第 31 卷第 3 期
2014 年 3 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 31 No. 3
Mar. 2014

DOI: 10.7641/CTA.2014.13006

时变系统的模型匹配与跟踪问题

刘 浏[1,2†], 卢玉峰[1]

(1. 大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116024; 2. 大连理工大学 控制科学与工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 仿照时不变系统的次优模型匹配解的存在性证明方法, 可以得到J–谱分解条件下时变系统的Nehari型模型匹配问题的次优解存在性. 如何针对双边模型匹配的次优问题证明解的存在性还没有有效的方法. 本文在套代数框架下研究了时变线性系统的次优模型匹配和跟踪问题. 首先, 应用Douglas值域定理证明了耦合J–谱分解条件下次优模型匹配解的存在性, 然后指出应用双参数控制器同时镇定n个系统, 并且要求跟踪指标小于r的次优跟踪问题等价于同时强r镇定$n-1$个相关四块问题, 最后给出了次优解的参数化.

关键词: 次优控制; 模型匹配; J–谱分解; 同时镇定; 时变系统

中图分类号: O177.1　　**文献标识码**: A

Suboptimal model-matching and tracking problem of time-varying systems

LIU Liu[1,2†], LU Yu-feng[1]

(1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China;
2. School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China)

Abstract: The existence of suboptimal solutions to the Nehari-type model-matching problem of time-varying system has been obtained by employed the same method used in the time-invariant case. Unfortunately there is no effective way to prove the existence of suboptimal solutions to the bilateral model-matching problem of time-varying case. This paper deals with the suboptimal model-matching problem and the suboptimal tracking problem using two-parameter controller for discrete time-varying linear systems in the frame work of nest algebra. According to Douglas's range inclusion theorem, the existence of two coupled J-spectral factorizations determined by the models implies the existence of suboptimal solutions to the model matching problem. Furthermore, it is proved that the problem of simultaneously stabilizing n plants by two-parameter controller with the tracking performance less than a prescribed level r is equivalent to the problem of simultaneously strongly-r stabilizing $n-1$ associated four block systems.

Key words: suboptimal control; model-matching; J–spectral factorization; simultaneous stabilization; time-varying system

1 引言(Introduction)

线性系统的模型匹配问题已在多种框架下研究[1–3]. 关于H_∞控制中的最优模型匹配何时有解的问题最早被B. A. Francis和G. Zames[3]解决. 数量值H_∞控制中, 模型匹配的最优性能指标等于某Hankel算子的范数. 然而对于矩阵值情形, 最优指标还没有很好的刻画. 随着H_∞控制理论的发展和完善, 开始考虑更一般的时变线性系统的控制理论. 在算子理论框架下, 稳定的、关联的离散时变线性系统集构成一个离散套代数. 20世纪80年代, 数学家和控制学家们开启基于套代数理论的无穷维时变线性系统(即系统有无穷多个状态) 的控制理论研究. 至今, 这一领域已吸引众多学者并得到大量的成果[4–6]. A. Feintuch 和 B. A. Francis[1]给出时变线性系统的模型匹配问题的最优性能等于一族算子范数的上确界.

针对次优模型匹配问题, 得到有限维时不变线性系统的Nehari型模型匹配问题的次优解存在当且仅当J–谱分解存在, 在此条件下给出次优控制器的参数化[7]. 这个结果从简单的Nehari–型推广到一般的标准H_∞问题中[8]. 而后针对时不变线性系统, M. Green和K. Glover[9]摒弃Ball-Helton-Verma构造的传统J–谱分解理论, 给出一对耦合J–谱分解条件并证明这组耦合的J–分解存在性和双边模型匹配次优解存在性等价. A. Feintuch[2]强调J–谱分解是时变Nehari型模型匹配次优解存在的充分非必要条件, 这与时不变情形不同.

收稿日期: 2013–01–05; 收修改稿日期: 2013–12–18.
†通信作者. E-mail: beth.liu@dlut.edu.cn; Tel.: +86 411-84708351-8043.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11301047, 11271059); 教育部博士后基金资助项目(2013M541216).

本文在套代数框架下分析无穷维时变线性系统的模型匹配和跟踪问题. 首先, 给出单边模型匹配的次优解的参数化. 在耦合的J–谱分解条件下, 应用Douglas值域定理证明双边模型匹配问题存在次优解. 这些结论本质上推广了Nehari型次优模型匹配的结论[2]. 然后给出满足次优跟踪指标的双参数镇定控制器的参数化. 进而, 根据同时H_∞镇定问题[10] 构造多个系统的双参数控制器跟踪问题, 并且借助两个时不变线性系统的同时H_∞镇定控制器的设计等价于强H_∞镇定问题[11]的思想, 在J–谱分解存在的条件下, 将跟踪指标小于r的n个时变系统的双参数镇定控制器设计转化为$n-1$个四块系统的强r镇定控制器设计. 最后, 给出所有这种类型的双参数控制器的描述.

2 基础知识(Preliminaries)

设输入输出信号空间$\mathcal{H}$为平方可和的复Hilbert空间:

$$\mathcal{H}=\{(x_0,x_1,\cdots):x_i\in\mathbb{C},\sum_{i=0}^{\infty}|x_i|^2<\infty\}.$$

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$是$\mathcal{H}$上的全体有界线性算子构成的集合. 算子范数为

$$||T||=\sup_{x\in\mathcal{H},||x||\leqslant 1}||Tx||,\ T\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

若存在$(\epsilon>0)\epsilon\geqslant 0$使得

$$\langle Tx,x\rangle\geqslant\epsilon||x||^2,\ \forall x\in\mathcal{H},$$

称T是(严格)正算子. “$*$”表示算子的共轭.

本文研究的时变线性系统L是$\mathcal{H}$上满足$P_nLP_n=P_nL$的线性变换, 其中P_n是$\mathcal{H}$ 上的截断投影算子, $n\geqslant 0$. $\mathcal{H}$上的有界下三角算子即稳定的时变线性系统. 记$\mathcal{L}$为全体时变线性系统构成的集合. 稳定的时变线性系统构成的集合记为$\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$是一个离散套代数.

符号$\mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$表示以$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的元素为元的$2\times 2$算子矩阵构成的集合. 符号$M_{m\times n}(\mathcal{S})$表示以$\mathcal{S}$中的元素为元的$m\times n$算子矩阵构成的集合. $U_n(\mathcal{S})$表示$M_{m\times n}(\mathcal{S})$中的可逆元构成的集合.

引理 1[12] 设T是$\mathcal{H}$上的一个正算子, 则T存在外谱分解$T=MM^*$, 其中$M\in U_1(\mathcal{S})$.

设$W\in\mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}), Q\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$. 单应变换定义为

$$\mathrm{HM}(W;Q):=(W_{11}Q+W_{12})(W_{21}Q+W_{22})^{-1}.$$

引理 2[13] 设 $W_1,W_2\in\mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}),\ U_1,U_2\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$. 则

1) $\mathrm{HM}(W_1;\mathrm{HM}(W_2;U_1))=\mathrm{HM}(W_1W_2;U_1)$;

2) 若$W\in\mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$可逆且$\mathrm{HM}(W;U_1)=U_2$, 则$U_1=\mathrm{HM}(W^{-1};U_2)$.

针对系统L, 若存在一个控制器$C\in\mathcal{L}$使得$\begin{bmatrix}I & C\\ -L & I\end{bmatrix}^{-1}\in M_{2\times 2}(\mathcal{S})$, 则称$L\in\mathcal{L}$可镇定. 系统的素分解是刻画镇定控制器的重要工具. 设$M,N,\hat{M},\hat{N}\in\mathcal{S}$. 如果$L=NM^{-1}$ 并且 M,N在$\mathcal{S}$中右互素, 称NM^{-1}是L的右素分解. 如果$L=\hat{M}^{-1}\hat{N}$ 且 $\hat{M},\hat{N}$在$\mathcal{S}$中左互素, 称$\hat{M}^{-1}\hat{N}$是L的左素分解.

下面是刻画镇定控制器的Youla参数化定理.

定理 1[1] $L\in\mathcal{L}$可镇定当且仅存在$M,N,X,Y,\hat{M},\hat{N},\hat{X},\hat{Y}\in\mathcal{S}$ 使得$\hat{M}^{-1}\hat{N}$与NM^{-1}分别为L的左、右素分解且满足双Bezout恒等式

$$\begin{bmatrix}Y & X\\ -\hat{N} & \hat{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M & -\hat{X}\\ N & \hat{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M & -\hat{X}\\ N & \hat{Y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y & X\\ -\hat{N} & \hat{M}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}. \quad (1)$$

$C\in\mathcal{L}$镇定L当且仅当C有如下形式:

$$C=(\hat{X}+MQ)(\hat{Y}-NQ)^{-1}=(Y-Q\hat{N})^{-1}(X+Q\hat{M}),$$

其中$Q\in\mathcal{S}$.

3 模型匹配问题(Model-matching problem)

给定算子$A,B,C\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$及常数$r>0$. A表示欲被BQC匹配的“模型”. 模型匹配问题旨在研究满足$||A+BQC||<r$的算子$Q\in\mathcal{S}$的存在性及形式刻画.

本文将基于假设1讨论问题:

假设 1 1) B在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中左可逆. 2) C在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中右可逆.

为了方便后面的书写, 下面给出几个记号和说明.

$$J_{\mathrm{r}}:=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & -r^2I\end{bmatrix},\ G:=\begin{bmatrix}B & A\\ 0 & I\end{bmatrix}.$$

针对可镇定系统L, 不做特别说明时, 默认$\hat{M}^{-1}\hat{N}$和NM^{-1}是满足双Bezout 等式(1)的左右素分解.

引理 3[2] 给定$T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\hat{G}=\begin{bmatrix}I & T\\ 0 & I\end{bmatrix}$. 如果$W\in U_2(\mathcal{S})$满足$\hat{G}^*J_{\mathrm{r}}\hat{G}=W^*J_{\mathrm{r}}W$且$W_{11}\in U_1(\mathcal{S})$, 则满足$||Q+T||<r$的算子$Q\in\mathcal{S}$有如下形式:

$$Q=Q_1Q_2^{-1},\ \begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{bmatrix}=W^{-1}\begin{bmatrix}U\\ I\end{bmatrix},\ U\in\mathcal{S},\ ||U||<r.$$

首先考虑$C=I$或者$B=I$的单边模型匹配问题.

定理 2 如果$W\in U_2(\mathcal{S})$满足$G^*J_{\mathrm{r}}G=W^*J_{\mathrm{r}}W$且$W_{11}\in U_2(\mathcal{S})$, 则

$$d(A,B\mathcal{S}):=\inf_{Q\in\mathcal{S}}||A+BQ||<r.$$

证 记$W^{-1}=V=\begin{bmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathcal{S})$. 简

单整理得

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ W_{21}W_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22}-W_{21}W_{11}^{-1}W_{12} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} I & W_{11}^{-1}W_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

因此

$$V_{22}^{-1} = W_{22} - W_{21}W_{11}^{-1}W_{12} \in \mathcal{S}.$$

令$Q = V_{12}V_{22}^{-1} \in \mathcal{S}$, 则

$$\begin{bmatrix} A+BQ \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix} = GV \begin{bmatrix} 0 \\ V_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

整理得

$$(A+BQ)^*(A+BQ) - r^2I =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ V_{22}^{-1} \end{bmatrix}^* V^*G^*J_{\mathrm{r}}GV \begin{bmatrix} 0 \\ V_{22}^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$-r^2(V_{22}^{-1})^*V_{22}^{-1} < 0,$$

故$||A+BQ|| < r$.

定理 3 如果$W \in U_2(\mathcal{S})$满足$W_{11} \in U_1(\mathcal{S})$且$G^*J_{\mathrm{r}}G = W^*J_{\mathrm{r}}W$, 则满足$||A+BQ|| < r$的算子$Q \in \mathcal{S}$有如下的形式:

$$Q = Q_1Q_2^{-1},\ \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix},\ U \in \mathcal{S},\ ||U|| < r.$$

证 由B的左可逆性得$B^*B > 0$. 根据引理1, 存在$B_0 \in U_1(\mathcal{S})$满足$B^*B = B_{\mathrm{o}}^*B_{\mathrm{o}}$. 令$B_i = BB_{\mathrm{o}}^{-1}$, 易见$B = B_iB_{\mathrm{o}}$, $B_i^*B_i = I$且$\begin{bmatrix} B_i^* \\ I - B_iB_i^* \end{bmatrix}$是等距. 观察得

$$||A+BQ|| < r \Leftrightarrow$$

$$\left\|\begin{bmatrix} B_i^* \\ I - B_iB_i^* \end{bmatrix}(A + B_iB_{\mathrm{o}}Q)\right\| < r \Leftrightarrow$$

$$r^2I - (B_i^*A + B_{\mathrm{o}}Q)^*(B_i^*A + B_{\mathrm{o}}Q) -$$

$$A^*(I - B_iB_i^*)A > 0 \Leftrightarrow$$

$$\exists\, M,\ M^{-1} \in \mathcal{S},$$

$$\text{s.t. } r^2I - A^*(I - B_iB_i^*)A = r^2M^*M,$$

$$r^2M^*M > (B_i^*A + B_{\mathrm{o}}Q)^*(B_i^*A + B_{\mathrm{o}}Q).$$

则$Q \in \mathcal{S}$满足$||A+BQ|| < r$当且仅当Q满足

$$||B_i^*AM^{-1} + B_{\mathrm{o}}QM^{-1}|| < r,$$

其中$M \in U_1(\mathcal{S})$且

$$r^2 - A^*A = r^2M^*M - A^*B_iB_i^*A.$$

因此刻画满足$||A+BQ|| < r$的算子Q, 只需刻画满足条件$||B_i^*AM^{-1} + B_{\mathrm{o}}QM^{-1}|| < r$的算子$Q$. 令$X = W\begin{bmatrix} B_{\mathrm{o}}^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}$, 则$X_{11} = W_{11}B_{\mathrm{o}}^{-1}$在$\mathcal{S}$中可逆. 记$\hat{G} = \begin{bmatrix} I & B_i^*AM^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$. 易证$\hat{G}^*J_{\mathrm{r}}\hat{G} = X^*J_{\mathrm{r}}X$.

根据引理3, 满足

$$||B_i^*AM^{-1} + B_{\mathrm{o}}QM^{-1}|| < r$$

的$\hat{Q} = B_{\mathrm{o}}QM^{-1}$形如$\hat{Q} = \hat{Q}_1\hat{Q}_2^{-1}$, 其中:

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_2 \end{bmatrix} = X^{-1}\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\mathrm{o}} & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} W^{-1} \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix},$$

$$U \in \mathcal{S},\ ||U|| < r.$$

设$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = W^{-1}\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}$, 则$\begin{bmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\mathrm{o}}Q_1 \\ MQ_2 \end{bmatrix}$. 因此$B_{\mathrm{o}}QM^{-1} = B_{\mathrm{o}}Q_1Q_2^{-1}M^{-1}$, 进而可得$Q = Q_1Q_2^{-1}$.

下面的结果是定理2和定理3的对偶形式.

定理 4 设$A, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$且$H = \begin{bmatrix} C & 0 \\ A & I \end{bmatrix}$. 如果$V \in U_2(\mathcal{S})$满足$HJ_{\mathrm{r}}H^* = VJ_{\mathrm{r}}V^*$且$V_{11} \in U_1(\mathcal{S})$, 则

$$d(A, \mathcal{S}C) := \inf_{Q \in \mathcal{S}} ||A + QC|| < r,$$

且满足$||A+QC|| < r$的$Q \in \mathcal{S}$有如下形式:

$$Q = Q_2^{-1}Q_1,\ [Q_1\ \ Q_2] = [U\ \ I]V^{-1},\ U \in \mathcal{S},\ ||U|| < r.$$

下面考虑J–谱分解与双边次优模型匹配解的关系.

引理 4 如果存在可逆元$W \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$满足$W_{11}$在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中可逆且$G^*J_{\mathrm{r}}G = W^*J_{\mathrm{r}}W$成立, 则满足$||A+BQ|| < r$的算子$Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$有如下形式:

$$Q = Q_1Q_2^{-1},\ \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = W^{-1}\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix},\ U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ ||U|| < r.$$

引理4的证明类似于定理2和定理3的证明.

Douglas值域定理[14] 设$X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$且常数$r \geqslant 0$, 则下列条件等价:

a) 存在$\mathcal{H}$上的算子U满足$XU = Y$并且$||U|| \leqslant r$.

b) $YY^* \leqslant r^2XX^*$.

下面证明当“模型”确定的一对耦合J–谱分解存在时, A到集合$B\mathcal{S}C$的距离小于r, 并且刻画所有次优解.

定理 5 假设$\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$中的可逆元$W$满足:

1) $G^*J_{\mathrm{r}}G = W^*J_{\mathrm{r}}W$;

2) W_{11}在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中可逆.

如果$V \in U_2(\mathcal{S})$满足$V_{11} \in U_1(\mathcal{S})$且

$$HJ_{\rm r}H^* = VJ_{\rm r}V^*,$$

其中: $H=\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\hat{J}W^{-1}\hat{J}^*$, $\hat{J}=\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$, 那么存在$Q \in \mathcal{S}$满足$||A+BQC|| < r$.

满足$||A+BQC|| < r$的$Q \in \mathcal{S}$形如

$$Q=Q_2^{-1}Q_1,\ [Q_1\ \ Q_2]=[U\ \ I]V^{-1},\ U\in\mathcal{S},\ \|U\|<r.$$

证　令$W^{-1} = K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$. 根据引理4, 满足$||A+B\hat{Q}|| < r$的$\hat{Q} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$有如下形式:

$$\hat{Q} = (K_{11}\hat{U}+K_{12})(K_{21}\hat{U}+K_{22})^{-1},\ ||\hat{U}|| < r. \tag{2}$$

令$V^{-1} = F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathcal{S})$. 那么

$$V^{-1}H = F\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\hat{J}K\hat{J}^* =$$

$$\begin{bmatrix} F_{11}CK_{22}-F_{12}K_{12} & F_{12}K_{11}-F_{11}CK_{21} \\ F_{21}CK_{22}-F_{22}K_{12} & F_{22}K_{11}-F_{21}CK_{21} \end{bmatrix}.$$

由$HJ_{\rm r}H^* = VJ_{\rm r}V^*$得$V^{-1}HJ_{\rm r}(V^{-1}H)^* = J_{\rm r}$. 比较等式$V^{-1}HJ_{\rm r}(V^{-1}H)^* = J_{\rm r}$的$(2,2)$位置,

$$(F_{21}CK_{22}-F_{22}K_{12})(F_{21}CK_{22}-F_{22}K_{12})^* - r^2(F_{22}K_{11}-F_{21}CK_{21})(F_{22}K_{11}-F_{21}CK_{21})^* = -r^2I.$$

整理得

$$(F_{21}CK_{22}-F_{22}K_{12})(F_{21}CK_{22}-F_{22}K_{12})^* < r^2(F_{22}K_{11}-F_{21}CK_{21})(F_{22}K_{11}-F_{21}CK_{21})^*.$$

根据Douglas值域定理, 存在$\hat{U}_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$满足$||\hat{U}_0|| < r$及

$$F_{21}CK_{22}-F_{22}K_{12}=(F_{22}K_{11}-F_{21}CK_{21})\hat{U}_0. \tag{3}$$

由条件$V \in U_2(\mathcal{S})$及$V_{11} \in U_1(\mathcal{S})$, 得$F_{22} \in U_1(\mathcal{S})\mathcal{S}$. 因而, 式(3)可重写为

$$F_{22}^{-1}F_{21}C(K_{22}+K_{21}\hat{U}_0) = K_{11}\hat{U}_0+K_{12}.$$

令$Q = F_{22}^{-1}F_{21} \in \mathcal{S}$. 于是

$$QC = (K_{11}\hat{U}_0+K_{12})(K_{21}\hat{U}_0+K_{22})^{-1},\ ||\hat{U}_0|| < r.$$

观察式(2)得$||A+BQC|| < r$.

次优解Q的参数化证明类似于文献[9]中定理2.6的证明, 这里省略.

注 1　1) 定理5中的第1个J–谱分解因子属于$\mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$即可, 不要求因子属于$M_{2\times 2}(\mathcal{S})$. 这不同于$\mathrm{H}_\infty$控制中的时不变情形, 时不变系统的$J$–谱分解因子要求是关联的时不变系统.

2) 时不变系统的模型匹配次优解存在性与J–谱分解的存在性是等价的. 而对于时变系统而言, J–谱分解的存在是模型匹配次优解存在的充分非必要条件, 详细可见文献[2].

4　双参数控制器的跟踪问题(Tracking problem using two-parameter compensator)

跟踪问题中, 系统L的输出y跟踪参考信号r. 单参数控制器的最优跟踪问题是选取适当的控制器最小化下面的跟踪指标

$$J_C = \sup_{r\in\mathcal{H},||r||\leqslant 1} ||r-y|| = \sup_{r\in\mathcal{H},||r||\leqslant 1} ||(I-L(I+CL)^{-1})r|| = ||I-L(I+CL)^{-1}||.$$

M. Vidyasagar[15]指出在处理跟踪问题上, 双参数控制器优于单参数控制器.

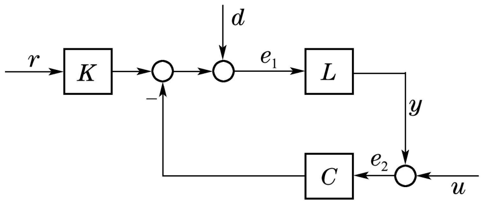

图 1　双参数控制器

Fig. 1　Two-parameter compensator

考虑图1中的双参数控制器装置. 设r是参考信号, d和u是传感噪声. 双参数控制器$[K\ \ C]$镇定$L \in \mathcal{L}$, 意指由$\begin{bmatrix} r \\ d \\ u \end{bmatrix}$到$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$的变换是$M_{2\times 3}(\mathcal{S})$中的元素.

引理 5[15]　设$L\in\mathcal{L}$. 则存在双参数控制器$[K\ \ C]$镇定L当且仅当L存在左、右素分解满足Bezout等式(1). 镇定控制器形如

$$[K\ \ C] = (Y-Q\hat{N})^{-1}[S\ \ X+Q\hat{M}],$$

其中$S, Q \in \mathcal{S}$.

下面根据引理5, 刻画一族系统的双参数同时镇定控制器.

引理 6　设$L_0, L_1,\cdots, L_n$可镇定. 如果$\hat{M}_i^{-1}\hat{N}_i$, $N_iM_i^{-1}$分别是L_i满足双Bezout等式的左、右素分解. 则$[K\ \ C]$同时镇定$L_0, L_1,\cdots, L_n$当且仅当

$$[K\ \ C] = (Y_0-Q_0\hat{N}_0)^{-1}[S_0\ \ X_0+Q_0\hat{M}_0],$$

其中: $S_0, Q_0 \in \mathcal{S}$满足$R_i+Q_0T_i$在$\mathcal{S}$中可逆,

$$R_i = Y_0M_i + X_0Ni,$$

$$T_i = -\hat{N}_0M_i + \hat{M}_0N_i,\ i=1,\cdots,n.$$

注 2 图1中的装置在$C=K$时是一个标准的反馈装置. 根据引理5, 使用双参数控制器镇定L相比于单参数控制器而言并没有优势, 而双参数控制器在处理最优和次优问题上有着显著的优势.

双参数控制器的跟踪指标是

$$J_{[K\ \ C]}=\sup_{r\in\mathcal{H},\|r\|\leqslant 1}\|r-y\|=\sup_{r\in\mathcal{H},\|r\|\leqslant 1}\|(I-L(I+CL)^{-1}K)r\|=\|(I-L(I+CL)^{-1}K)\|.$$

应用镇定控制器的参数化定理得

$$\|I-L(I+CL)^{-1}\|=\|I-NY+NQ\hat{N}\|$$

和

$$\|I-L(I+CL)^{-1}K\|=\|I-NS\|.$$

显然,

$$\min_{[K\ \ C]\text{镇定}L}J_{[K\ \ C]}\leqslant\min_{C\text{镇定}L}J_C.$$

M. Vidyasatar给出了一族系统L满足

$$\min_{[K\ \ C]\text{镇定}L}J_{[K\ \ C]}<\min_{C\text{镇定}L}J_C.$$

详见文献[15].

下面考虑双参数控制器的次优跟踪问题.

定理 6 设$L\in\mathcal{L}$可镇定, 且$\hat{G}=\begin{bmatrix}-N & I\\ 0 & I\end{bmatrix}$在$\mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$中左可逆. 假设$W\in U_2(\mathcal{S})$满足$\hat{G}^*J_{\mathrm{r}}\hat{G}=W^*J_{\mathrm{r}}W$. 如果$W_{11}\in U_1(\mathcal{S})$, 则$[K\ \ C]$镇定$L$并满足$J_{[K\ \ C]}<r$当且仅当

$$[K\ \ C]=(Y-Q\hat{N})^{-1}[\mathrm{HM}(W^{-1};U)\ \ X+Q\hat{M}],$$

其中$U,Q\in\mathcal{S}$且$\|U\|<r$.

定义 1 给定$W\in M_{2\times 2}(\mathcal{S})$及常数$r>0$. 如果存在$K\in\mathcal{S}$满足$\mathrm{HM}(W;K)\in\mathcal{S}$, $\|K\|<r$及$\|\mathrm{HM}(W;K)\|<r$, 则称W为强r可镇定的.

n个系统的同时镇定问题可以转化为$n-1$个系统的强同时稳定问题. 借由这个思想, 下面将n个系统的同时跟踪问题转化为同时强r镇定$n-1$个四块系统的问题.

定理 7 设$L_0,L_1\in\mathcal{L}$可镇定, 且$G_i=\begin{bmatrix}-N_i & I\\ 0 & I\end{bmatrix}$在$\mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$中左可逆. 假设$W_i\in U_2(\mathcal{S})$满足${G_i}^*J_{\mathrm{r}}G_i={W_i}^*J_{\mathrm{r}}W_i, i=0,1$. 如果$W_i$的$(1,1)$元在$\mathcal{S}$中可逆, 则$[K\ \ C]$镇定$L_0$和$L_1$并满足$J_{[K\ \ C]}<r$当且仅当存在下列条件成立:

1) 存在$Q_0\in\mathcal{S}$使得$R_1+Q_0T_1$在$\mathcal{S}$中可逆;

2) $W_1W_0^{-1}$是强r可镇定的.

此类双参数控制器有如下形式:

$$[K\ \ C]=(Y_0-Q_0\hat{N}_0)^{-1}[\mathrm{HM}(W_0^{-1},U_0)\ \ X_0+Q_0\hat{M}_0],$$

其中: $U_0,Q_0\in\mathcal{S}$, $\|U_0\|<r$, $\|\mathrm{HM}(W_iW_0^{-1},U_0)\|<r$且$R_1+Q_0T_1$在$\mathcal{S}$中可逆.

证 根据引理6, $[K\ \ C]$可同时镇定L_0,L_1当且仅当存在$Q_0,S_0\in\mathcal{S}$使得$R_1+Q_0T_1$在$\mathcal{S}$中可逆, 且

$$\begin{cases}C=(Y_0-Q_0\hat{N}_0)^{-1}(X_0+Q_0\hat{M}_0),\\ K=(Y_0-Q_0\hat{N}_0)^{-1}S_0,\\ \|I-N_iS_0\|<r,\ i=0,1.\end{cases}\tag{4}$$

由定理4的假设条件知式(4)成立当且仅当存在$U_i\in\mathcal{S}$满足$\|U_i\|<r$, 使得

$$S_0=\mathrm{HM}(W_0^{-1};U_0)=\mathrm{HM}(W_1^{-1};U_1).\tag{5}$$

根据引理2, 式(5)等价于$U_1=\mathrm{HM}(W_1W_0^{-1};U_0)$. 因此$U_0\in\mathcal{S}$强$r$镇定四块系统$W_1W_0^{-1}$.

定理 8 设$L_0,L_1,\cdots,L_n\in\mathcal{L}$可镇定. $G_i=\begin{bmatrix}-N_i & I\\ 0 & I\end{bmatrix}$是$\mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$中的可逆元, $i=0,1,\cdots,n$. 假设$W_i\in U_2(\mathcal{S})$满足${G_i}^*J_{\mathrm{r}}G_i={W_i}^*J_{\mathrm{r}}W_i$. 如果$W_i$的$(1,1)$元在$\mathcal{S}$中可逆, 则$[K\ \ C]$同时镇定$L_0,L_1,\cdots,L_n$, 并满足$J_{[K\ \ C]}<r$当且仅当下列条件成立:

1) 存在$Q_0\in\mathcal{S}$使得$R_{i1}+Q_0R_{i3}$在$\mathcal{S}$中可逆;

2) $W_iW_0^{-1}$是强r可镇定的.

此类控制器有如下形式:

$$[K\ \ C]=(Y_0-Q_0\hat{N}_0)^{-1}[\mathrm{HM}(W_0^{-1},U_0)\ \ X_0+Q_0\hat{M}_0],$$

其中: $U_0,Q_0\in\mathcal{S}$, $\|U_0\|<r$, $\|\mathrm{HM}(W_iW_0^{-1},U_0)\|<r$且$R_i+Q_0T_i\in U_1(\mathcal{S})$中可逆, $i=1,\cdots,n$.

5 实例(Examples)

通过下面的例子说明定理5中的参数化方法的有效性和可行性.

例 1 令$r=1$. 算子$A,B,C\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$有如下矩阵表示:

$$A=\begin{bmatrix}0 & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & & & \\ & \frac{1}{3} & 0 & & \\ & & \frac{1}{4} & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4 & & & & \\ -1 & 4 & & & \\ & -1 & 4 & & \\ & & -1 & 4 & \\ & & & \ddots & \ddots\end{bmatrix},$$

且$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 2 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & 2 & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$. 容易验证$G^*J_{\mathrm{r}}G$有$J$–谱分解$W^*J_{\mathrm{r}}W$, 其中:

$$W_{11}=\begin{bmatrix} 4 & & & & \\ -\frac{2}{\sqrt{2^2-1}} & \frac{2\times 4}{\sqrt{2^2-1}} & & & \\ & -\frac{3}{\sqrt{3^2-1}} & \frac{3\times 4}{\sqrt{3^2-1}} & & \\ & & -\frac{4}{\sqrt{4^2-1}} & \frac{4\times 4}{\sqrt{4^2-1}} & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$W_{21}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^2-1}} & \frac{-4}{\sqrt{2^2-1}} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{3^2-1}} & \frac{-4}{\sqrt{3^2-1}} & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{4^2-1}} & \frac{-4}{\sqrt{4^2-1}} & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$W_{22}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2^2-1}}{2} & & & \\ & \frac{\sqrt{3^2-1}}{3} & & \\ & & \frac{\sqrt{4^2-1}}{4} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

且$W_{12}=0$. 计算得

$$H=\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\hat{J}W^{-1}\hat{J}^*=\begin{bmatrix} CW_{22}^{-1} & CW_{22}^{-1}W_{21}W_{11}^{-1} \\ 0 & W_{11}^{-1} \end{bmatrix},$$

其中:

$$W_{11}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & & & & \\ \frac{1}{4^2} & \frac{\sqrt{2^2-1}}{2\times 4} & & & \\ \frac{1}{4^3} & \frac{\sqrt{2^2-1}}{2\times 4^2} & \frac{\sqrt{3^2-1}}{3\times 4} & & \\ \frac{1}{4^4} & \frac{\sqrt{2^2-1}}{2\times 4^3} & \frac{\sqrt{3^2-1}}{3\times 4^2} & \frac{\sqrt{4^2-1}}{4\times 4} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

且

$$W_{22}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2^2-1}} & & & \\ & \frac{3}{\sqrt{3^2-1}} & & \\ & & \frac{4}{\sqrt{4^2-1}} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

类似地, $HJ_{\mathrm{r}}H^*$有J–谱分解

$$VJ_{\mathrm{r}}V^*=\begin{bmatrix} V_{11}V_{11}^*-V_{12}V_{12}^* & V_{11}V_{21}^*-V_{12}V_{22}^* \\ V_{21}V_{11}^*-V_{22}V_{12}^* & V_{21}V_{21}^*-V_{22}V_{22}^* \end{bmatrix},$$

其中:

$$V_{11}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$V_{21}=\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \frac{1}{3\times 4} & 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{3\times 4^2} & \frac{1}{4\times 4} & 0 & 0 & & \\ \frac{1}{3\times 4^3} & \frac{1}{4\times 4^2} & \frac{1}{5\times 4} & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$V_{22}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & & & & & \\ \frac{1}{4^2} & \frac{\sqrt{2^2-1}}{2\times 4} & & & & \\ \frac{1}{4^3} & \frac{\sqrt{2^2-1}}{2\times 4^2} & \frac{1}{4} & & & \\ \frac{1}{4^4} & \frac{\sqrt{2^2-1}}{2\times 4^3} & \frac{1}{4^2} & \frac{1}{4} & & \\ \frac{1}{4^5} & \frac{\sqrt{2^2-1}}{2\times 4^4} & \frac{1}{4^3} & \frac{1}{4^2} & \frac{1}{4} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

且$V_{12}=0$. 根据定理5, 设

$$\begin{aligned} &[Q_1\ \ Q_2]=[U\ \ I]V^{-1}= \\ &[U\ \ I]\begin{bmatrix} V_{11}^{-1} & 0 \\ -V_{22}^{-1}V_{21}V_{11}^{-1} & V_{22}^{-1} \end{bmatrix}= \\ &[UV_{11}^{-1}-V_{22}^{-1}V_{21}V_{11}^{-1}\ \ \ V_{22}^{-1}],\ U\in\mathcal{S}. \end{aligned}$$

那么, 满足$\|A+BQC\|<1$的算子$Q\in\mathcal{S}$有如下形式:

$$\begin{aligned} &Q= \\ &V_{22}(UV_{11}^{-1}-V_{22}^{-1}V_{21}V_{11}^{-1})= \end{aligned}$$

$$V_{22}UV_{11}^{-1} -
\begin{bmatrix}
0 & & & & & \\
0 & 0 & & & & \\
\frac{1}{3\times 4} & 0 & 0 & & & \\
\frac{1}{3\times 4^2} & -\frac{1}{2\times 4^2} & 0 & 0 & & \\
\frac{1}{3\times 4^3} & -\frac{1}{2\times 4^3} & \frac{1}{5\times 4} & 0 & 0 & \\
\frac{1}{3\times 4^4} & -\frac{1}{2\times 4^4} & \frac{1}{5\times 4^2} & -\frac{1}{3\times 4^2} & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix},$$

其中$U \in \mathcal{S}, \|U\| < 1$.

参考文献(References):

[1] FEINTUCH A, FRANCIS B A. *Robust Control Theory in Hilbert Space* [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[2] FEINTUCH A. Suboptimal solutions to the time-varying model matching problem [J]. *Systems & Control Letters*, 1995, 25(4): 299 – 306.

[3] FRANCIS B A, ZAMES G. Design of H_∞ optimal multivariable feedback systems [C] //*Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*. San Antonio, TX: IEEE, 1983.

[4] DJOUADI S M, CHARALAMBOUS C D. Time-varying optimal disturbance minimization in presence of plant unvertanity [J]. *SIAM Journal of Control Optimization*, 2010, 48(5): 3354 – 3367.

[5] FEINTUCH A. On the strong stabilization of slowly time-varying linear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(1): 112 – 116.

[6] LIU L, LU Y F. Necessary and sufficient conditions to the transitivity in simultaneous stabilisation of time-varying systems [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7(14): 1834 – 1842.

[7] BALL J A, COHEN N. Sensitivity minimization in an H_∞ norm: parametrization of all sub-optimal solutions [J]. *International Journal of Control*, 1987, 46(3): 785 – 816.

[8] BALL J A, HELTON J W, VERMA M. A factorization principle for stabilization of linear control systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1991, 1(4): 229 – 294.

[9] GREEN M, GLOVER K. A J-spectral factorization approach to H_∞ control [J]. *SIAM Journal of Control Optimization*, 1990, 28(6): 1350 – 1371.

[10] CAO Y, LAMS J. On simulteous H_∞ control and strong H_∞ stabilization [J]. *Automatica*, 2000, 36: 859 – 865.

[11] LEE P H, Simultaneous reliable H_∞ stabilization using a multi-controller configuration [C] //*Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*. Vancouver, BC: IEEE, 2007: 1635 – 1638.

[12] DAVIDSON K R. *Nest Algebras* [M]. UK: Longman Scientific & Technical, 1988.

[13] DOUGLAS R G. On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space [J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1966, 17(2): 413 – 415.

[14] VIDYASAGAR M. *Control System Synthesis: A Factorization Approach* [M]. Cambridge MA: MIT Press, 1985.

[15] KIMURA H. *Chain Scattering Approach to H_∞ Controller (System and Control: Foundations and Applications* [M]. Boston, USA: Birkhauser, 1996.

作者简介:

刘 浏 (1984–), 女, 博士, 研究方向为套代数框架下的控制理论、算子理论及其应用, E-mail: beth.liu@dlut.edu.cn;

卢玉峰 (1962–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向是函数空间上的算子理论、算子理论及其应用, E-mail: lyfdlut@dlut.edu.cn.