

# 具有数据包丢失的离散随机不确定系统的线性最优满阶估值器

马静<sup>1</sup>, 孙书利<sup>2†</sup>

(1. 黑龙江大学 数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 黑龙江大学 电子工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘要:** 研究了具有数据包丢失和随机不确定性离散随机线性系统的状态估计问题. 其中数据包丢失是随机的, 且满足Bernoulli分布, 系统矩阵中的随机不确定性由一个白色乘性噪声来描述. 首先, 通过配方方法, 提出了最小均方意义下的无偏最优线性递推满阶滤波器. 所提出的滤波器用到了当前时刻和最近时刻接收到的观测来保证线性最优性. 与多项式滤波和增广滤波器相比, 本文的滤波器具有较小的计算负担. 然后, 基于所获得的线性滤波器推导了线性最优预报器和平滑器. 进一步研究了线性最优估值器的渐近稳定性, 给出了稳态特性存在的一个充分条件. 最后, 通过两个仿真例子验证了所提估计算法的优越性.

**关键词:** 线性最优估值器; 随机不确定系统; 乘性噪声; 丢包; 稳态估计

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Linear optimal full-order estimators for discrete-time stochastic uncertain systems with packet losses

MA Jing<sup>1</sup>, SUN Shu-li<sup>2†</sup>

(1. School of Mathematics Science, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China;  
2. School of Electronic Engineering, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China)

**Abstract:** We investigate the state estimation problem for discrete-time stochastic linear systems with packet losses and stochastic uncertainties. Packet losses are random with Bernoulli distribution, and the stochastic uncertainties in system matrix are represented by white multiplicative noises. Firstly, the unbiased optimal linear recursive full-order filters in the least-mean-squares (LMS) sense are designed via the method of completing square. The proposed filters employ the measurements received at the present instant and the last instant to guarantee the linear optimality. It is shown that the derived linear filters have less computational burden when compared with polynomial filters and augmented filters. Then, the linear optimal predictor and smoother are also given on the basis of the linear filters. Further, the asymptotic stability of the linear optimal estimators is studied. A sufficient condition to guarantee the steady-state property is obtained. Finally, we use two simulation examples to demonstrate the advantages of the derived estimation algorithms.

**Key words:** linear optimal estimator; stochastic uncertain system; multiplicative noise; packet loss; steady-state estimator

### 1 引言(Introduction)

近年来, 网络化控制系统中的状态估计问题引起了人们的广泛关注<sup>[1-3]</sup>. 然而, 在网络系统中, 由于网络的承载能力和通信带宽有限, 估值器端接收到的观测数据不可避免地存在时间延迟和数据包丢失, 并且这种时间延迟和数据丢失通常是随机的.

对带有随机数据包丢失系统, 文献[4]提出了依赖表示数据包丢失的随机变量值的间断观测Kalman滤波器(IKF). 但滤波器的增益需要在线计算, 不存在稳态特性. 文献[5]应用线性矩阵不等式(LMI)方法提出了稳态 $H_2$ 先验次优滤波器. 对于文献[5]的丢包模型,

文献[6-7], 应用新息分析方法分别提出了最优增广滤波器和满阶滤波器. 文献[8]对带有有界持续丢包系统提出了最优线性滤波器, 文献[9]对带有一步随机滞后和丢包系统提出了增广的满阶线性滤波器, 文献[10]对带有有界Markov丢包系统, 研究了时变Kalman滤波的峰值协方差的稳定性问题. 然而, 以上文献并没有考虑模型中的随机扰动.

在实际中, 由于模型化简、参数扰动、非线性系统的线性化和未建模动态等因素的影响, 使系统模型常常带有一定的不确定性<sup>[11]</sup>. 这种不确定性通常可分为确定性参数扰动和随机参数扰动两类. 当系统含有确

收稿日期: 2013-02-16; 录用日期: 2014-03-24.

†通信作者. E-mail: sunsl@hlju.edu.cn; Tel.: +86 13674686865.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61174139); 黑龙江省高校长江学者后备支持计划资助项目(2013CJHB005); 黑龙江省高校科技创新团队资助项目(2012TD007); 黑龙江大学高层次人才资助项目(Hdtd2010-03); 黑龙江省教育厅科学技术资助项目(12541632); 黑龙江省杰出青年基金资助项目(JC201412).

定的参数扰动时, 文献[12-14]提出了鲁棒滤波算法. 当系统含有随机参数扰动时, 文献[15-17]给出了多项式滤波器. 然而, 多项式滤波是非线性滤波, 在线计算负担较高. 文献[18]求解了 $H_\infty$ 估计和控制问题. 对同时带有确定性干扰和随机干扰的系统, 文献[11]通过LMI方法提出了鲁棒滤波器. 然而, 文献[11-18]并没有考虑随机数据包丢失问题.

最近, 对同时带有参数扰动和不确定观测系统, 文献[19-20]分别考虑了范数有界不确定性和随机不确定性的鲁棒滤波问题. 在文献[20]中, 作者在滤波器的增益中引入了随机变量来保证滤波器的鲁棒性. 然而, 并未给出随机变量的系数矩阵和方差矩阵的选取方法. 最近, 对于带有随机不确定性和丢包的系统, 文献[21]通过将观测和原始状态扩充为新的增广状态向量, 应用新息分析方法对增广系统提出了最优状态估值器, 因此增加了在线计算负担. 为了减小在线计算负担, 本文将对带有白色乘性噪声和随机数据包丢失的线性离散随机系统, 采用配方方法, 设计与原始状态具有相同阶次的满阶滤波器、预报器和平滑器. 进一步, 对于相应的定常系统, 给出了稳态估值器存在的一个充分条件. 所提出的估值器应用了相邻两个时刻接收到的观测数据来保证滤波器的线性最优性. 而文献[22]中的经典Kalman滤波仅应用当前时刻的观测进行递推计算, 因此对于本文的带有随机数据包丢失的观测模型, 具有经典Kalman滤波结构的滤波器将不再满足无偏性.

## 2 问题阐述(Problem formulation)

考虑如下带有随机乘性噪声和多丢包的随机离散线性不确定系统:

$$x_{t+1} = (\Phi_t^{(0)} + \sum_{r=1}^d \beta_t^{(r)} \Phi_t^{(r)})x_t + \Gamma_t w_t, \quad (1)$$

$$z_t = H_t x_t + v_t, \quad (2)$$

$$y_t = \theta_t z_t + (1 - \theta_t)y_{t-1}, \quad (3)$$

其中:  $x_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $z_t \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_t \in \mathbb{R}^m$  表示状态向量、观测输出和估值器端所接收到的观测,  $w_t \in \mathbb{R}^r$  和  $v_t \in \mathbb{R}^m$  是零均值的相关白噪声, 方差分别为  $Q_w$  和  $Q_v$ , 协方差为  $S$ ; 乘性噪声  $\beta_t^{(r)}$ ,  $r = 1, \dots, d$  是均值为零、方差为  $Q_{\beta^{(r)}}$  的相互独立的标量白噪声, 且与其他随机变量无关;  $\beta_t^{(r)}$  表示参数扰动,  $\Phi_t^{(r)}$  表示参数的扰动方向. 此外,  $\beta_t^{(r)}$  的零均值属性表示在两个方向的参数扰动是相同的.  $\theta_t$  是概率为  $P\{\theta_t = 1\} = \alpha$  和  $P\{\theta_t = 0\} = 1 - \alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  的Bernoulli分布的随机变量, 且独立于其他随机变量. 初始状态  $x_0$  的均值为  $\mu_0$ , 方差为  $p_0$ , 且与  $\theta_t$ ,  $w_t$ ,  $v_t$  和  $\beta_t^{(r)}$  是无关的.

从数据接收模型(3)可以看出, 当  $\theta_t = 1$  时,  $t$  时刻的观测  $z_t$  被接收到. 否则, 估值器端将利用最近接收到的观测  $y_{t-1}$  来补偿  $t$  时刻丢失的观测. 所以, 模型(3)

描述了网络传输中可能存在的随机丢包现象.  $\Phi_t^{(0)}$ ,  $\Gamma_t$  和  $H_t$  是具有适当维数的已知矩阵. 整篇论文中,  $E$  表示数学期望,  $T$  表示转置,  $0$  代表具有适当维数的零矩阵.

目的是基于所接收到的观测序列  $(y_t, \dots, y_0)$ , 求线性最小方差意义下的最优估值器  $\hat{x}_{t+h|t}$ . 当  $h = 0$  时为滤波器, 当  $h > 0$  时为预报器, 当  $h < 0$  时为平滑器. 需要指出的是, 本文所设计的滤波器仅仅依靠随机变量  $(\theta_t, \dots, \theta_0)$  的概率分布, 并不依靠它们的具体取值.

首先将系统(1)-(3)改写为文献[21]中的增广系统

$$X_{t+1} = \tilde{\Phi}_t X_t + \tilde{\Gamma}_t W_t, \quad (4)$$

$$y_t = \tilde{H}_t X_t + \theta_t v_t, \quad (5)$$

其中:

$$\begin{cases} X_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix}, W_t = \begin{bmatrix} w_t \\ v_t \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Phi}_t = \begin{bmatrix} \Phi_t^{(0)} + \sum_{r=1}^d \beta_t^{(r)} \Phi_t^{(r)} & 0 \\ \theta_t H_t & (1 - \theta_t) I_m \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Gamma}_t = \begin{bmatrix} \Gamma_t & 0 \\ 0 & \theta_t I_m \end{bmatrix}, \tilde{H}_t = [\theta_t H_t \quad (1 - \theta_t) I_m]. \end{cases} \quad (6)$$

噪声统计信息如下:

$$\begin{aligned} Q_W &= E[W_t W_t^T] = \\ E \left\{ \begin{bmatrix} w_t \\ v_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_t^T & v_t^T \end{bmatrix} \right\} &= \begin{bmatrix} Q_w & S \\ S^T & Q_v \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

为了方便表达, 定义如下符号:

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_t = E[\tilde{\Phi}_t] = \begin{bmatrix} \Phi_t^{(0)} & 0 \\ \alpha(1 - \alpha)H_t & I_m \end{bmatrix}, \\ \bar{H}_t = E[\tilde{H}_t] = [\alpha(1 - \alpha)H_t \quad I_m], \\ \tilde{\Phi}_t - \bar{\Phi}_t = (\theta_t - \alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ H_t^{(1)} \end{bmatrix} + \sum_{r=1}^d \beta_t^{(r)} \begin{bmatrix} \Phi_t^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{H}_t - \bar{H}_t = (\theta_t - \alpha)H_t^{(1)}, H_t^{(1)} = [H_t \quad -I_m]. \end{cases} \quad (8)$$

文献[21]对增广系统(4)-(5)设计了一步预报器  $\hat{X}_{t+1|t} = \hat{X}_{t|t-1} + F_t^P [y_t - \bar{H}_t \hat{X}_{t|t-1}]$  和滤波器  $\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + F_t^f [y_t - \bar{H}_t \hat{X}_{t|t-1}]$ ,  $\hat{X}_{t|t-1} = [\hat{x}_{t|t-1}^T \quad y_{t-1}^T]^T$ , 其中  $F_t^P$  和  $F_t^f$  分别为一步预报增益和滤波增益矩阵. 这里设计具有如下形式的最优线性满阶滤波器和一步预报器:

$$\hat{x}_{t+1|t} = K_t \hat{x}_{t|t-1} + L_t^{(1)} y_t + L_t^{(2)} y_{t-1}, \quad (9)$$

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + L_t [y_t - \alpha H_t \hat{x}_{t|t-1} - (1 - \alpha) y_{t-1}]. \quad (10)$$

初值为  $\hat{x}_{0|-1} = \mu_0$ . 本文将推导增益矩阵  $K_t$ ,  $L_t^{(1)}$ ,

$L_t^{(2)}$ 和 $L_t$ 使滤波器满足无偏性和线性最小方差准则, 即  $E[\hat{x}_{t|t-1}] = E[x_t]$ ,  $E[\hat{x}_{t|t}] = E[x_t]$ , 极小化性能指标  $\text{tr}\{E[(\tilde{x}_{t|t-1})(\tilde{x}_{t|t-1})^T]\}$ 和 $\text{tr}\{E[(\tilde{x}_{t|t})(\tilde{x}_{t|t})^T]\}$ , 其中  $\tilde{x}_{t|t-1} = x_t - \hat{x}_{t|t-1}$ 和 $\tilde{x}_{t|t} = x_t - \hat{x}_{t|t}$ 分别为一步预报误差和滤波误差,  $\text{tr}$ 表示矩阵的迹.

**注1** 由式(9)-(10)可以看到所设计的滤波器应用到了相邻两个时刻所接收到的观测 $y_t$ 和 $y_{t-1}$ , 并且一步预报器(9)具有不同于标准Kalman滤波器的形式 $\hat{x}_{t+1|t} = K_t \hat{x}_{t|t-1} + L_t^{(1)} y_t$ . 事实上, 对于系统(1)-(3)而言, 在线性最小方差意义下, 并不存在标准Kalman滤波形式的滤波器, 因为当 $\alpha \neq 1$ , 这种形式的滤波器是有偏的, 这一点可以从后面的公式(22)中看到.

**注2** 这里所设计的最优线性满阶滤波器(9)-(10)仅依靠数据丢失概率 $\alpha$ , 并不依靠随机变量 $(\theta_0, \dots, \theta_t)$ 的具体取值, 这说明本文所设计的滤波器存在稳态, 可以离线计算滤波增益矩阵. 这不同于文献[4]所提出的依靠随机变量 $(\theta_0, \dots, \theta_t)$ 的间断观测Kalman滤波器, 文献[4]所提滤波器不存在稳态, 其中滤波器增益矩阵需要在线计算.

### 3 线性最优估值器(Linear optimal estimators)

下面将推导最优线性满阶估值器, 在给出主要结论之前, 先给出如下引理.

**引理1** 对于系统(4)-(5), 状态二阶矩 $q_t = E[X_t X_t^T]$ 如下计算:

$$q_{t+1} = \bar{\Phi}_t q_t \bar{\Phi}_t^T + \alpha(1-\alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ H_t^{(1)} \end{bmatrix} q_t \begin{bmatrix} 0 \\ H_t^{(1)} \end{bmatrix}^T + \sum_{r=1}^d Q_{\beta^{(r)}} \begin{bmatrix} \Phi_t^{(r)} 0 \\ 0 0 \end{bmatrix} q_t \begin{bmatrix} \Phi_t^{(r)} 0 \\ 0 0 \end{bmatrix}^T + Q_t, \quad (11)$$

其中

$$Q_t = E[\tilde{I}_t W_t W_t^T \tilde{I}_t^T] = \begin{bmatrix} \Gamma_t Q_w \Gamma_t^T & \alpha \Gamma_t S \\ \alpha S^T \Gamma_t^T & \alpha Q_v \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\text{初值为 } q_0 = \begin{bmatrix} p_0 + \mu_0 \mu_0^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**证** 见附录A.

#### 3.1 线性最优满阶滤波器 (Linear optimal full-order filters)

**定理1** 线性最优满阶滤波器(9)和(10)的增益矩阵如下计算:

$$K_t = \Phi_t^{(0)} - \alpha L_t^{(1)} H_t, \quad (13)$$

$$L_t^{(1)} = [\Phi_t^{(0)} P_{t|t-1} H_t^T + \Gamma_t S] \Lambda_t^{-1}, \quad (14)$$

$$L_t^{(2)} = -(1-\alpha) L_t^{(1)}, \quad (15)$$

$$L_t = P_{t|t-1} H_t^T \Lambda_t^{-1}, \quad (16)$$

$$\Lambda_t = \alpha H_t P_{t|t-1} H_t^T + Q_v + (1-\alpha) H_t^{(1)} q_t (H_t^{(1)})^T, \quad (17)$$

相应的估计误差方差矩阵分别为

$$P_{t+1|t} = \Phi_t^{(0)} P_{t|t-1} (\Phi_t^{(0)})^T - \alpha L_t^{(1)} A_t (L_t^{(1)})^T \sum_{r=1}^d \beta_t^{(r)} [\Phi_t^{(r)} 0] q_t [\Phi_t^{(r)} 0]^T + \Gamma_t Q_w \Gamma_t^T, \quad (18)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - \alpha L_t \Lambda_t L_t^T, \quad (19)$$

初值为 $P_{0|-1} = p_0$ .

**证** 由式(4)-(6)(9), 有一步预报误差方程

$$\tilde{x}_{t+1|t} = K_t \tilde{x}_{t|t-1} - \theta_t L_t^{(1)} v_t + \Gamma_t w_t + [\Phi_t^{(0)} + \sum_{k=1}^d \beta_t^{(k)} \Phi_t^{(k)} - K_t - \theta_t L_t^{(1)} H_t - L_t^{(2)} - (1-\theta_t) L_t^{(1)}] X_t, \quad (20)$$

为了满足无偏性, 要求 $E[\tilde{x}_{0|-1}] = 0$ , 且

$$E[\Phi_t^{(0)} + \sum_{r=1}^d \beta_t^{(r)} \Phi_t^{(r)} - K_t - \theta_t L_t^{(1)} H_t] = 0, \quad (21)$$

$$E[L_t^{(2)} + (1-\theta_t) L_t^{(1)}] = 0. \quad (22)$$

这样, 由式(21)直接可得到式(13), 由式(22)直接可得到式(15).

将式(13)(15)代入式(20), 则式(20)可重写为

$$\tilde{x}_{t+1|t} = K_t \tilde{x}_{t|t-1} - \theta_t L_t^{(1)} v_t + \Gamma_t w_t + \sum_{r=1}^d \beta_t^{(r)} [\Phi_t^{(r)} 0] X_t - (\theta_t - \alpha) L_t^{(1)} H_t^{(1)} X_t. \quad (23)$$

类似地, 利用式(5)(8)(10), 有如下滤波误差方程:

$$\tilde{x}_{t|t} = (I_n - \alpha L_t H_t) \tilde{x}_{t|t-1} - L_t [\tilde{H}_t - \bar{H}_t] X_t - \theta_t L_t v_t, \quad (24)$$

应用 $\tilde{x}_{t|t-1} \perp W_t$ ,  $X_t \perp W_t$ ,  $E[\theta_t - \alpha] = 0$ 和 $E[\tilde{H}_t - \bar{H}_t] = 0$ , 其中 $\perp$ 表示正交, 再对其进行一些简单的推导和配方, 可得如下一步预报误差方差矩阵 $P_{t+1|t} = E[\tilde{x}_{t+1|t} \tilde{x}_{t+1|t}^T]$ 和滤波误差方差矩阵 $P_{t|t} = E[\tilde{x}_{t|t} \tilde{x}_{t|t}^T]$ :

$$P_{t+1|t} = \sum_{r=1}^d Q_{\beta^{(r)}} [\Phi_t^{(r)} 0] q_t [\Phi_t^{(r)} 0]^T + \Phi_t^{(0)} P_{t|t-1} (\Phi_t^{(0)})^T + \Gamma_t Q_w \Gamma_t^T + \alpha \{L_t^{(1)} - [\Phi_t^{(0)} P_{t|t-1} H_t^T + \Gamma_t S] \Lambda_t^{-1}\} \Lambda_t \times \{L_t^{(1)} - [\Phi_t^{(0)} P_{t|t-1} H_t^T + \Gamma_t S] \Lambda_t^{-1}\}^T - \alpha [\Phi_t^{(0)} P_{t|t-1} H_t^T + \Gamma_t S] \Lambda_t^{-1} \times [\Phi_t^{(0)} P_{t|t-1} H_t^T + \Gamma_t S]^T, \quad (25)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - \alpha P_{t|t-1} H_t^T \Lambda_t^{-1} H_t P_{t|t-1} + \alpha [L_t - P_{t|t-1} H_t^T \Lambda_t^{-1}] \Lambda_t \times [L_t - P_{t|t-1} H_t^T \Lambda_t^{-1}]^T, \quad (26)$$

其中  $\Lambda_t$  由式(17)定义. 为了极小化  $P_{t+1|t}$  和  $P_{t|t}$ , 要求增益矩阵  $L_t^{(1)}$  和  $L_t$  满足式(14)和式(16). 进而由式(25)可获得式(18), 由式(26)可获得式(19).

### 3.2 线性最优满阶多步预报器和平滑器(Linear optimal full-order multi-step predictor and smoother)

**定理 2** 对于系统(1)–(3), 线性最优  $h$ -步 ( $h > 1$ ) 预报器为

$$\hat{x}_{t+h|t} = \Phi_{t+h-1}^{(0)} \hat{x}_{t+h-1|t}, \quad (27)$$

相应的预报误差方差矩阵为

$$\begin{aligned} P_{t+h|t} = & \Phi_{t+h-1}^{(0)} P_{t+h-1|t} (\Phi_{t+h-1}^{(0)})^T + \\ & \Gamma_{t+h-1} Q_w \Gamma_{t+h-1}^T + \\ & \sum_{r=1}^d Q_{\beta^{(r)}} [\Phi_{t+h-1}^{(r)} \ 0] q_{t+h-1} [\Phi_{t+h-1}^{(r)} \ 0]^T, \end{aligned} \quad (28)$$

其中初值  $\hat{x}_{t+1|t}$  和  $P_{t+1|t}$  由定理1计算.

**证** 对式(1)直接取射影可得式(27), 由式(27)可得式(28), 细节略.

**定理 3** 对于系统(1)–(3), 线性最优  $h$ -步 ( $h < 0$ ) 平滑器如下计算:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+h|t} = & \hat{x}_{t+h|t-1} + M_{t+h|t} [y_t - \\ & \alpha H_t \hat{x}_{t|t-1} - (1-\alpha)y_{t-1}], \end{aligned} \quad (29)$$

$$M_{t+h|t} = G_t H_t^T \Lambda_t^{-1}, \quad (30)$$

$$P_{t+h|t} = P_{t+h|t-1} - \alpha M_{t+h|t} \Lambda_t M_{t+h|t}^T, \quad (31)$$

$$G_t = G_{t-1} K_{t-1}^T, \quad (32)$$

其中:  $P_{t+h|t}$  为平滑误差方差矩阵,  $M_{t+h|t}$  为平滑增益矩阵, 初值  $\hat{X}_{t+h|t+h}$ ,  $P_{t+h|t+h}$  和  $G_{t+h} = P_{t+h|t+h-1}$  由定理1计算.

**证** 见附录B.

**注 3** 当  $\beta_t^{(r)} = 0$  和  $S = 0$  时, 定理1–3便退化为文献[7]中的结果, 当  $\alpha = 1$  且  $\beta_t^{(r)} = 0$  时, 定理1–3便退化为标准 Kalman 滤波器<sup>[22]</sup>.

### 4 线性最优稳态滤波器(Linear optimal steady-state filter)

为了分析上述所提滤波器的稳态特性, 考虑如下相应的线性系统:

$$x_{t+1} = (\Phi^{(0)} + \sum_{r=1}^d \beta_t^{(r)} \Phi^{(r)}) x_t + \Gamma w_t, \quad (33)$$

$$z_t = H x_t + v_t, \quad (34)$$

$$y_t = \theta_t z_t + (1 - \theta_t) y_{t-1}. \quad (35)$$

对系统(33)–(35), 类似于定理1, 可获得带有常参数的最优线性一步预报器(9), 增益矩阵(13)–(15)和预报误差方差矩阵(18). 相应的误差方差矩阵(18)和状态二

阶矩(11)可重写为:

$$\begin{aligned} P_{t+1|t} = & [\Phi^{(0)} - \alpha L_t^{(1)} H] P_{t|t-1} [\Phi^{(0)} - \alpha L_t^{(1)} H]^T + \\ & \Omega_t - \alpha \Gamma S (L_t^{(1)})^T - \alpha L_t^{(1)} S^T \Gamma^T + \\ & \alpha L_t^{(1)} R_t (L_t^{(1)})^T, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} q_{t+1} = & \bar{\Phi} q_t \bar{\Phi}^T + \alpha(1 - \alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ H^{(1)} \end{bmatrix} q_t \begin{bmatrix} 0 \\ H^{(1)} \end{bmatrix}^T + \\ & \sum_{r=1}^d Q_{\beta^{(r)}} \begin{bmatrix} \Phi^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q_t \begin{bmatrix} \Phi^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T + Q, \end{aligned} \quad (37)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Omega_t = & \sum_{r=1}^d Q_{\beta^{(r)}} [\Phi^{(r)} \ 0] q_t [\Phi^{(r)} \ 0]^T + \Gamma Q_w \Gamma^T, \\ R_t = & Q_v + (1 - \alpha) H^{(1)} q_t (H^{(1)})^T, \\ Q = & \begin{bmatrix} \Gamma Q_w \Gamma^T & \alpha \Gamma S \\ \alpha S^T \Gamma^T & \alpha Q_v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

为了便于分析, 先定义矩阵

$$\begin{aligned} A = & \bar{\Phi} \otimes \bar{\Phi} + \alpha(1 - \alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ H^{(1)} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ H^{(1)} \end{bmatrix} + \\ & \sum_{r=1}^d Q_{\beta^{(r)}} \begin{bmatrix} \Phi^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \Phi^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中  $\otimes$  为 Kronecker 积.

**定理 4** 对于系统(33)–(35), 如果矩阵  $A$  的谱半径  $\rho(A) < 1$ , 则带任意初始条件  $q_0 \geq 0$  的方程(37)的解  $q_t$  将收敛于如下 Lyapunov 方程的唯一半正定解  $q$ :

$$\begin{aligned} q = & \bar{\Phi} q \bar{\Phi}^T + \alpha(1 - \alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ H^{(1)} \end{bmatrix} q \begin{bmatrix} 0 \\ H^{(1)} \end{bmatrix}^T + \\ & \sum_{r=1}^d Q_{\beta^{(r)}} \begin{bmatrix} \Phi^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q \begin{bmatrix} \Phi^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T + Q, \end{aligned} \quad (38)$$

即  $q = \lim_{t \rightarrow \infty} q_t$ . 进一步有  $\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_t$  和  $R = \lim_{t \rightarrow \infty} R_t$ , 其中:

$$\begin{aligned} \Omega = & \sum_{r=1}^d Q_{\beta^{(r)}} [\Phi^{(r)} \ 0] q [\Phi^{(r)} \ 0]^T + \Gamma Q_w \Gamma^T, \\ R = & Q_v + (1 - \alpha) H^{(1)} q (H^{(1)})^T. \end{aligned}$$

**证** 对于 Lyapunov 方程(37), 如果  $\rho(A) < 1$ , 有  $q = \lim_{t \rightarrow \infty} q_t$  满足式(38)<sup>[23]</sup>.

**定理 5** 对于系统(33)–(35), 如果  $\rho(A) < 1$ , 且  $(\Phi^{(0)} - \alpha \Gamma S R^{-1} H, \bar{\Omega})$  是可稳对, 其中  $\bar{\Omega}$  满足  $\bar{\Omega} \bar{\Omega}^T = \bar{\Omega} - \alpha \Gamma S R^{-1} S^T \Gamma^T$ , 则带有任意初始条件  $P_{0|-1} \geq 0$  的方程(36)的解  $P_{t+1|t}$  将收敛于如下 Riccati 方程的唯一半正定解  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} \Sigma = & [\Phi^{(0)} - \alpha L^{(1)} H] \Sigma [\Phi^{(0)} - \alpha L^{(1)} H]^T + \bar{\Omega} - \\ & \alpha \Gamma S (L^{(1)})^T - \alpha L^{(1)} S^T \Gamma^T + \alpha L^{(1)} R (L^{(1)})^T, \end{aligned} \quad (39)$$

即  $\Sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{t|t-1}$ . 进而有  $L^{(1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} L_t^{(1)}$ , 一步预报器

$$\hat{x}_{t+1|t} = (\Phi^{(0)} - \alpha L^{(1)} H) \hat{x}_{t|t-1} + L^{(1)} y_t - (1 - \alpha) L^{(1)} y_{t-1} \quad (40)$$

是渐近稳定的.

**证** 由  $\rho(A) < 1$  有  $\bar{\Phi}$  是稳定的, 从而  $\Phi^{(0)}$  是稳定的, 因此  $(\Phi^{(0)}, \alpha H)$  为可检对. 由于  $(\Phi^{(0)} - \alpha \Gamma S R^{-1} H, \bar{\Omega})$  是可稳对, 且  $\bar{\Omega} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_t, R = \lim_{t \rightarrow \infty} R_t$ , 由 Kalman 滤波理论<sup>[22]</sup> 知, 带有任意初值  $P_{0|-1} \geq 0$  的方程(36) 的解将收敛于方程(39) 的唯一半正定解  $\Sigma$ . 进一步可知  $\Phi^{(0)} - \alpha L^{(1)} H$  是稳定矩阵, 这意味着一步预报器(40) 是渐近稳定的.

**注 4** 由一步预报的稳态特性, 可获得所设计的滤波器、 $h$ -步预报器和平滑器也具有稳态特性.

**注 5** 由定理1-4 知, 所设计的滤波器是线性的、递推的, 且与原系统具有相同的维数. 在满足一定的条件时, 所提出的滤波器具有稳态特性. 因此, 所提出的滤波器能够减小在线计算负担, 便于实时应用.

### 5 仿真研究(Simulation research)

现在用两个例子来说明本文所提算法的有效性. 所有的仿真图都是由200次 Monte-Carlo 仿真实验给出的结果. 例1 是文献[24] 中的不间断电源系统, 例2 是文献[20] 中的数值例子. 在例2 中给出了本文算法与文献[20] 中算法的精度比较.

**例 1** 考虑文献[24] 中的带有1 kVA 的不间断电源系统, 当采样周期为10 ms 时, 相应的离散模型为:

$$x_{t+1} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0.9226 & -0.6330 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\} x_t + \left\{ \begin{array}{ccc} 0.1 & 0.05 & -0.05 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{array} \right\} w_t + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} w_t, \quad (41)$$

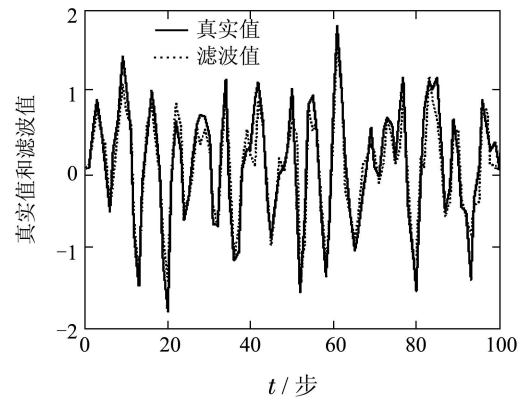
$$z_t = [20.738 \ 20.287 \ 0] x_t + v_t, \quad (42)$$

$$y_t = \theta_t z_t + (1 - \theta_t) y_{t-1}, \quad (43)$$

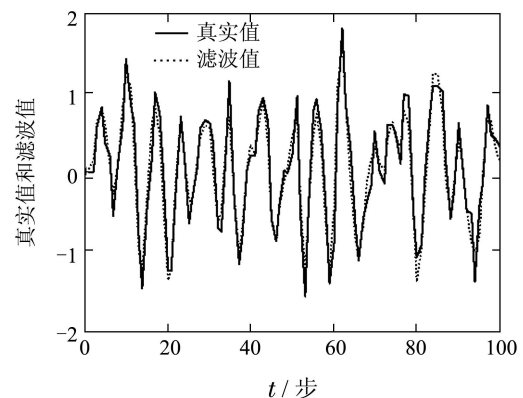
其中观测噪声  $v_t$  与系统噪声  $w_t$  是相关的, 且满足关系  $v_t = c w_t + \gamma_t$ , 其中  $c$  为相关系数,  $\gamma_t$  为零均值的且与  $w_t$  独立的白噪声. 本文的目的是寻求线性最优滤波器  $\hat{x}_{t|t}$ , 两步预报器  $\hat{x}_{t|t-2}$  和一步固定滞后平滑器  $\hat{x}_{t|t+1}$ .

仿真中取  $c = 0.6, Q_w = 1, Q_\gamma = 1, \alpha = 0.8, Q_\beta = 0.1$ , 初值  $\hat{x}_{0|-1} = 0$  和  $P_0 = 0.1 I_3$ , 其中  $I_3$  是  $3 \times 3$  的单位阵. 图1 给出了滤波器的跟踪性能曲线, 其中图(a)-(c) 分别表示第1 状态分量、第2 状态分量和第3 状态分量. 图2 和图3 分别给出了估计误差方差随

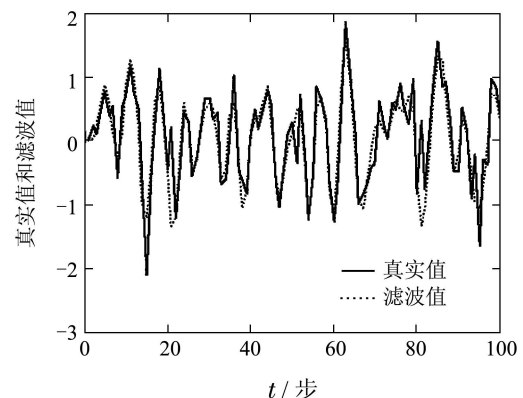
数据接收率  $\alpha$  和干扰噪声方差  $Q_\beta$  的变化曲线. 从图中可以看出, 平滑器的估计性能好于滤波器, 滤波器的估计性能好于预报器, 且  $\alpha$  越大估计精度越高,  $Q_\beta$  越大估计精度越低. 进一步, 比较了所提出的滤波器与文献[4] 的间断观测 Kalman 滤波 (IKF) 的性能比较曲线. 从图4 中, 可以看出 IKF 的滤波误差方差是时变的, 且围绕本文所提稳态滤波误差方差曲线上下波动, 因此 IKF 不具有稳态特性.



(a) 第1状态分量



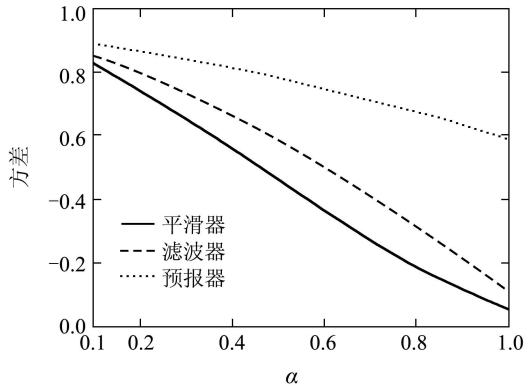
(b) 第2状态分量



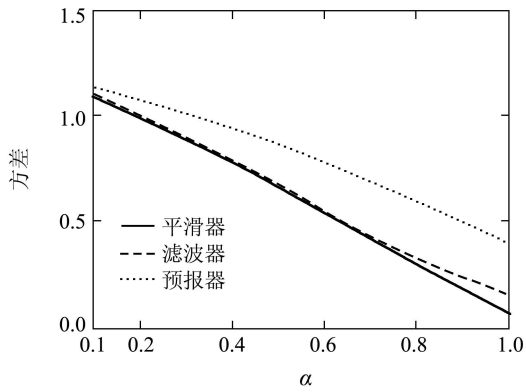
(c) 第3状态分量

图1  $\alpha = 0.8$  和  $Q_\beta = 0.1$  时的最优线性滤波器

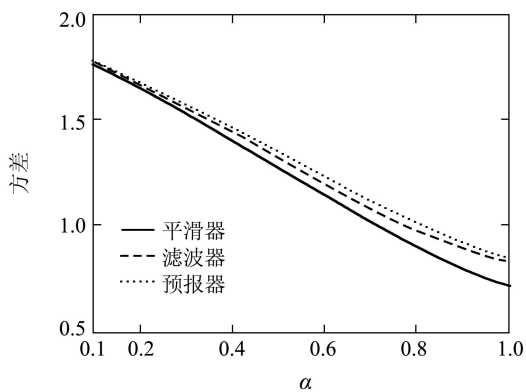
Fig. 1 Linear optimal filter with  $\alpha = 0.8$  and  $Q_\beta = 0.1$



(a) 第1状态分量

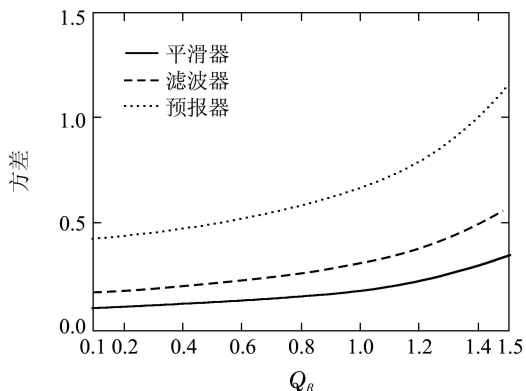


(b) 第2状态分量

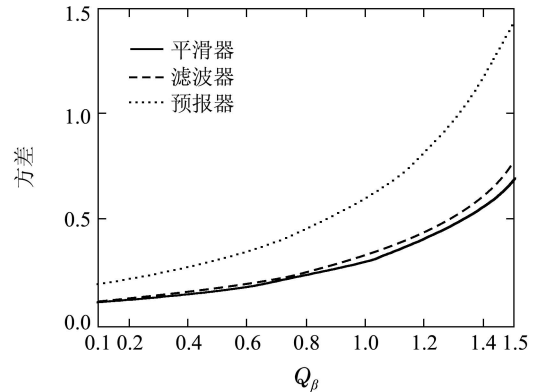


(c) 第3状态分量

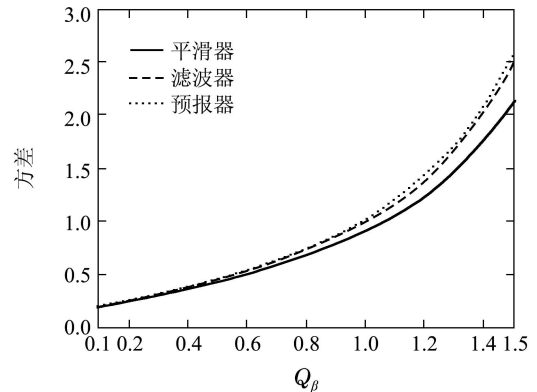
图 2  $0.1 \leq \alpha \leq 1$  和  $Q_\beta = 1$  时的稳态估计误差方差  
Fig. 2 Steady-state estimation error variances with  $0.1 \leq \alpha \leq 1$  and  $Q_\beta = 1$



(a) 第1状态分量

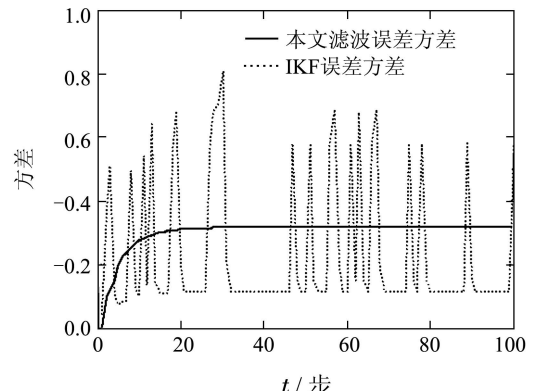


(b) 第2状态分量

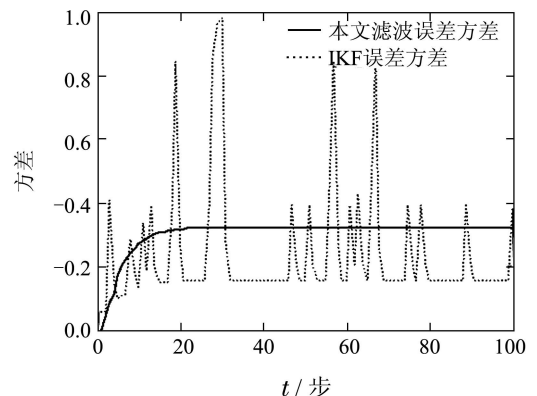


(c) 第3状态分量

图 3  $\alpha = 0.8$  和  $0.1 \leq Q_\beta \leq 1.5$  时的稳态估计误差方差  
Fig. 3 Steady-state estimation error variances with  $\alpha = 0.8$  and  $0.1 \leq Q_\beta \leq 1.5$



(a) 第1状态分量



(b) 第2状态分量

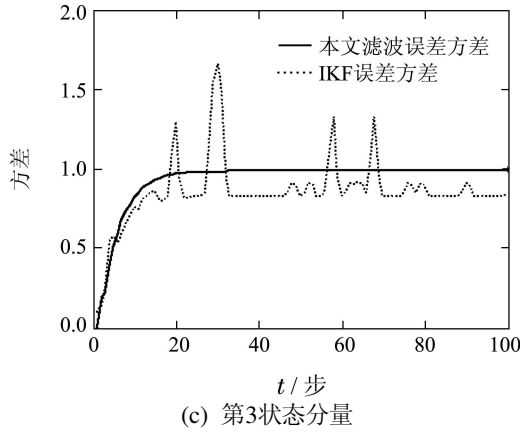


图4 当 $\alpha = 0.8$ 和 $Q_\beta = 1$ 时两种滤波误差方差的比较  
Fig. 4 Comparison of the variances for two filters with  $\alpha = 0.8$  and  $Q_\beta = 1$

**例2** 下面采用文献[20]中的例子, 进一步验证所提算法的有效性:

$$x_{t+1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} + \beta_t \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \right\} x_t + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} w_t, \quad (44)$$

其中 $w_t, v_t, \beta_t$ 是相互独立的白噪声. 仿真中取 $Q_w = 0.3, Q_v = 0.3, H = [0.5 \ 1], Q_\beta = 0.1, \alpha = 0.5$ .

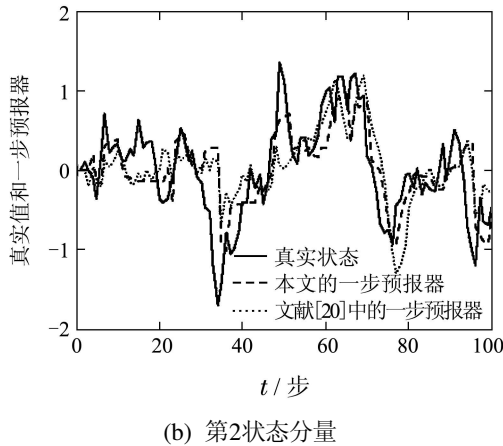
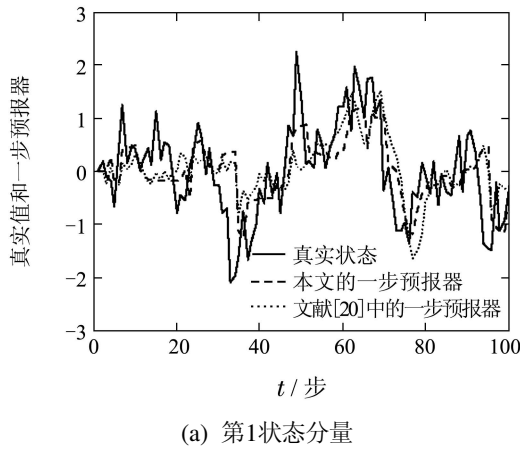


图5 两种一步预报器的跟踪性能比较  
Fig. 5 Comparison of the tracking performance for two predictors

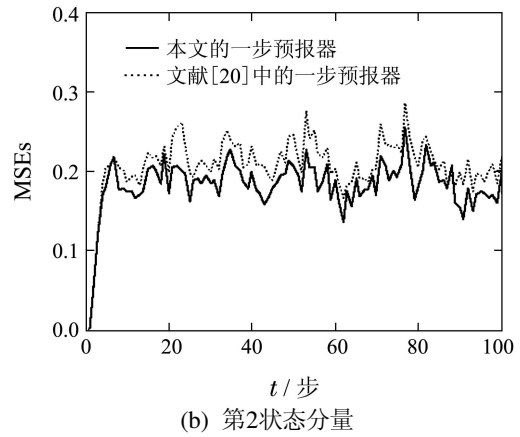
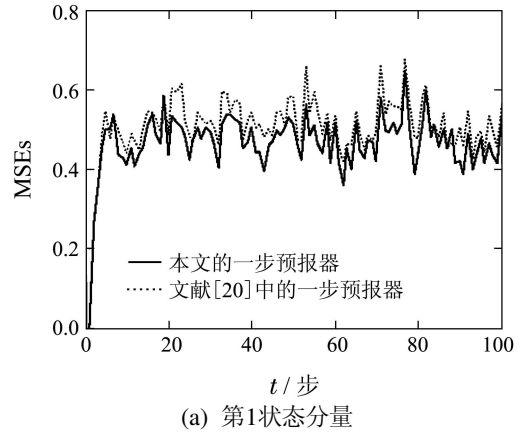


图6 两种一步预报器的均方误差比较  
Fig. 6 Comparison of the MSEs for two predictors

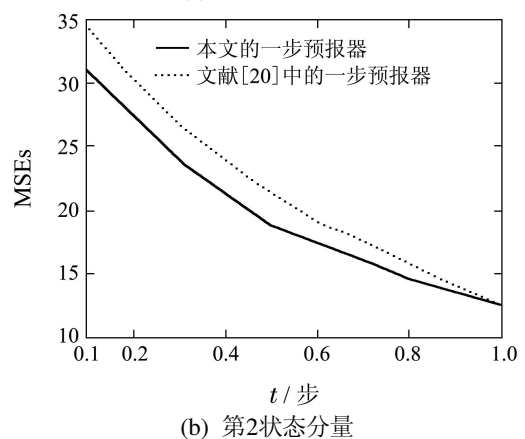
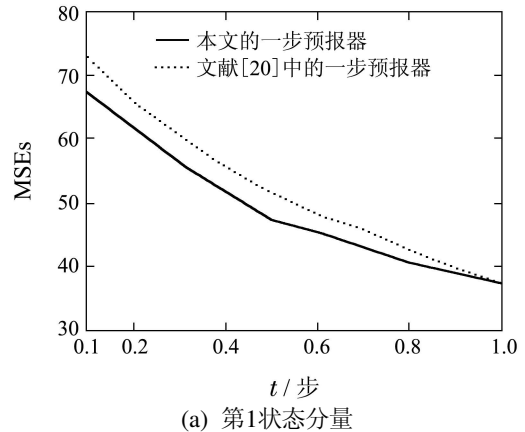


图7 两种一步预报器随 $\alpha$ 变化的累计均方误差比较  
Fig. 7 Comparison of the accumulated mean squares errors for two one-step predictors versus  $\alpha$

在这个例子中, 本文与文献[20]中的例子进行了比较. 图5给出了真实状态、本文的一步预报器和文献[20]中一步预报器的跟踪性能曲线, 图(a)和图(b)分别代表状态的第1分量和第2分量. 图6给出了两种预报器的均方误差(MSE)比较曲线即  $\frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} (\hat{x}_{j,t}^{(i)} - x_{j,t}^{(i)})^2$ ,  $j = 1, 2, 3$ , 其中  $j$  表示第  $j$  个状态分量,  $i$  表示第  $i$  次实验. 图7给出了从1到100的累计均方误差随  $\alpha$  变化的曲线. 从图5-7中可以看出, 当有数据包丢失时, 由于本文利用了最近接收到的观测而文献[20]仅用到了噪声, 因此本文的预报器具有更高的估计精度.

## 6 结论(Conclusions)

对带有随机乘性噪声扰动和随机数据包丢失的线性离散随机系统, 通过配方方法, 提出了线性最小方差意义下的线性最优满阶滤波器、预报器和平滑器. 所提出的线性最优满阶估值器具有不同于标准 Kalman 滤波器的结构, 它依靠相邻两个时刻接收到的观测来保证线性最优性. 估值器通过计算一个 Riccati 方程和一个 Lyapunov 方程获得. 进一步, 分析了所提估值器的稳态特性. 给出了稳态估值器存在的一个充分条件. 需要指出的是, 本文只考虑了系统矩阵中存在随机干扰的情形, 对于干扰项出现在状态方程的各个矩阵中的更一般的情形是将来要研究的一个课题. 同时, 对于同时受限于随机时滞、随机丢包和随机干扰的系统的滤波问题也是一个非常有意义的研究课题.

## 参考文献(References):

- [1] ZHANG H S, XIE L H. *Control and Estimation of Systems with Input/Output Delays* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [2] SUN Y G, QIN S H. Stability and stabilization of networked control systems with bounded packet dropout [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(1): 113 – 117.
- [3] HESPANHA J, NAGHSHTABRIZI P, XU Y G. A survey of recent results in networked control systems [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 138 – 162.
- [4] SINOPOLI B, SCHENATO L, FRANCESCNETTI M, et al. Kalman filtering with intermittent observations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1453 – 1464.
- [5] SAHEBSARA M, CHEN T, SHAH S L. Optimal  $H_2$  filtering with random sensor delay, multiple packet dropout and uncertain observations [J]. *International Journal of Control*, 2007, 80(2): 292 – 301.
- [6] SUN S L, XIE L H, XIAO W D. Optimal linear estimation for systems with multiple packet dropouts [J]. *Automatica*, 2008, 44(5): 1333 – 1342.
- [7] SUN S L, XIE L H, XIAO W D. Optimal full-order and reduced-order estimators for discrete-time systems with multiple packet dropouts [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(8): 4031 – 4038.
- [8] SUN S L. Optimal estimators for systems with finite consecutive packet dropouts [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, 16(7): 557 – 560.
- [9] SUN S L, XIE L H, XIAO W D. Optimal full-order filtering for discrete-time systems with random measurement delays and multi-

- ple packet dropouts [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2010, 8(1): 105 – 110.
- [10] XIAO N, XIE L H, FU M Y. Kalman filtering over unreliable communication networks with bounded Markovian packet dropouts [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, 19(16): 1770 – 1786.
- [11] YANY F W, WANG Z D, HUNG Y S. Robust Kalman filtering for discrete time-varying uncertain systems with multiplicative noises [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1179 – 1183.
- [12] XIE L H, SOH Y C, DE SOUZA C E. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(6): 1310 – 1314.
- [13] SHAKED U, DE SOUZA C E. Robust minimum variance filtering [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(11): 2474 – 2483.
- [14] THEODOR Y, SHAKED U. Robust discrete-time minimum-variance filtering [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 44(2): 181 – 189.
- [15] PAKSHIN P V. State estimation and control synthesis for discrete linear systems with additive and multiplicative noise [J]. *Automation and Remote Control*, 1978, 39(4): 526 – 535.
- [16] CARRAVETTA F, GERMANI A, RAIMONDI M. Polynomial filtering for discrete-time stochastic linear systems with multiplicative state noise [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1106 – 1126.
- [17] DE SANTIS A, GERMANI A, RAIMONDI M. Optimal quadratic filtering of linear discrete-time non-Gaussian systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(7): 1274 – 1278.
- [18] GERSHON E, SHAKED U, YAESH I.  $H_\infty$  Control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise [J]. *Automatica*, 2001, 37(3): 409 – 417.
- [19] GUO G, WANG B F. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems with multiple packet dropouts [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(5): 767 – 772.
- [20] HOUNKPEVI F O, YAZ E E. Robust minimum variance linear state estimators for multiple sensors with different failure rates [J]. *Automatica*, 2007, 43(7): 1274 – 1280.
- [21] MA J, SUN S L. Optimal linear estimation for systems with multiplicative noise uncertainties and multiple packet dropouts [J]. *IET Signal Processing*, 2012, 6(9): 839 – 848.
- [22] ANDERSON B D O, MOORE J B. *Optimal Filtering* [M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1979.
- [23] WANG Z D, HO D W C, LIU X H. Robust filtering under randomly varying sensor delay with variance constraints [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express briefs*, 2004, 51(6): 320 – 326.
- [24] YANY F W, WANG Z D, HUNG Y S, et al. Control for networked systems with random communication delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 511 – 518.

## 附录A 引理的证明(Appendix A: Proof of Lemma)

由式(4), 有

$$X_{t+1} = \bar{\Phi}_t X_t + (\tilde{\Phi}_t - \bar{\Phi}_t) X_t + \tilde{\Gamma}_t W_t, \quad (1a)$$

应用  $E[\tilde{\Phi}_t - \bar{\Phi}_t] = 0$ ,  $E[\beta_t^{(r)}] = 0$ ,  $\beta_t^{(r)} \perp \beta_t^{(j)}$ ,  $r \neq j$ ,  $r, j = 1, \dots, d$  和  $X_t \perp W_t$ , 有如下状态二阶矩:

$$q_{t+1} = E[X_{t+1} X_{t+1}^T] = \bar{\Phi}_t q_t \bar{\Phi}_t^T + E[\tilde{\Gamma}_t W_t W_t^T \tilde{\Gamma}_t^T] + E\{(\theta_t - \alpha)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ H_t^{(1)} \end{bmatrix} X_t X_t^T \begin{bmatrix} 0 \\ H_t^{(1)} \end{bmatrix}^T\} +$$



$$E\left\{\sum_{r=1}^d (\beta_t^{(r)})^2 \left\{ \begin{bmatrix} \Phi_t^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X_t X_t^T \begin{bmatrix} \Phi_t^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}\right\}, \quad (2a)$$

进一步容易获得

$$Q_t = E[\tilde{r}_t W_t W_t^T \tilde{r}_t^T] = E\left\{ \begin{bmatrix} \Gamma_t Q_w \Gamma_t^T & \theta_t \Gamma_t S \\ \theta_t S^T \Gamma_t^T & \theta_t^2 Q_v \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \Gamma_t Q_w \Gamma_t^T & \alpha \Gamma_t S \\ \alpha S^T \Gamma_t^T & \alpha Q_v \end{bmatrix}, \quad (3a)$$

将式(3a)带入(2a), 可得式(11).

### 附录B 定理3的证明(Appendix B: Proof of Theorem 3)

由射影理论<sup>[22]</sup>, 可直接得到式(29). 由式(6)–(8)和(29), 可得如下平滑误差方差:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{t+h|t} &= \tilde{x}_{t+h|t-1} - M_{t+h|t}(\tilde{H}_t - \bar{H}_t)X_t - \\ &\quad \theta_t M_{t+h|t} v_t - \alpha M_{t+h|t} H_t \tilde{x}_{t|t-1}, \end{aligned} \quad (4a)$$

利用 $[\tilde{H}_t - \bar{H}_t] = 0$ ,  $\tilde{x}_{t|t-1} \perp v_t$ 以及 $\tilde{x}_{t+h|t-1} \perp v_t$ , 有如下平滑误差方程:

$$\begin{aligned} P_{t+h|t} &= \\ P_{t+h|t-1} &- \alpha E[\tilde{x}_{t+h|t-1} \tilde{x}_{t|t-1}^T] H_t^T M_{t|t+h}^T - \\ &\alpha M_{t+h|t} H_t E[\tilde{x}_{t|t-1} \tilde{x}_{t+h|t+h-1}^T] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\alpha(1-\alpha)M_{t+h|t} H_t^{(1)} q_t (H_t^{(1)})^T M_{t+h|t}^T + \\ &\alpha M_{t+h|t} Q_v M_{t+h|t}^T + \alpha^2 M_{t+h|t} H_t P_{t|t-1} H_t^T M_{t+h|t}^T, \end{aligned} \quad (5a)$$

其中 $G_t = E[\tilde{x}_{t+h|t-1} \tilde{x}_{t|t-1}^T] = E[x_{t+h} \tilde{x}_{t|t-1}^T]$ . 由式(23), 应用

$$\begin{aligned} E[\theta_{t-1} - a] &= 0, E[\beta_t^{(r)}] = 0, \\ E[\beta_t^{(r)}] &= 0, E[(\theta_{t-1} - a)\theta_{t-2}] = 0, \end{aligned}$$

$\hat{x}_{t+h|t-1} \perp \tilde{x}_{t|t-1}$ ,  $x_{t+h} \perp w_{t-1}$ 以及 $x_{t+h} \perp v_{t-1}$ , ( $h < 0$ ), 可得到式(32). 通过配方, 式(5a)进一步可写为

$$\begin{aligned} P_{t+h|t} &= P_{t+h|t-1} - \alpha G_t H_t^T \Lambda_t^{-1} H_t G_t^T + \\ &\alpha [M_{t+h|t} - G_t H_t^T \Lambda_t^{-1}] \Lambda_t [M_{t+h|t} - G_t H_t^T \Lambda_t^{-1}]^T, \end{aligned} \quad (6a)$$

其中 $\Lambda_t$ 由式(17)所定义. 由式(6a)可得(31).

### 作者简介:

**马静** (1979-), 女, 副教授, 目前研究方向为传感器网络和信息融合滤波, E-mail: majing427@gmail.com;

**孙书利** (1971-), 男, 教授, 目前研究方向为状态估计、信号处理、信息融合、传感器网络等, E-mail: sunsl@hlju.edu.cn.