持续激励假设保证了闭环系统的稳定性, 为此需要如下假设.

**假设6** 为使式(36)中的  $\rho_1$  在  $[t, t+T]$  上持续激励, 存在  $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, T > 0$  使得  $\rho_1$  满足

$$\beta_1 I \leq \int_t^{t+T} \rho_1(\tau) \rho_1^T(\tau) d\tau \leq \beta_2 I. \quad (37)$$

由假设6可得  $\lambda_{\min}(\rho_1 \rho_1^T) > 0$ . 带有事件触发机制的闭环系统可以看做是一个脉冲模型, 应该分为两步进行稳定性分析和讨论: 1) 当  $t \in [s_i, s_{i+1})$  时, 事件未触发时刻; 2) 当  $t = s_{i+1}, j \in \mathbb{N}$  时, 事件触发时刻. 为了稳定性证明, 做出以下假设<sup>[10, 22]</sup>.

**假设7**  $g(x), \nabla \sigma_c(x), \nabla \varepsilon(x)$  和  $e_H$  满足下列条件:

$$\begin{cases} \|g(x) - g(\hat{x}_i)\| \leq \psi_g \|e_i(t)\|, \\ \|\nabla \sigma_c(x) - \nabla \sigma_c(\hat{x}_i)\| \leq \psi_\sigma \|e_i(t)\|, \\ \|g(x)\| \leq g_M, \|\nabla \sigma_c(x)\| \leq \sigma_M, \\ \|\nabla \varepsilon(x)\| \leq \varepsilon_M, \|e_H\| \leq e_M, \end{cases} \quad (38)$$

其中  $\psi_\sigma, \psi_g, g_M, \sigma_M, \varepsilon_M$  以及  $e_M$  均为正常数.

**定理1** 对于非线性对象(8), 若假设1-3成立, 基于式(25)中的事件驱动近似最优控制律以及式(33)中的神经网络输出权值更新律. 若触发条件满足

$$\|e_i(t)\|^2 \leq \frac{(1-\varphi^2)\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + \|\theta \hat{u}(\hat{x}_i)\|^2}{\xi \psi \|\hat{\omega}_c\|^2} \triangleq e_T, \quad (39)$$

则权值估计误差一致最终有界. 其中, 正常数  $\psi$  定义为  $\psi = \psi_g^2 \sigma_M^2 + \psi_\sigma^2 g_M^2$ ,  $\varphi \in (0, 1)$  是设计的参数, 常量  $\xi = \|\theta\|^2 \|R^{-1}\|^2$ , 正定矩阵  $\theta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  满足  $R = \theta^T \theta$ .

**证** 定义Lyapunov候选函数  $L(t)$  如下所示:

$$L(t) = L_1(t) + L_2(t) + L_3(t) + L_4(t), \quad (40)$$

其中各项表达式如下:

$$\begin{cases} L_1(t) = V^*(x(t)), L_2(t) = V^*(\hat{x}_i), \\ L_3(t) = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_c^T(t) \tilde{\omega}_c(t), L_4(t) = \alpha_s V_s(x(t)). \end{cases} \quad (41)$$

由式(9)-(10)可得上式各项均是非负定的. 根据事件是否被触发, 证明分为两种情况.

**情况1** 事件未触发时刻, 即  $t \in [s_i, s_{i+1}), i \in \mathbb{N}$ . 可得  $\dot{L}_2(t) = 0, L_1(t), L_3(t)$  以及  $L_4(t)$  的一阶导数分别为

$$\begin{cases} \dot{L}_1(t) = (\nabla V^*(x))^T (f(x) + g(x) \hat{u}(\hat{x}_i)), \\ \dot{L}_3(t) = -\alpha_c \tilde{\omega}_c^T \rho_1 \rho_1^T \tilde{\omega}_c + \alpha_c \frac{\tilde{\omega}_c^T \rho_1}{\rho_2} e_H - \\ \frac{1}{2} \alpha_s \tilde{\omega}_c^T \nabla \sigma_c(\hat{x}_i) g(\hat{x}_i) R^{-1} g^T(x) \nabla V_s(x), \\ \dot{L}_4(t) = \alpha_s (\nabla V_s(x))^T (f(x) + g(x) \hat{u}(\hat{x}_i)). \end{cases} \quad (42)$$

为求得  $\dot{L}_1(t)$ , 通过引入一个二次项  $\hat{u}^T(\hat{x}_i) R \hat{u}(\hat{x}_i)$ , 可得

$$\begin{aligned} \dot{L}_1(t) = & -x^T Q x + \eta V^*(x) + \\ & u^{*T}(x) R u^*(x) - 2u^{*T}(x) R \hat{u}(\hat{x}_i) \leq \\ & -x^T Q x + \eta V^*(x) - \|\theta \hat{u}(\hat{x}_i)\|^2 + \\ & \|\theta\|^2 \|u^*(x) - \hat{u}(\hat{x}_i)\|^2. \end{aligned} \quad (43)$$

基于时间的最优控制律可重构为

$$u^*(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} g^T(x) ((\nabla \sigma_c(x))^T \omega_c + \nabla \varepsilon(x)). \quad (44)$$

由式(25)中的  $\hat{u}(\hat{x}_i)$ , 式(44)中的  $u^*(x)$  以及  $\omega_c = \hat{\omega}_c + \tilde{\omega}_c$  可得

$$\begin{aligned} \|u^*(x) - \hat{u}(\hat{x}_i)\|^2 \leq & \\ & \frac{1}{2} \|R^{-1}\|^2 \{ \|g^T(x) ((\nabla \sigma_c(x))^T \tilde{\omega}_c + \nabla \varepsilon(x))\|^2 + \\ & \| (g^T(\hat{x}_i) (\nabla \sigma_c(\hat{x}_i))^T - g^T(x) (\nabla \sigma_c(x))^T) \tilde{\omega}_c \|^2 \}. \end{aligned} \quad (45)$$

由假设7可得

$$\begin{aligned} \|g^T(\hat{x}_i) (\nabla \sigma_c(\hat{x}_i))^T - g^T(x) (\nabla \sigma_c(x))^T\|^2 \leq & \\ 2(\|(\nabla \sigma_c(\hat{x}_i) - \nabla \sigma_c(x)) g(\hat{x}_i)\|^2 + & \\ \|\nabla \sigma_c(x) (g(\hat{x}_i) - g(x))\|^2) \leq & \end{aligned}$$

$$2\psi\|e_i(t)\|^2. \tag{46}$$

整合式(43)(45)–(46)可得

$$\begin{aligned} \dot{L}_1(t) \leq & -x^T Qx - \|\theta\hat{u}(\hat{x}_i)\|^2 + \eta V^*(x) + \\ & \frac{1}{2}\xi(2\psi\|\hat{\omega}_c\|^2\|e_i(t)\|^2 + 2g_M^2\varepsilon_M^2 + \\ & 2g_M^2\sigma_M^2\|\tilde{\omega}_c\|^2). \end{aligned} \tag{47}$$

为求 $\dot{L}_3(t)$ , 对式(42)中的 $\dot{L}_3(t)$ 做杨氏不等式变换, 由假设7以及 $\rho_2 \geq 1$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{L}_3(t) \leq & -(\alpha_c - \frac{1}{2})\lambda_{\min}(\rho_1\rho_1^T)\|\tilde{\omega}_c\|^2 + \frac{1}{2}\alpha_c^2 e_M^2 - \\ & \frac{1}{2}\alpha_s\tilde{\omega}_c^T \nabla\sigma_c(\hat{x}_i) g(\hat{x}_i) R^{-1}g^T(x)\nabla V_s(x). \end{aligned} \tag{48}$$

由式(25)中的事件驱动近似最优控制律 $\hat{u}(\hat{x}_i)$ 以及 $\tilde{\omega}_c = \omega_c - \hat{\omega}_c$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{L}_3(t) \leq & -(\alpha_c - \frac{1}{2})\lambda_{\min}(\rho_1\rho_1^T)\|\tilde{\omega}_c\|^2 + \frac{1}{2}\alpha_c^2 e_M^2 - \\ & \frac{1}{2}\alpha_s(\nabla V_s(x))^T g(x)R^{-1}g^T(\hat{x}_i)(\nabla\sigma_c(\hat{x}_i))^T \omega_c - \\ & \alpha_s(\nabla V_s(x))^T g(x)\hat{u}(\hat{x}_i). \end{aligned} \tag{49}$$

为求 $\dot{L}(t)$ , 整合式(42)(47), 可得

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) \leq & -x^T Qx + \eta V^*(x) + \xi\psi\|\hat{\omega}_c\|^2\|e_i(t)\|^2 - \\ & \|\theta\hat{u}(\hat{x}_i)\|^2 + \xi g_M^2\varepsilon_M^2 - \\ & ((\alpha_c - \frac{1}{2})\lambda_{\min}(\rho_1\rho_1^T) - \xi g_M^2\sigma_M^2)\|\tilde{\omega}_c\|^2 + \\ & \frac{1}{2}\alpha_c^2 e_M^2 + \alpha_s(\nabla V_s(x))^T (f(x) + g(x)u^*(\hat{x}_i)) + \\ & \frac{1}{2}\alpha_s(\nabla V_s(x))^T g(x)R^{-1}g^T(\hat{x}_i)\nabla\varepsilon(\hat{x}_i). \end{aligned} \tag{50}$$

根据假设1–3, 存在一个正定矩阵 $\Gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 使得下式成立:

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) \leq & -x^T Qx + \eta V^*(x) + \\ & \xi\psi\|\hat{\omega}_c\|^2\|e_i(t)\|^2 - \|\theta\hat{u}(\hat{x}_i)\|^2 - \\ & ((\alpha_c - \frac{1}{2})\lambda_{\min}(\rho_1\rho_1^T) - \xi g_M^2\sigma_M^2)\|\tilde{\omega}_c\|^2 + \\ & \xi g_M^2\varepsilon_M^2 + \frac{1}{2}\alpha_c^2 e_M^2 - \alpha_s\lambda_{\min}(\Gamma)\|\nabla V_s(x)\|^2 + \\ & \frac{1}{2}\alpha_s g_M^2\varepsilon_M\|R^{-1}\|\|\nabla V_s(x)\|, \end{aligned} \tag{51}$$

为完成后续的稳定性证明, 取触发条件(39)中设计的参数 $\varphi$ 对上式中的 $-x^T Qx$ 这一项做变换, 可得

$$\begin{aligned} -x^T Qx \leq & -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 = \\ & -\varphi^2\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + (\varphi^2 - 1)\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2. \end{aligned} \tag{52}$$

将式(52)代入式(51)中可得

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) \leq & -\varphi^2\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + (\varphi^2 - 1)\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + \\ & \xi\psi\|\hat{\omega}_c\|^2\|e_i(t)\|^2 - \|\theta\hat{u}(\hat{x}_i)\|^2 + \eta V^*(x) - \\ & \alpha_s\lambda_{\min}(\Gamma)(\|\nabla V_s(x)\| - \frac{g_M^2\varepsilon_M\|R^{-1}\|}{4\lambda_{\min}(\Gamma)})^2 - \\ & ((\alpha_c - \frac{1}{2})\lambda_{\min}(\rho_1\rho_1^T) - \xi g_M^2\sigma_M^2)\|\tilde{\omega}_c\|^2 + \phi, \end{aligned} \tag{53}$$

其中 $\phi$ 是如下所示的常数:

$$\phi = \xi g_M^2\varepsilon_M^2 + \frac{1}{2}\alpha_c^2 e_M^2 + \frac{\alpha_s g_M^4\varepsilon_M^2\|R^{-1}\|^2}{16\lambda_{\min}(\Gamma)}. \tag{54}$$

若满足定理1中的触发条件(39), 并且式(53)中的第6项为负定的, 式(53)可放缩为

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) \leq & -\varphi^2\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + \eta V^*(x) + \phi - \\ & ((\alpha_c - \frac{1}{2})\lambda_{\min}(\rho_1\rho_1^T) - \xi g_M^2\sigma_M^2)\|\tilde{\omega}_c\|^2. \end{aligned} \tag{55}$$

由于最优代价函数 $V^*(x)$ 以常数 $\alpha_{V^*} > 0$ 为界, 上式可写为

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) \leq & -\varphi^2\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + \eta\alpha_{V^*} + \phi - \\ & ((\alpha_c - \frac{1}{2})\lambda_{\min}(\rho_1\rho_1^T) - \xi g_M^2\sigma_M^2)\|\tilde{\omega}_c\|^2, \end{aligned} \tag{56}$$

要使上式 $\dot{L}(t) < 0$ , 则需要满足

$$\|x\| > \sqrt{\frac{\eta\alpha_{V^*} + \phi}{\varphi^2\lambda_{\min}(Q)}}, \tag{57}$$

或者

$$\|\tilde{\omega}_c\| > \sqrt{\frac{2(\eta\alpha_{V^*} + \phi)}{(2\alpha_c - 1)\lambda_{\min}(\rho_1\rho_1^T) - 2\xi g_M^2\sigma_M^2}}. \tag{58}$$

当满足式(57)或者式(58)时, 对所有 $t \in [s_i, s_{i+1})$ ,  $\dot{L}(t) < 0$ 成立.

**情况 2** 事件触发, 即 $t = s_{i+1}, i \in \mathbb{N}$ . 可得

$$\begin{aligned} \Delta L(t) &= L(\hat{x}_{i+1}) - L(x(s_{i+1}^-)) = \\ & \Delta L_1(t) + \Delta L_2(t) + \Delta L_3(t) + \Delta L_4(t), \end{aligned} \tag{59}$$

其中 $x(s_{i+1}^-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(s_{i+1} - \epsilon)$ .

由情况1可得, 当 $t \in [s_i, s_{i+1})$ 时,  $\dot{L}(t) < 0$ . 考虑到系统状态和代价函数都是连续的, 可得 $\Delta L_1(t) \leq 0, \Delta L_3(t) \leq 0$ 以及 $\Delta L_4(t) \leq 0$ , 其中

$$\begin{cases} \Delta L_1(t) = V^*(\hat{x}_{i+1}) - V^*(x(s_{i+1}^-)), \\ \Delta L_3(t) = \frac{1}{2}(\tilde{\omega}_c^T(\hat{x}_{i+1})\tilde{\omega}_c(\hat{x}_{i+1}) - \tilde{\omega}_c^T(x(s_{i+1}^-))\tilde{\omega}_c(x(s_{i+1}^-))), \\ \Delta L_4(t) = \alpha_s(V_s(\hat{x}_{i+1}) - V_s(x(s_{i+1}^-))), \end{cases} \tag{60}$$

整合以上式子可得

$$\Delta L(t) \leq \Delta L_2(t) = V^*(\hat{x}_{i+1}) - V^*(\hat{x}_i) \leq -\mathcal{K}(\|e_{i+1}(s_i)\|), \tag{61}$$

其中:  $\mathcal{K}(\cdot)$ 是 $\mathcal{K}$ 类函数,  $e_{i+1}(s_i) = \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i$ . 由此可得对任意的触发时刻, 即 $t = s_{i+1}$ 时,  $L(t)$ 是递减的.

根据以上两种情况, 当满足触发条件(39)及不等式(57)或(58)时, 则权值估计误差一致最终有界, 定理1得证. 证毕.

对于采用事件触发控制输入的连续时间非线性系统, 最小采样间隔时间 $\Delta s_{\min} = \min_{i \in \mathbb{N}} \{s_{i+1} - s_i\}$ 可能为零并引发Zeno Behavior问题. 为此本文给出以下引理<sup>[12]</sup>.

**引理 1** 考虑具有事件驱动近似最优控制律(25)的非线性仿射系统(8), 由触发条件(39)确定的最小采样间隔时间 $\Delta s_{\min}$ 存在一个非零正常数的下界, 即

$$\Delta s_{\min} \geq \frac{1}{\mathcal{F}} \ln(1 + S_{j,\min}) > 0.$$

上述引理确保系统避免了Zeno Behavior问题, 其中

$$S_{j,\min} = \min_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\|e_i(s_{i+1})\|}{\|\hat{x}_i\| + \chi} \right\} > 0,$$

$e_i(s_{i+1}) = \hat{x}_i - x(s_{i+1})$ ,  $\mathcal{F}$ 是一个正常数,  $\chi$ 是一个较小的正常数, 满足 $\|f(x) + g(x)u\| \leq \mathcal{F}\|x\| + \mathcal{F}\chi$ . 引理1的证明参考文献[12], 这里不再赘述.

### 5.2 轨迹规划部分稳定性分析

**定理 2** 式(35)所规划的轨迹可以保证四旋翼无人机 $y$ 和 $z$ 方向的位置、速度、负载摆角及摆角角速度收敛到一定区域内.

**证** 根据式(5)(35)可得到如下状态空间表达式:

$$\dot{\beta} = A\beta + B, \tag{62}$$

上式中 $\beta(t) = [y(t) \ \dot{y}(t) \ z(t) \ \dot{z}(t) \ \gamma(t) \ \dot{\gamma}(t)]^T$ 为系统的状态向量, 计算可得

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{11} & -k_{12} & 0 & 0 & 0 & k_\gamma \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{21} & -k_{22} & 0 & k_\gamma \sin \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix}, \tag{63}$$

其中:  $a_1 = \frac{k_{11}}{l} \cos \gamma$ ,  $a_2 = \frac{k_{12}}{l} \cos \gamma$ ,  $a_3 = \frac{k_{21}}{l} \sin \gamma$ ,  $a_4 = \frac{k_{22}}{l} \sin \gamma$ ,  $a_5 = -\frac{g}{l}$ ,  $a_6 = -\frac{k_\gamma}{l}$ .

$$B = [0 \ p(y_t, \dot{y}_t, \ddot{y}_t, \hat{u}_y) \ 0 \ p(z_t, \dot{z}_t, \ddot{z}_t, \hat{u}_z) \ 0 \ \delta]^T, \tag{64}$$

其中

$$\delta = -\frac{p(y_t, \dot{y}_t, \ddot{y}_t, \hat{u}_y) \cos \gamma + p(z_t, \dot{z}_t, \ddot{z}_t, \hat{u}_z) \sin \gamma}{l} + \frac{d_\gamma}{m_L l^2}.$$

式中 $p(y_t, \dot{y}_t, \ddot{y}_t, \hat{u}_y)$ 与 $p(z_t, \dot{z}_t, \ddot{z}_t, \hat{u}_z)$ 的表达式如下:

$$\begin{cases} p(y_t, \dot{y}_t, \ddot{y}_t, \hat{u}_y) = k_{11}y_t + k_{12}\dot{y}_t + \ddot{y}_t + \hat{u}_y, \\ p(z_t, \dot{z}_t, \ddot{z}_t, \hat{u}_z) = k_{21}z_t + k_{22}\dot{z}_t + \ddot{z}_t + \hat{u}_z. \end{cases} \tag{65}$$

由未知扰动有界、标称轨迹满足的条件(2), 以及评价网输出权值估计误差一致最终有界, 可知 $B$ 有界. 由于实际情况下负载摆角 $\gamma(t)$ 较小, 可以对摆角进行以下近似处理<sup>[23]</sup>:  $\sin \gamma(t) \approx \gamma(t)$ ,  $\cos \gamma(t) \approx 1$ . 经过计算可得系统的特征方程为

$$\begin{aligned} &(\lambda^4 + (k_{12} + \frac{k_\gamma}{l})\lambda^3 + (k_{11} + \frac{g}{l})\lambda^2 + \frac{gk_{12}}{l}\lambda + \\ &\frac{gk_{11}}{l})(\lambda^2 + k_{22}\lambda + k_{21}) = 0. \end{aligned} \tag{66}$$

由上式可知, 当参数满足 $k_\gamma, k_{11} + k_{11}k_{12}l < gk_{12}$ 时系统稳定. 由于 $A$ 的所有特征根均具有负实部, 所以存在对称矩阵 $D > 0$ 以及正定实对称矩阵 $H$ , 使得 $A^T D + DA = -H$ 成立.

选取Lyapunov候选函数 $J(t)$ 为

$$J(t) = \frac{1}{2}\beta^T D\beta. \tag{67}$$

对式(67)求一阶时间导数可得

$$\begin{aligned} \dot{J}(t) &= \frac{1}{2}\dot{\beta}^T D\beta + \frac{1}{2}\beta^T D\dot{\beta} = \\ &\frac{1}{2}(A\beta + B)^T D\beta + \frac{1}{2}\beta^T D(A\beta + B) = \\ &B^T D\beta - \frac{1}{2}\beta^T H\beta, \end{aligned} \tag{68}$$

此时

$$\begin{aligned} \dot{J}(t) &\leq \|B^T D\beta\| - \frac{1}{2}\lambda_{\min}(H)\|\beta\|^2 \leq \\ &\|B\|\|D\|\|\beta\| - \frac{1}{2}\lambda_{\min}(H)\|\beta\|^2, \end{aligned} \tag{69}$$

可以得到系统状态的收敛域为

$$\Omega = \{\beta \in \mathbb{R}^6 \mid \|\beta(0)\| < \frac{2\|B\|\|D\|}{\lambda_{\min}(H)}\}. \tag{70}$$

定理2得证. 证毕.

## 6 实验与分析

### 6.1 实验设置

为了验证本文设计的基于事件驱动的四旋翼无人机吊挂空运系统在线自适应轨迹规划方法的实际效果, 本文采用如图3所示的实验平台进行了一组飞行实验. 该实验平台主要包括如下4部分: 1) 小型四旋翼无人机; 2) 机载处理器; 3) OptiTrack运动捕捉系统; 4) 吊挂绳索和吊挂负载. OptiTrack运动捕捉系统将多个摄像头获取的视频信息通过Ethernet接口汇总于地

面站, 并解算出四旋翼无人机实时位置信息和吊挂负载实时位置信息. 通过 Zigbee 无线网络, 地面站将上述无人机和负载的实时位置信息发送到四旋翼无人机的机载处理器. 本文设计的轨迹规划方法以及无人机的飞行控制算法均在线运行在机载处理器上.



图 3 四旋翼无人机吊挂空运系统实验平台

Fig. 3 Experiment testbed of UAV slung-payload system

实验平台的相关参数为:  $m_Q = 1.008 \text{ kg}$ ,  $m_L = 0.076 \text{ kg}$ ,  $l = 1.05 \text{ m}$  及  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . 本文设计的基于事件驱动的近似最优控制律部分相关参数如下:  $Q = \text{diag}\{0.001, 0.05\}$ ,  $R = \text{diag}\{0.01, 0.02\}$ ,  $V_s(x) = \frac{1}{2}x^T x$ ,  $\eta = 0.6$ ,  $\alpha_c = 0.1$ ,  $\alpha_s = 0.0015$ ,  $n_c = 10$ .

用作评价网输入的系统状态的采样时间为  $0.05 \text{ s}$ . 触发条件 (39) 中的相关参数如下:  $\varphi = 0.5$ ,  $\psi = 25$ . 轨迹规划设计相关参数如下:  $k_{11} = 6.0$ ,  $k_{12} = 5.0$ ,  $k_{21} = 6.0$ ,  $k_{22} = 5.0$ ,  $k_\gamma = 1.0$ . 选用如下的 S 形曲线作为标称轨迹<sup>[2]</sup>:

$$\begin{cases} y_i(t) = \frac{1}{2} \left( p_y + \frac{1}{n_y} \ln \frac{\cosh(c_y t - v)}{\cosh(c_y t - v - n_y p_y)} \right), \\ z_i(t) = \frac{1}{2} \left( p_z + \frac{1}{n_z} \ln \frac{\cosh(c_z t - v)}{\cosh(c_z t - v - n_z p_z)} \right), \end{cases} \quad (71)$$

上式中的相关参数取值如下:  $c_y = 1.2$ ,  $c_z = 1.2$ ,  $n_y = 0.48$ ,  $n_z = 0.48$ ,  $v = 3.5$ ,  $p_y = 3.0$ ,  $p_z = 0.3$ .

为使吊挂系统沿着规划的期望轨迹运动, 选取如下的类 PD 控制器作为位置环轨迹跟踪控制器:

$$\begin{cases} f_y(t) = -k_{y1} e_y(t) - k_{y2} \dot{y}(t), \\ f_z(t) = -k_{z1} e_z(t) - k_{z2} \dot{z}(t) + (m_L + m_Q)g, \end{cases} \quad (72)$$

上式中  $k_{y1}$ ,  $k_{y2}$ ,  $k_{z1}$  及  $k_{z2}$  为 PD 控制器的控制增益, 均为正常数. 在实际飞行实验中, 控制增益选取如下:  $k_{y1} = 6.2$ ,  $k_{y2} = 10.1$ ,  $k_{z1} = 9.1$ ,  $k_{z2} = 12.0$ .  $\dot{y}(t)$  与  $\dot{z}(t)$  表示四旋翼无人机在  $y$  和  $z$  方向上的实时速度分量,  $e_y(t)$  与  $e_z(t)$  表示四旋翼无人机实时位置与规划的轨迹之间的误差, 在式 (7) 中定义. 实际飞行实验中, 四旋翼无人机的起始位置和目标位置分别设置为:  $y_0 =$

$0 \text{ m}$ ,  $z_0 = -1.75 \text{ m}$  与  $y_d = 3 \text{ m}$ ,  $z_d = -1.45 \text{ m}$ .

## 6.2 实验结果与分析

为了验证本文设计的在线自适应轨迹规划方法的减摆效果, 在实验平台上进行了一组对比实验. 实验采用本文设计的在线自适应轨迹规划方法与不加轨迹规划的点到点的轨迹跟踪方法做对比, 应用上述的类 PD 控制器及其相关参数, 使四旋翼无人机在吊挂负载的情况下到达目标位置.

图 4 描述了在两种策略下系统的状态  $y(t)$ ,  $z(t)$  随时间变化的情况. 图 5 描述了在两种策略下  $y, z$  方向的控制输入信号量  $f_y(t)$ ,  $f_z(t)$  随时间变化的情况. 图 6 描述了在两种策略下负载摆角  $\gamma(t)$  随时间变化的情况. 图 7 描述了网络学习过程的触发条件. 从图中可以看到  $\|e_i(t)\|^2$  始终小于  $e_T$ , 满足式 (39) 中的触发条件, 即权值估计误差一致最终有界. 图 8 描述了网络学习过程的输出权值收敛情况.

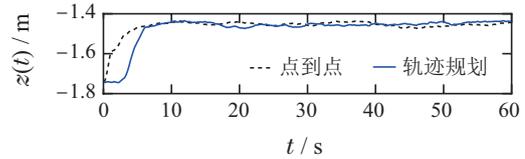
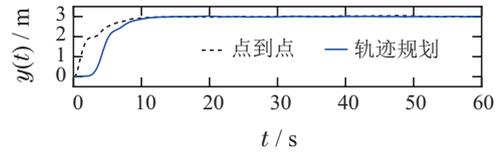


图 4 无人机位置  $y(t)$  与  $z(t)$

Fig. 4 Position  $y(t)$  and  $z(t)$  of UAV

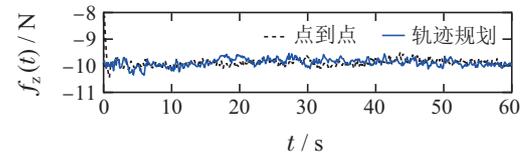
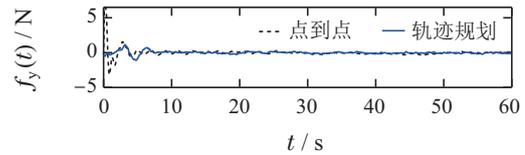


图 5 无人机控制输入  $f_y(t)$ ,  $f_z(t)$

Fig. 5 Control inputs  $f_y(t)$ ,  $f_z(t)$

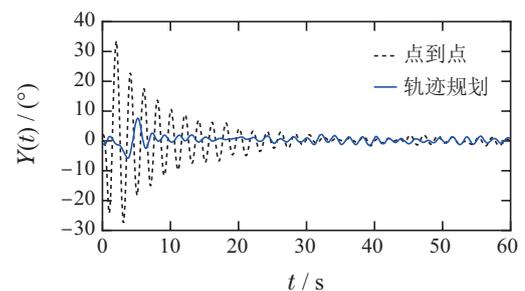


图 6 负载摆角  $\gamma(t)$

Fig. 6 Payload swing angle  $\gamma(t)$

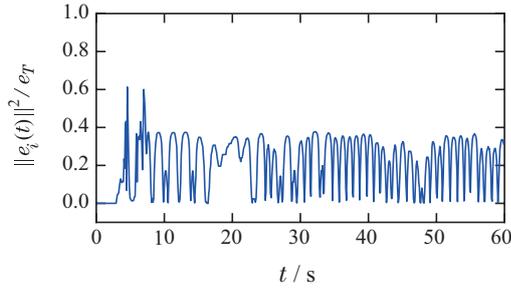


图7 触发条件

Fig. 7 Triggering condition

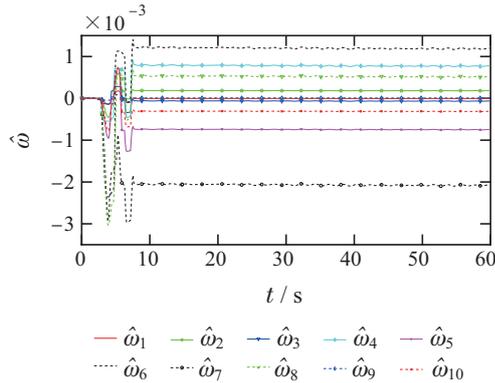
图8 神经网络输出权值 $\hat{\omega}(t)$ 

Fig. 8 Weight vector of the neural network

本文中,定义当四旋翼无人机到达目标位置并保持在规定的误差带(目标位置的 $\pm 5\%$ )内时,系统进入稳态.定义调节时间为四旋翼无人机进入稳态所需的最短时间.通过对图4和图6的动态过程进行具体分析,可得到表2,表2中是在线自适应轨迹规划方法和点到点的轨迹跟踪方法下系统调节时间的对比结果.通过分析可知,两种方法下,四旋翼无人机在 $y, z$ 方向位移的调节时间相近,无人机均能较平滑的到达目标位置.但是比较负载摆角的调节时间,在线自适应轨迹规划方法明显优于点到点的轨迹跟踪方法,并且从图6中可知,在线自适应轨迹规划方法下,负载摆角的振荡幅值以及振荡次数均远小于点到点的轨迹跟踪方法下的摆角幅值与次数.根据图5可知,对于控制输入 $f_y(t)$ 与 $f_z(t)$ ,从动态调节过程来看,在线自适应轨迹规划方法下位置环控制器的输出相比较点到点的轨迹跟踪方法下位置环控制器的输出平缓许多.总的来说,动态过程中,在四旋翼无人机位移方面,两种方法的效果相近,但在负载摆角方面,在线自适应轨迹规划方法的减摆效果明显优于点到点的轨迹跟踪方法.

表2 调节时间比较

Table 2 Comparison: settling time

调节时间/s	在线自适应轨迹规划	点到点的轨迹跟踪
$t_{sy}$	9.593	8.250
$t_{sz}$	6.782	6.302
$t_{s\gamma}$	7.543	28.416

对图4和图6中的状态量的稳态过程进行定量分析,选取各个状态量进入稳态后的数据,分别对图中各个量求取了平均绝对误差(mean absolute error, MAE)和均方根误差(mean square error, MSE).表3和表4分别是在线自适应轨迹规划方法和点到点的轨迹跟踪方法在达到稳态后的平均绝对误差和均方根误差的对比.对于无人机 $y$ 方向位移 $y(t)$ ,在线自适应轨迹规划方法的平均绝对误差以及均方根误差均略小于点到点的轨迹跟踪方法.对于无人机 $z$ 方向位移 $z(t)$ 以及负载摆角 $\gamma(t)$ ,两种方法的平均绝对误差以及均方根误差相近.总的来看,两种方法下吊挂系统的稳态性能相近.图5中控制输入量 $f_y(t), f_z(t)$ 的稳态性能和 $y, z$ 方向的位移 $y(t), z(t)$ 的稳态性能对应,合理地解释了 $y, z$ 方向的位移 $y(t), z(t)$ 的变化曲线,间接体现了在线自适应轨迹规划方法对负载优良的减摆性能.

表3 稳态平均绝对误差(MAE)比较

Table 3 Comparison: steady-state mean absolute error

MAE	在线自适应轨迹规划	点到点的轨迹跟踪
$y/m$	0.0116	0.0213
$z/m$	0.0079	0.0073
$\gamma/(\circ)$	0.7154	0.7264

表4 稳态均方根误差(RMSE)比较

Table 4 Comparison: steady-state mean square error

RMSE	在线自适应轨迹规划	点到点的轨迹跟踪
$y/m$	0.0228	0.0300
$z/m$	0.0093	0.0089
$\gamma/(\circ)$	0.8688	0.8926

当权衡控制精度和计算复杂度时,通过反复实验调参得到基于事件触发的评价网络的更新频率降低至10 Hz左右时轨迹跟踪及负载减摆效果较好,此时评价网络输入的系统状态的采样时间为0.1 s.网络学习过程的触发条件如图7所示.图7表明学习过程始终满足式(39)中的触发条件,即 $\|e_i(t)\|^2/e_T$ 的值小于1.如图8所示,评价网的输出权值向量最终收敛.从图中可以发现,权值向量的初始值都被设为零,说明初始控制律不需要是稳定的.可以观察到输出权值向量的收敛发生在 $t = 7.64$  s,之后系统进入了小角度摆动状态.

图9描述了事件驱动策略(EDS)及时间驱动策略(TDS)下的触发间隔情况.本文设计的创新之处除了上述对负载具有优良的减摆性能之外,还有如下一点:在达到相同控制效果的前提下,与基于时间的评价网络相比较,基于事件触发的评价网络有着更低的更新频率,为此降低了无人机机载处理器的运算负担.本

文将神经网络的更新频率作为所提出方法减少计算量的量化指标。原因在于,在只涉及无人机外环控制的轨迹规划中,为达到良好的位置跟踪效果,无人机外环控制器的控制更新频率有一定的下限,并且,基于时间的评价网设计普遍采用与无人机外环控制器相同的更新频率。在本文实验中,无人机采用的外环控制器的控制更新频率不低于50 Hz,这就要求机载处理器具有较强的运算能力能够处理基于时间的评价网的迭代更新。为解决机载处理器算力不足的问题,本文设计的基于事件触发机制的在线自适应轨迹规划方法,在保证系统稳定性以及位置跟踪效果的前提下,如图9所示,将评价网络的更新频率降低至10 Hz左右,这显著降低了机载处理器在处理评价网络的迭代更新时的计算消耗。

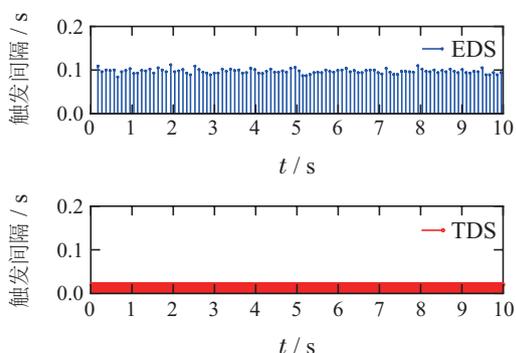


图9 不同策略下触发间隔对比

Fig. 9 Comparison of the triggering period under different strategy

## 7 结论

本文基于四旋翼无人机吊挂空运系统的二维动力学模型,提出了一种新颖的在线自适应轨迹规划方法,实现了无人机位置精确调节、吊挂负载摆动抑制,以及机载处理器计算负担降低的目标。该方法在事件驱动环境下,引入了折现代价函数和自适应评价网络机制,通过神经网络逼近的方法来求解负载摆角抑制的最优控制问题。利用负载摆角的折现最优控制律进一步规划无人机的期望轨迹。最后,在真实飞行实验下,将本文设计的轨迹规划方法与点到点的轨迹跟踪方法的实际效果进行了对比,结果表明:1) 本文设计的在线自适应轨迹规划方法具有良好的定位效果和更好的摆角抑制作用;2) 基于事件驱动的评价网设计明显减轻了机载处理器的计算负担。在后续的研究中,笔者考虑将基于平面模型的在线轨迹规划策略推广至完整的三维模型,并结合无人机姿态环进行控制研究与飞行实验验证。

## 参考文献:

[1] YANG S, XIAN B. Exponential regulation control of a quadrotor unmanned aerial vehicle with a suspended payload. *IEEE Transactions*

*on Control Systems Technology*, 2020, 28(6): 2762 – 2769.

- [2] XIAN B, WANG S Z, YANG S. An online trajectory planning approach for a quadrotor UAV with a slung payload. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(8): 6669 – 6678.
- [3] LIANG X, FANG Y C, SUN N, et al. A novel energy-coupling-based hierarchical control approach for unmanned quadrotor transportation systems. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2019, 24(1): 248 – 259.
- [4] MO H W, FARID G. Nonlinear and adaptive intelligent control techniques for quadrotor UAV-a survey. *Asian Journal of Control*, 2019, 21(2): 989 – 1008.
- [5] PALUNKO I, FIERRO R, CRUZ P. Trajectory generation for swing-free maneuvers of a quadrotor with suspended payload: A dynamic programming approach. *International Conference on Robotics and Automation*. Saint Paul, MN: IEEE, 2012: 2691 – 2697.
- [6] FAUST A, PALUNKO I, CRUZ P, et al. Learning swing-free trajectories for UAVs with a suspended load. *International Conference on Robotics and Automation*. Karlsruhe: IEEE, 2013: 4902 – 4909.
- [7] FAUST A, PALUNKO I, CRUZ P, et al. Automated aerial suspended cargo delivery through reinforcement learning. *Artificial Intelligence*, 2017, 247: 381 – 398.
- [8] HAN Xiaowei, XIAN Bin, YANG Sen. Adaptive controller design for an unmanned quadrotor transportation system. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(5): 999 – 1006.  
(韩晓薇, 鲜斌, 杨森. 无人机吊挂空运系统的自适应控制设计. 控制理论与应用, 2020, 37(5): 999 – 1006.)
- [9] ZHAO J G, GAN M G, ZHANG C. Event-triggered  $H_\infty$  optimal control for continuous-time nonlinear systems using neurodynamic programming. *Neurocomputing*, 2019, 360: 14 – 24.
- [10] WANG D, HE H B, ZHONG X N, et al. Event-driven nonlinear discounted optimal regulation involving a power system application. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(10): 8177 – 8186.
- [11] VAMVOUDAKIS K G, MOJOODI A, FERRAZ H. Event-triggered optimal tracking control of nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(4): 598 – 619.
- [12] WANG D, MU C X, HE H B, et al. Event-driven adaptive robust control of nonlinear systems with uncertainties through NDP strategy. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 47(7): 1358 – 1370.
- [13] WANG Shizhang, XIAN Bin, YANG Sen. Anti-swing controller design for an unmanned aerial vehicle with a slung-load. *Acta Automatica Sinica*, 2018, 44(10): 1771 – 1780.  
(王诗章, 鲜斌, 杨森. 无人机吊挂飞行系统的减摆控制设计. 自动化学报, 2018, 44(10): 1771 – 1780.)
- [14] YANG S, XIAN B. Energy-based nonlinear adaptive control design for the quadrotor UAV system with a suspended payload. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(3): 2054 – 2064.
- [15] LIANG X, FANG Y C, SUN N, et al. Nonlinear hierarchical control for unmanned quadrotor transportation systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(4): 3395 – 3405.
- [16] PIZETTA I H B, BRANDAO A S, SARCINELLI-FILHO M. Modelling and control of a PVTOL quadrotor carrying a suspended load. *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS'15)*. New York: IEEE, 2015: 444 – 450.
- [17] KLAUSEN K, FOSSEN T I, JOHANSEN T A. Nonlinear control with swing damping of a multirotor UAV with suspended load. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2017, 88: 379 – 394.

- [18] PENG C, YANG T C. Event-triggered communication and  $H_\infty$  control co-design for networked control systems. *Automatica*, 2013, 49(5): 1326 – 1332.
- [19] ZHANG H G, JIANG H, LUO Y H, et al. Data-driven optimal consensus control for discrete-time multi-agent systems with unknown dynamics using reinforcement learning method. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(5): 4091 – 4100.
- [20] VAMVOUDAKIS K G, LEWIS F L. Online actor-critic algorithm to solve the continuous-time infinite horizon optimal control problem. *Automatica*, 2010, 46(5): 878 – 888.
- [21] XIAN Bin, ZHANG Shijing, HAN Xiaowei, et al. Trajectory planning for unmanned aerial vehicle slung-payload aerial transportation system based on reinforcement learning. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2021, 51(6): 2259 – 2267. (鲜斌, 张诗婧, 韩晓薇, 等. 基于强化学习的无人机吊挂负载系统轨迹规划. 吉林大学学报(工学版), 2021, 51(6): 2259 – 2267.)
- [22] ZHANG H G, QIN C B, JIANG B, et al. Online adaptive policy learning algorithm for  $H_\infty$  state feedback control of unknown affine nonlinear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2014, 44(12): 2706 – 2718.
- [23] ALOTHMAN Y, JASIM W, GU D B. Quad-rotor lifting-transporting cable-suspended payloads control. *The 21st International Conference on Automation and Computing (ICAC)*. Glasgow: IEEE, 2015: 1 – 6.

#### 作者简介:

**蔡佳明** 博士研究生, 目前研究方向为无人机吊挂系统的非线性控制, E-mail: 1019234060@tju.edu.cn;

**鲜斌** 教授, 博士生导师, IEEE高级会员, 主要研究方向为非线性系统控制、无人机系统和实时控制系统, E-mail: xbin@tju.edu.cn.