

非线性不确定系统的非奇异快速终端滑模控制

杨晓骞[†], 李 健, 董 毅

(国防科学技术大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 针对存在非匹配干扰的非线性系统, 设计了一种基于干扰观测器和反步法的非奇异快速终端滑模控制. 引入非线性干扰观测器估计系统的不确定性, 利用反步的思想处理高阶非线性系统, 从而可以将非线性干扰观测器估计的干扰值引入反步法的虚拟控制量中, 同时设计一种新颖的非奇异快速终端滑模控制律保证系统的收敛速度和精度. 利用Lyapunov函数从理论上证明了所设计的控制器可以保证闭环系统的有限时间收敛. 最后通过数值仿真验证了所设计的控制方法的有效性.

关键词: 反步法; 终端滑模; 非线性干扰观测器; 非线性系统鲁棒控制

中图分类号: TP13 文献标识码: A

A novel non-singular fast terminal sliding mode control of nonlinear systems with uncertain disturbances

YANG Xiao-qian[†], LI Jian, DONG Yi

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China)

Abstract: A novel control scheme of non-singular fast terminal sliding mode control (NFTSMC) based on nonlinear disturbance observer (NDO) and back-stepping method is proposed for a class of nonlinear system with multiple uncertain disturbances. The uncertainty of the system can be estimated by nonlinear disturbance observer online. And the back-stepping method is used to deal with high order nonlinear systems with uncertainties. A novel non-singular fast terminal sliding controller is designed for the last step which can promise the finite time convergence and improve the steady state precision. Also, all of the disturbances estimated by the NDO are introduced into the design of virtual control laws in each step to compensate the uncertain disturbances. Under the proposed terminal sliding mode control method, the finite time convergence of all closed-loop signals is guaranteed via Lyapunov analysis. Finally, a simulation example is applied to demonstrate the efficacy of the proposed composite control method.

Key words: back-stepping method; terminal sliding-mode; nonlinear observer and filter design; robust control of nonlinear systems

1 引言(Introduction)

近年来, 存在不确定性的非线性系统控制问题得到了广泛关注, 并取得了大量的研究成果^[1-3]. 文献[4]提出了有限时间的终端滑模控制方法并受到广泛的关注. 然而, 通常意义上的终端滑模控制有两大局限: 一是控制过程中的奇异问题; 二是当系统状态离平衡点较远时, 系统状态的收敛速率较慢. 为了解决控制过程中的奇异问题, 文献[5]提出了非奇异终端滑模控制的方法, 并验证了方法的有效性. 为了解决收敛速率的问题, 文献[6]提出了一种快速终端滑模控制的方法, 即使在系统状态远离平衡点的位置都能收获较快的收敛速度. 综合两种控制方法的优越性, 文献[7]提出了非奇异快速终端滑模控制(non-singular fast

terminal sliding mode control, NFTSMC)的概念. 然而这些控制方法通常只适用于不确定误差满足匹配条件的情况. 在实际的控制应用中, 干扰和不确定量常常出现在没有控制输入的通道, 此时便不能满足匹配条件. 文献[8-9]考虑了非匹配干扰的问题, 通过使用干扰观测器来估计匹配干扰, 对非匹配干扰仅仅通过控制方法的鲁棒性来被动消除. 文献[10]针对非匹配干扰的研究, 同样也是采用被动消除的策略. 这些控制方法一般还要求非匹配干扰变化较为缓慢, 制约了这类方法的推广.

针对非匹配干扰的研究, 反步法是一种简单高效的控制策略. 反步法通过分步求解虚拟控制变量来降低控制系统的阶数, 可以解决高阶非线性系统的控制

问题. 传统的反步法需要不断对虚拟控制变量求导, 容易出现“微分爆炸”的问题, 阻碍了反步法的实际应用^[11]. 为此, 文献[12]引入了指令滤波的控制方式, 可以获得较为平滑的控制指令和指令导数, 扩大了反步法的应用范围. 同时, 为了更主动地估计干扰和不确定量, 基于非线性干扰观测器的控制方法被广泛地应用于机器人^[13]、电机系统^[14]、BTT导弹^[15]、直升机^[16]、高超声速飞行器^[17]和其他常见不确定系统^[18]的控制问题中, 控制效果较为满意. 文献[19]提出了一种基于非线性干扰观测器(nonlinear disturbance observer, NDO)的 L_2 滤波反步控制的方法, 然而误差收敛的速度较慢. 为了提高收敛的速度, 本文设计了一种快速终端滑模控制方法, 在保证收敛精度的同时可以获得更快的收敛速率.

本文以含有非匹配干扰的非线性系统为研究对象, 提出了基于非线性干扰观测器和反步法的快速终端滑模控制方法. 首先通过应用含有指令滤波的反步法处理非匹配干扰的高阶系统, 同时使用非线性干扰观测器估计每个通道干扰值的大小, 并对反步法得到的虚拟控制变量进行修正; 然后设计非奇异终端滑模控制方法提高整个控制系统的收敛速度. 整个控制系统的稳定性可以通过Lyapunov函数得以证明, 仿真结果表明该设计方法对非匹配干扰具有很好的抑制能力.

2 问题描述和准备(Problem formulation and preliminaries)

2.1 问题描述(Problem formulation)

考虑如下含有未知扰动的多输入多输出的高阶不确定非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_i &= \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_{i+1} + \boldsymbol{d}_i(t), \\ i &= 1, \dots, n-1, \\ \dot{\boldsymbol{x}}_n &= \boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_n(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d}_n(t), \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x}_1, \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n]^T$ 是系统的可测量状态变量, $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$ 是关于系统状态 \boldsymbol{x} 的非线性已知函数, \boldsymbol{u} 是系统输入, \boldsymbol{y} 是系统输出, \boldsymbol{d}_i 是系统不确定和外部干扰的组合.

假设 1 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$ 非奇异;

假设 2 复合干扰 \boldsymbol{d}_i 连续并且满足

$$\|\dot{\boldsymbol{d}}_i(t)\| \leq \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

其中 δ_i 为未知正数.

2.2 非线性干扰观测器(Nonlinear disturbance observer)

在控制律设计的过程中, 需要对复合干扰进行估计. 参考文献[20], 第 i 个通道的非线性干扰观测器可以设计为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{d}}}_i = \boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{x}),$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}}_i &= -\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x})(\hat{\boldsymbol{d}}_i + \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_{i+1}), \\ i &= 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{d}}_n = \boldsymbol{z}_n + \boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{x}),$$

$$\dot{\boldsymbol{z}}_n = -\boldsymbol{L}_n(\boldsymbol{x})(\hat{\boldsymbol{d}}_n + \boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_n(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}), \quad (3)$$

其中: $\hat{\boldsymbol{d}}_i$ 是实际干扰 \boldsymbol{d}_i 的预测值, \boldsymbol{z}_i 是 NDO 的内部辅助变量. $\boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{x})$ 是需要设计的非线性函数, 观测器增益 $\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x})$ 满足 $\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_i}$.

针对系统(1)设计的干扰观测器(3)的观测误差可以表示为

$$\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i} = \hat{\boldsymbol{d}}_i - \boldsymbol{d}_i. \quad (4)$$

定理 1 针对不确定系统(1), 如果干扰满足假设2, 则式(3)所示的 NDO 的观测误差一致最终有界, 并且观测误差以 $(1/2)(1 - \theta)\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x}))$ 的指数收敛到 $\delta_i/(\theta\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x})))$ 的闭球中 ($\theta \in (0, 1)$).

证 对观测误差 $\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}$ 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}_{\text{NDO}_i} &= \dot{\hat{\boldsymbol{d}}}_i - \dot{\boldsymbol{d}}_i = \boldsymbol{z}_i + \dot{\boldsymbol{p}}_i(\boldsymbol{x}) - \dot{\boldsymbol{d}}_i = \\ &= -\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x})(\hat{\boldsymbol{d}}_i - \boldsymbol{d}_i) - \dot{\boldsymbol{d}}_i = \\ &= -\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i} - \dot{\boldsymbol{d}}_i. \end{aligned} \quad (5)$$

定义 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}^T \boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}, \quad (6)$$

求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}^T \dot{\boldsymbol{e}}_{\text{NDO}_i} = \\ &= \boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}^T (-\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i} - \dot{\boldsymbol{d}}_i) \leq \\ &= -\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x}))\|\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}\|^2 + \delta_i\|\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}\| = \\ &= -(1 - \theta)(\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x}))\|\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}\|^2 - \\ &= \theta(\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x}))\|\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}\|^2 + \delta_i\|\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}\|, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\theta \in (0, 1)$.

因此可得

$$\dot{V} \leq \varpi, \quad \forall \|\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}\| \geq \frac{\delta_i}{\theta\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x}))}, \quad (8)$$

其中 $\varpi = -(1 - \theta)\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x}))\|\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}\|^2$.

积分可得

$$V \leq V(t_0)\exp(\varpi t), \quad \forall \|\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}\| \geq \frac{\delta_i}{\theta\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x}))}. \quad (9)$$

根据式(6)可得

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}\| &\leq \sqrt{2V(t_0)}\exp\left(\frac{1}{2}\varpi t\right), \\ \forall \|\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}\| &\geq \frac{\delta_i}{\theta\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x}))}, \end{aligned} \quad (10)$$

从而可得

$$\|\boldsymbol{e}_{\text{NDO}_i}\| \leq \sqrt{2V(t_0)}\exp\left(\frac{1}{2}\varpi t\right) +$$

$$\frac{\delta_i}{\theta \lambda_{\min}(\mathbf{L}_i(\mathbf{x}))}, \forall t \geq 0. \quad (11)$$

因此, 观测误差 e_{NDO_i} 一致最终有界, 并且观测误差以 $\varpi/2$ 即 $(1/2)(1-\theta)\lambda_{\min}(\mathbf{L}_i(\mathbf{x}))$ 的指数收敛到 $\delta_i/\theta\lambda_{\min}(\mathbf{L}_i(\mathbf{x}))$ 的闭球中. 证毕.

注1 根据上面的分析, 选择一个合适的非线性函数可以保证观测误差的指数级收敛, $\mathbf{p}_i(\mathbf{x})$ 是非线性干扰观测器设计的关键. 在实际的设计工作中, 可以先选择一个合适的观测器增益 $\mathbf{L}_i(\mathbf{x})$, 而后通过积分得到 $\mathbf{p}_i(\mathbf{x})$. $\mathbf{L}_i(\mathbf{x})$ 的选择也很关键, 选择相对较大的值可以提高收敛速度, 并且随着观测器增益的增大, 最后收敛的闭球会越来越小, 稳态误差越来越小. 但是 $\mathbf{L}_i(\mathbf{x})$ 过大也会使得NDO的观测能力下降, 甚至产生新的干扰信号. 在实际应用过程中, 一般采用“试错”的策略确定观测器增益.

3 非奇异快速终端滑模控制 (Non-singular fast terminal sliding mode control)

3.1 控制律设计 (Control law design)

为了克服微分爆炸的问题, 在滤波反步法中定义如下所示的一阶滤波器:

$$\tau \dot{\mathbf{x}}_{ic} + \mathbf{x}_{ic} = \bar{\mathbf{x}}_{ic}, \quad \mathbf{x}_{ic}(0) = \bar{\mathbf{x}}_{ic}(0), \quad (12)$$

其中: τ 是滤波器常数, $\bar{\mathbf{x}}_{ic}$ 和 \mathbf{x}_{ic} 分别是指令信号和实际输入指令信号. τ 过大可能导致系统失稳, 过小可能产生较大的幅值和相位畸变. 通常来说, $0.01 \leq \tau \leq 0.05$ 是比较合适的选择^[21].

此时跟踪误差可以定义为

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{ic}. \quad (13)$$

系统控制目标变为通过控制律设计, 保证系统跟踪误差趋近于0, 也就是实现实际输入指令 \mathbf{x}_i 对名义控制指令 \mathbf{x}_{ic} 的精确跟踪.

步骤1 考虑闭环系统(1)的第1个子系统, 跟踪误差的导数可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_{1c} = \\ &\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})\mathbf{x}_2 + \mathbf{d}_1(t) - \dot{\mathbf{x}}_{1c}, \end{aligned} \quad (14)$$

从而可以设计名义控制变量 $\bar{\mathbf{x}}_{2c}$ 为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{2c} &= -\mathbf{g}_1(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{k}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + \\ &\hat{\mathbf{d}}_1(t) - \dot{\mathbf{x}}_{1c}). \end{aligned} \quad (15)$$

为了获得名义控制变量 $\bar{\mathbf{x}}_{2c}$ 的估计值及其导数, 可以引入如式(12)所示的一阶滤波器. 同时定义指令滤波误差为

$$\xi_1 = \mathbf{x}_{2c} - \bar{\mathbf{x}}_{2c}. \quad (16)$$

将式(15)代入式(14)可得

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = -\mathbf{k}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})(\mathbf{e}_2 + \xi_1) + e_{\text{NDO}1}. \quad (17)$$

步骤2 考虑闭环系统(1)的第*i*个子系统(其中 $i \leq n-1$), 跟踪误差的导数可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i &= \dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_{ic} = \\ &\mathbf{f}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x})\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{d}_i(t) - \dot{\mathbf{x}}_{ic}, \end{aligned} \quad (18)$$

从而可以设计名义控制变量 $\bar{\mathbf{x}}_{i+1c}$ 为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{i+1c} &= -\mathbf{g}_i(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{k}_i\mathbf{e}_i + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) + \\ &\hat{\mathbf{d}}_i(t) - \dot{\mathbf{x}}_{ic}). \end{aligned} \quad (19)$$

为了获得名义控制变量 $\bar{\mathbf{x}}_{i+1c}$ 的估计值及其导数, 可以引入如式(12)所示的一阶滤波器. 同时定义指令滤波误差为

$$\xi_i = \mathbf{x}_{i+1c} - \bar{\mathbf{x}}_{i+1c}. \quad (20)$$

将式(19)代入式(18)可得

$$\dot{\mathbf{e}}_i = -\mathbf{k}_i\mathbf{e}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{x})(\mathbf{e}_{i+1} + \xi_i) + e_{\text{NDO}_i}. \quad (21)$$

步骤3 考虑闭环系统(1)的第*n*个子系统, 跟踪误差的导数可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_n &= \dot{\mathbf{x}}_n - \dot{\mathbf{x}}_{nc} = \\ &\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_n(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{d}_n(t) - \dot{\mathbf{x}}_{nc}. \end{aligned} \quad (22)$$

为了确保系统变量能够在有限时间收敛到平衡位置同时避免奇异问题, 本文设计了一种新的终端滑模面

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}^\gamma + \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}^\lambda, \quad (23)$$

其中: $\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t \mathbf{e}_n(\tau) d\tau$, $\gamma = g/h$, $\lambda = p/q$, p, q, g, h 是正奇数, 同时满足 $1 < \lambda < 2$, $\gamma > \lambda$, \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 是已知正定矩阵.

当系统状态远离平衡位置时, 误差积分 $\boldsymbol{\sigma}$ 的高阶项起主要作用, 此时系统状态可以以较快的速度收敛到平衡位置附近, 而后, 误差积分项 $\boldsymbol{\sigma}$ 起到主要作用, 保证误差以较快速率收敛到0. γ 和 λ 都设置为比1大的数, 避免对滑模面求导数时出现负的指数项, 从而避免了奇异问题的发生.

同时, 参考文献[22], 引入终端吸引因子, 避免了较大幅度的抖振问题. 根据本文设计的非奇异快速终端滑模控制的特点, 设计吸引因子 \mathbf{Q} 为 $\mathbf{Q} = \mathbf{b}\lambda\mathbf{e}_n^{\lambda-1}$, 因此可得

$$\dot{\mathbf{S}} = -\mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}\mathbf{S} + \boldsymbol{\mu}\mathbf{S}^{m/n}), \quad (24)$$

其中: $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu}$ 是正定矩阵, m, n 是正奇数, 同时满足 $0 < m/n < 1$.

综合式(22)–(23)和式(24), 非奇异快速终端滑模的输入为

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{g}_n(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{d}}_n(t) - \dot{\mathbf{x}}_{nc} + \\ &(\lambda\mathbf{b})^{-1}(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{a}(\int_0^t \mathbf{e}_n(\tau) d\tau)^{\gamma-1} \mathbf{e}_n^{2-\lambda} + \\ &\mathbf{e}_n^{2-\lambda}) + \boldsymbol{\eta}\mathbf{S} + \boldsymbol{\mu}\mathbf{S}^{m/n}). \end{aligned} \quad (25)$$

3.2 稳定性分析(Convergence analysis)

引理 1 对于任意向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 满足下面的不等式^[23]:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \frac{\varepsilon^p}{p} \|\mathbf{x}\|^p + \frac{1}{q\varepsilon^q} \|\mathbf{y}\|^q, \quad (26)$$

其中: $\varepsilon > 0, p > 0, q > 1$ 并且满足 $(p-1)(q-1) = 1$. 当 $p = q = 2, \varepsilon^2 = 2$ 时, 不等式变为 $\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 0.25\|\mathbf{y}\|^2$.

定理 2 对于满足假设1和假设2, 虚拟输入为式(15)和式(19), 实际控制输入为式(25)的任意非线性系统, 系统状态可以在有限时间到达平衡位置.

证 定义Lyapunov函数

$$V = \sum_{i=1}^n V_i, \quad (27)$$

其中:

$$V_i = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\xi}_i^T \boldsymbol{\xi}_i + \mathbf{e}_{\text{NDO}_i}^T \mathbf{e}_{\text{NDO}_i}),$$

$$i = 1, \dots, n-1,$$

$$V_n = \frac{1}{2}(\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \mathbf{e}_{\text{NDO}_n}^T \mathbf{e}_{\text{NDO}_n}).$$

对 V_i (其中 $i \leq n-1$) 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \mathbf{e}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \boldsymbol{\xi}_i^T \dot{\boldsymbol{\xi}}_i + \mathbf{e}_{\text{NDO}_i}^T \dot{\mathbf{e}}_{\text{NDO}_i} = \\ & \mathbf{e}_i^T (-\mathbf{k}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{x})(\mathbf{e}_{i+1} + \boldsymbol{\xi}_i) + \\ & \mathbf{e}_{\text{NDO}_i}) + \boldsymbol{\xi}_i^T \dot{\boldsymbol{\xi}}_i + \mathbf{e}_{\text{NDO}_i}^T \dot{\mathbf{d}}_i + \\ & \mathbf{e}_{\text{NDO}_i}^T \mathbf{L}_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{\text{NDO}_i}. \end{aligned} \quad (28)$$

对 $\boldsymbol{\xi}_i$ 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}}_i &= \dot{\mathbf{x}}_{i+1c} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{i+1c} = \\ & \dot{\mathbf{x}}_{i+1c} + \frac{\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{x})^{-1}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{k}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) + \\ & \hat{\mathbf{d}}_i(t) - \hat{\mathbf{x}}_{ic}) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x})^{-1}((\mathbf{k}_i \dot{\mathbf{e}}_i + \\ & \frac{\mathbf{f}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\hat{\mathbf{d}}}_i(t) - \ddot{\mathbf{x}}_{ic}). \end{aligned} \quad (29)$$

由式(29)可得

$$\|\dot{\boldsymbol{\xi}}_i\| \leq \varphi_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_i, \hat{\mathbf{d}}_i, \dot{\mathbf{x}}_{i+1c}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}_{ic}, \ddot{\mathbf{x}}_{ic}), \quad (30)$$

其中 $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_i, \hat{\mathbf{d}}_i, \dot{\mathbf{x}}_{i+1c}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}_{ic}, \ddot{\mathbf{x}}_{ic})$ 是连续未知函数.

根据引理1, 将式(30)代入式(28)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{k}_i - 2\mathbf{I})\|\mathbf{e}_i\|^2 + \frac{\varphi_i^2}{4} + \\ & \mathbf{e}_i^T \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{i+1} + \delta_i^2 + \\ & (\frac{\|\mathbf{g}_i(\mathbf{x})\|^2}{4} + 1)\|\boldsymbol{\xi}_i\|^2 - \\ & \lambda_{\min}(\mathbf{L}_i(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\mathbf{I})\|\mathbf{e}_{\text{NDO}_i}\|^2 \leq \\ & -\zeta_i V_i + \frac{\varphi_i^2}{4} + \mathbf{e}_i^T \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{i+1} + \delta_i^2 \leq \\ & -\zeta_i V_i + \mathbf{e}_i^T \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{i+1} + \Gamma, \end{aligned} \quad (31)$$

其中:

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \min(2\lambda_{\min}(\mathbf{k}_i - 2\mathbf{I}), 2(-\frac{\|\mathbf{g}_i(\mathbf{x})\|^2}{4} - 1), \\ & 2\lambda_{\min}(\mathbf{L}_i(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\mathbf{I})), \\ \Gamma &= \frac{\varphi_i^2}{4} + \delta_i^2, \end{aligned}$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n-1} \dot{V}_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} (-\zeta_i V_i + \Gamma + \mathbf{e}_i^T \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{i+1}). \quad (32)$$

对 V_n 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{e}_{\text{NDO}_n}^T \dot{\mathbf{e}}_{\text{NDO}_n} = \\ & \mathbf{S}^T(\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{d}}_n(t) - \dot{\mathbf{x}}_{nc} + \\ & (\lambda \mathbf{b})^{-1}(\gamma \mathbf{a}(\int_0^t \mathbf{e}_n(\tau) d\tau)^{\gamma-1} \mathbf{e}_n^{2-\lambda} + \\ & \mathbf{e}_n^{2-\lambda})) - \mathbf{e}_{\text{NDO}_n}^T(\mathbf{L}_n(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{\text{NDO}_n} + \dot{\mathbf{d}}_n). \end{aligned} \quad (33)$$

根据引理1, 将式(25)代入式(33)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \mathbf{S}^T \mathbf{e}_{\text{NDO}_n} - \mathbf{S}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{S} - \mathbf{S}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{S}^{m/n} - \\ & \mathbf{e}_{\text{NDO}_n}^T \mathbf{L}_n(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{\text{NDO}_n} - \mathbf{e}_{\text{NDO}_n}^T \dot{\mathbf{d}}_n \leq \\ & -\lambda_{\min}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{I})\|\mathbf{S}\|^2 + \delta_n^2 - \\ & \lambda_{\min}(\mathbf{L}_n(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\mathbf{I})\|\mathbf{e}_{\text{NDO}_n}\|^2 - \\ & \lambda_{\min}(\boldsymbol{\mu})\|\mathbf{S}\|^{(m+n)/n} \leq \\ & -2\zeta_n V_n + \delta_n^2, \end{aligned} \quad (34)$$

其中: $\zeta_n = \min(\lambda_{\min}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{I}), \lambda_{\min}(\mathbf{L}_n(\mathbf{x}) - (1/2)\mathbf{I}))$, $(m+n)$ 是偶数, $\|\mathbf{S}\| \neq 0$ 并且 $\|\mathbf{S}\|^{(m+n)/n} > 0$. 变量满足 $\boldsymbol{\eta} > \mathbf{I}, \boldsymbol{\mu} > \mathbf{0}, \mathbf{L}_n(\mathbf{x}) > (1/2)\mathbf{I}$, 因此有

$$V_n(t) \leq \frac{\delta_n^2}{2\zeta_n} + (V_n(0) - \frac{\delta_n^2}{2\zeta_n})e^{-\zeta_n t}.$$

根据前面的分析, $V_n(t)$ 一致最终有界, 从而系统状态将会收敛到快速终端滑模面 $\mathbf{S} = \mathbf{0}$. 当系统状态收敛到滑模面时, 误差积分 $\boldsymbol{\sigma}$ 和误差积分的导数 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 也将趋近于0, 也就是说误差 \mathbf{e}_n 将会在有限时间内收敛到0.

当误差 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 在有限时间趋近于0时, 由式(31)可得

$$\dot{V}_{n-1} \leq -\zeta_{n-1} V_{n-1} + \Gamma. \quad (35)$$

等式两边同时乘以 $e^{\zeta t}$, 积分可得

$$V_{n-1}(t) \leq \frac{\Gamma}{\zeta_{n-1}} + (V_{n-1}(0) - \frac{\Gamma}{\zeta_{n-1}})e^{-\zeta t}. \quad (36)$$

由此可知 $V_{n-1}(t)$ 一致最终有界同时 \mathbf{e}_{n-1} 有限时间内收敛到0, 同理可证 \mathbf{e}_i 在有限时间内收敛到0. 从而可以证明整个系统的跟踪误差在有限时间内收敛到0, 可知系统状态在有限时间内收敛到平衡位置, 至此得证闭环系统是稳定的. 证毕.

4 仿真分析(Simulations and discussion)

为了论证本文设计方法的有效性,考虑带有非匹配干扰的三阶不确定系统^[19]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + d_1, \\ \dot{x}_2 = x_3 + d_2, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2x_3 + u + d_3, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (37)$$

其中复合干扰满足

$$\begin{cases} d_1 = \frac{x_1^2}{20} + 5 \sin(5\pi t + \frac{\pi}{2}), \\ d_2 = 10 \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) + 5t, \\ d_3 = \frac{x_1x_2}{5} + 25 \sin(0.5\pi t + \frac{\pi}{2}). \end{cases} \quad (38)$$

假设系统初始状态为[0 0 0],分别选择方波和正弦波作为参考输入.方波上升沿在0.5s,下降沿在1.5s.正弦波输入满足 $y_r = 10 \sin(2\pi t + \pi/2)$.设计控制参数如表1所示.

表1 控制系统参数
Table 1 Control system parameters

$\tau_1 = 0.01$	$k_2 = 22$	$q = 5$
$\tau_2 = 0.01$	$a = 5$	$\eta = 5$
$l_1 = 80$	$b = 5$	$\mu = 0.05$
$l_2 = 80$	$g = 5$	$m = 3$
$l_3 = 80$	$h = 3$	$n = 5$
$k_1 = 22$	$p = 7$	

为了验证本文所设计的非奇异终端滑模控制方法(NFTSMC)的优越性,下面与文献[19]设计的 L_2 滤波反步方法进行对比.图1-3表示两种不同控制方法的观测误差,其中观测误差定义为NDO估计误差与实际复合干扰的差.可以看出本文设计的控制方法使得NDO的观测误差迅速收敛到较小的区间内,而文献[19]设计的方法观测误差收敛速度较慢.

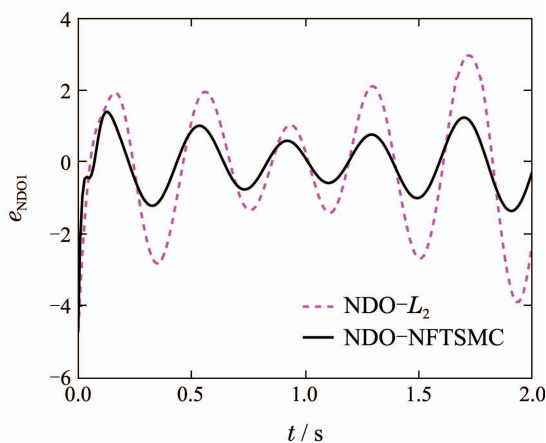


图1 第1级子系统NDO观测误差对比
Fig. 1 First NDO estimation error

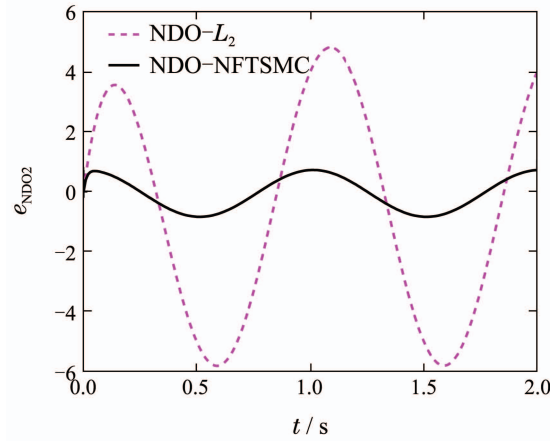


图2 第2级子系统NDO观测误差对比
Fig. 2 Second NDO estimation error

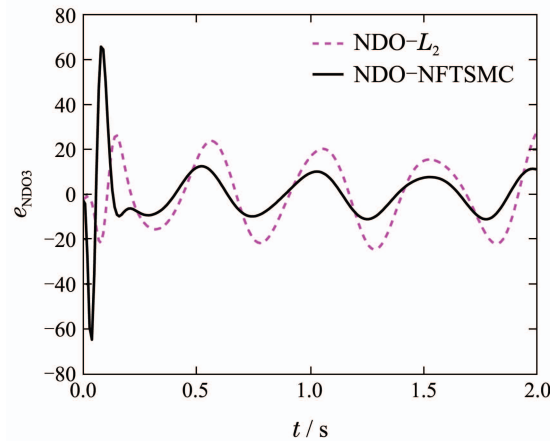


图3 第3级子系统NDO观测误差对比
Fig. 3 Third NDO estimation error

图4-5与图6-7分别选择方波信号和正弦信号作为参考输入,同时对研究两种控制方法的输出响应和跟踪误差.

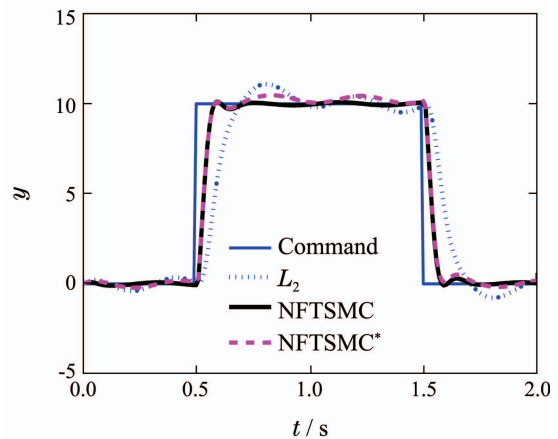


图4 方波作为参考输入时不同方法控制下的系统响应
Fig. 4 Output responses with rectangular shape commanded input under different control laws

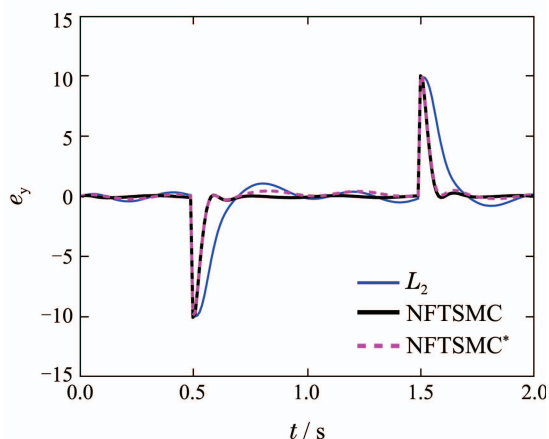


图5 方波作为参考输入时不同方法控制下的跟踪误差
Fig. 5 Tracking error with rectangular shape commanded input under different control laws

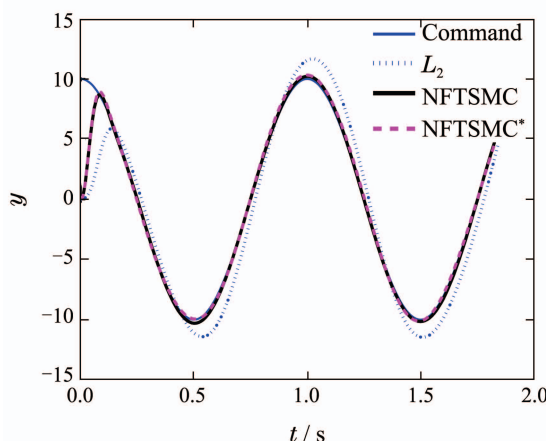


图6 正弦波作为参考输入时不同方法控制下的系统响应
Fig. 6 Output responses error with sinusoidal signal commanded input under different control laws

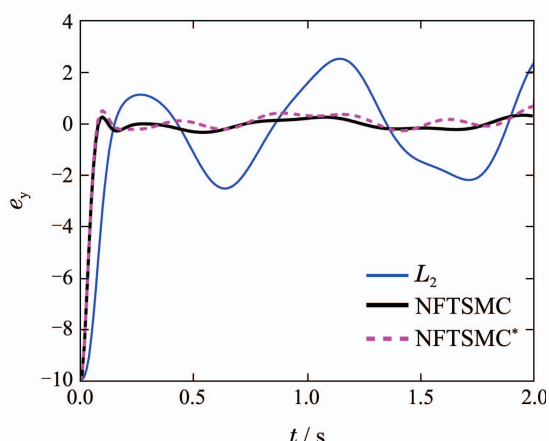


图7 正弦波作为参考输入时不同方法控制下的跟踪误差
Fig. 7 Tracking error with sinusoidal signal commanded input under different control laws

图4-7中“NFTSMC”表示含有NDO估计复合干扰NFTSMC方法的响应和跟踪误差,“NFTSMC*”表示没有NDO估计复合干扰的NFTSMC方法的响应

和跟踪误差.可以看出,和 L_2 滤波反步方法相比,本文设计的NFTSMC方法响应速度更快,跟踪误差收敛到0的时间更短.即使在没有NDO估计的情况下,NFTSMC方法的响应依然比 L_2 滤波反步方法的响应速度快,跟踪误差收敛到0的时间也很短,说明本文设计的NFTSMC方法有很强的鲁棒性,可以保证一定干扰的稳定性.

5 结论(Conclusions)

本文针对一类含有多种未知非匹配干扰的非线性系统,利用滤波反步法的思想通过分步求解虚拟控制变量,将高阶系统的设计问题分解为一系列低阶子系统的控制律设计问题,消除了非匹配干扰的现象,引入了非线性干扰观测器对复合干扰进行估计,从而对滤波反步方法得到的虚拟控制变量进行修正,同时设计了一种新的非奇异快速终端滑模面,确保系统跟踪误差可以在有限时间内收敛.整个系统的稳定性通过Lyapunov函数得以证明,最后通过与 L_2 滤波反步方法进行对比,证明了本文设计的方法的优越性.

参考文献(References):

- [1] ZAMES G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, 26(2): 301 – 320.
- [2] CHEN H F, GUO L, ZHANG J F. *Identification and Adaptive Control for ARMAX Systems* [M]. Berlin: Springer, 1991.
- [3] XU B, SHI Z, YANG C. Composite fuzzy control of a class of uncertain nonlinear systems with disturbance observer [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 80(1/2): 341 – 351.
- [4] VENKATARAMAN S T, GULATI S. Terminal sliding modes: a new approach to nonlinear control synthesis [C] // *The 5th International Conference on Advanced Robotics*. Pisa, Italy: IEEE, 1991: 443 – 448.
- [5] FENG Y, YU X, MAN Z. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators [J]. *Automatica*, 2002, 38(12): 2159 – 2167.
- [6] YU X, MAN Z. Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems [J]. *IEEE Transactions on Circuits & Systems I Fundamental Theory & Applications*, 2002, 49(2): 261 – 264.
- [7] YANG L, YANG J. Nonsingular fast terminal sliding-mode control for nonlinear dynamical systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(16): 1865 – 1879.
- [8] WEI X, GUO L. Composite disturbance-observer-based control and H_∞ control for complex continuous models [J]. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2010, 20(1): 106 – 118.
- [9] WEI X, GUO L. Composite disturbance-observer-based control and terminal sliding mode control for non-linear systems with disturbances [J]. *International Journal of Control*, 2009, 82(6): 1082 – 1098.
- [10] WANG Yanmin, FENG Yong, XIA Hongwei, et al. Smooth nonsingular terminal sliding mode control of uncertain multi-input systems [J]. *Control and Decision*, 2015(1): 161 – 165.
(王艳敏, 冯勇, 夏红伟, 等. 多输入不确定系统的平滑非奇异终端滑模控制 [J]. *控制与决策*, 2015(1): 161 – 165.)
- [11] WON M, HEDRICK J K. Multiple-surface sliding control of a class of uncertain nonlinear systems [J]. *International Journal of Control*, 1996, 64(4): 693 – 706.

- [12] XU B, WANG S, GAO D, et al. Command filter based robust nonlinear control of hypersonic aircraft with magnitude constraints on states and actuators [J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2013, 73(1/2/3/4): 233 – 247.
- [13] CHEN W H, BALLANCE D J, GAWTHROP P J, et al. A nonlinear disturbance observer for robotic manipulators [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2000, 47(4): 932 – 938.
- [14] CHEN X S, YANG J, LI S H, et al. Disturbance observer based multi-variable control of ball mill grinding circuits [J]. *Journal of Process Control*, 2009, 19(7): 1205 – 1213.
- [15] LI Wenwen, JIANG Changsheng. Dynamic inversion control for autopilot of BTT missile based on nonlinear disturbance observer [J]. *Aero Weaponry*, 2008(3): 29 – 35.
(李雯雯, 姜长生. 基于动态逆非线性干扰观测器的BTT导弹自动驾驶仪设计 [J]. 航空兵器, 2008(3): 29 – 35.)
- [16] HE Yuebang, PEI Hailong, ZHAO Yunji, et al. Flight control design of unmanned helicopter based on robust integral filtering backstepping [J]. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2013, 41(2): 30 – 36.
(贺跃帮, 裴海龙, 赵运基, 等. 无人直升机鲁棒积分滤波反步法飞行控制设计 [J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2013, 41(2): 30 – 36.)
- [17] BU Xiangwei, WU Xiaoyan, CHEN Yongxing, et al. Adaptive backstepping control of hypersonic vehicles based on nonlinear disturbance observer [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2014(5): 44 – 49.
(卜祥伟, 吴晓燕, 陈永兴, 等. 非线性干扰观测器的高超声速飞行器自适应反演控制 [J]. 国防科技大学学报, 2014(5): 44 – 49.)
- [18] SUN H, GUO L. Composite adaptive disturbance observer based control and back-stepping method for nonlinear system with multiple mismatched disturbances [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2014, 351(2): 1027 – 1041.
- [19] JIA Heming, SONG Wenlong. L_2 filtered backstepping control based on nonlinear disturbance observer [J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2014, 45(8): 2640 – 2647.
(贾鹤鸣, 宋文龙. 基于非线性干扰观测器的 L_2 滤波反步控制 [J]. 中南大学学报(自然科学版), 2014, 45(8): 2640 – 2647.)
- [20] CHEN W H. Nonlinear disturbance observer-enhanced dynamic inversion control of missiles [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, 26(1): 161 – 166.
- [21] ZHOU L, JIANG C, DU Y. A robust and adaptive terminal sliding mode control based on backstepping [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(6): 678 – 682.
- [22] YU S, YU X, MAN Z. Robust global terminal sliding mode control of SISO nonlinear uncertain systems [C] // *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney, Australia: IEEE, 2000: 2198 – 2203.
- [23] KRISTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P. Nonlinear and adaptive control design [J]. *Systems for Signal Processing Communications & Control*, 1995, 5(2): 4475 – 4480.

作者简介:

杨晓骞 (1991–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为飞行器动力学与控制, E-mail: xiaoqian380@163.com;

李健 (1973–), 男, 教授, 目前研究方向为飞行器动力学与控制, E-mail: lj_good@hotmail.com;

董毅 (1990–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为飞行器动力学与控制, E-mail: dy_nudt2013@hotmail.com.