

## 不确定轮式移动机器人的任意轨迹跟踪

庞海龙, 马保离<sup>†</sup>

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

**摘要:** 本文研究参数不确定轮式移动机器人的任意轨迹跟踪统一控制问题. 通过引入坐标变换、输入变换和辅助动态, 将机器人模型转换为合适的形式; 进而运用Lyapunov方法和自适应技术设计了一种自适应统一控制器, 该控制器可以保证跟踪误差全局一致最终有界, 且最终界大小可以通过调整控制器参数而任意调节. 仿真结果验证了控制律的有效性.

**关键词:** 轮式移动机器人; 统一控制器; 实际稳定; 自适应控制

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Adaptive unified controller of arbitrary trajectory tracking for wheeled mobile robots with unknown parameters

PANG Hai-long, MA Bao-li<sup>†</sup>

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** We investigate the unified control problem of arbitrary trajectory tracking for wheeled mobile robots (WMRs) with unknown model parameters. After converting the robot model to an advantageous form by introducing coordinate transformation and input transformation as well as auxiliary dynamics, and employing Lyapunov method and adaptive technique, we develop an adaptive unified controller which ensures the tracking errors to be globally uniformly ultimately bounded (GUUB). Furthermore, the ultimate bounds of tracking errors can be made arbitrarily small by adjusting control parameters. The effectiveness of the proposed control law is validated by simulation results.

**Key words:** wheeled mobile robots; unified controller; practical stabilization; adaptive control

### 1 引言(Introduction)

轮式移动机器人的控制问题因其理论挑战性和广泛的实际应用价值而吸引了大批研究者. 轮式移动机器人受到纯滚动约束, 是典型的非完整系统. 其基本运动控制目标可以表述为: 1) 两个位姿间的移动; 2) 跟踪一个给定的时间轨迹; 3) 跟踪一个给定的几何路径. 从控制的角度看, 由于不存在连续时不变纯状态反馈实现非完整机器人位姿的渐近镇定<sup>[1]</sup>, 因此位姿镇定要难于轨迹跟踪和路径跟踪; 同时也意味着, 似乎有必要针对不同的控制任务设计不同的控制律.

已有很多文献研究了机器人的镇定问题. Bloch等为几种不同类型的非完整系统设计了分段时不变连续控制律, 实现了局部定点镇定<sup>[2]</sup>. Canudas de Wit等为非完整机器人设计了全局指数镇定控制律<sup>[3]</sup>. Sanson为二轮车设计了光滑时变反馈控制器, 实现了局部渐近镇定<sup>[4]</sup>. Jiang和Samson为一类非完整系统设计了全局渐近反馈控制律<sup>[5-6]</sup>. 为了使光滑时变控制器实现快速响应, Godhavn和M'Closkey等为一类

非完整系统设计了局部指数镇定控制律<sup>[7-8]</sup>. Escobar等为磁场定向感应电机设计了指数镇定控制律<sup>[9]</sup>. Dixon等利用动态振荡器为轮式移动机器人设计了全局指数镇定控制器<sup>[10]</sup>.

机器人的跟踪问题也得到了广泛深入地研究. Kanayama等为自主移动机器人设计了光滑反馈控制律, 实现了局部渐近跟踪<sup>[11]</sup>. Walsh等为相似的线性模型设计了局部指数跟踪控制律<sup>[12]</sup>. 在角加速度可测条件下, Jiang等为移动机器人设计了全局渐近跟踪控制器<sup>[13]</sup>; 在不测角加速度的情况下, 为一般链式系统设计了半全局和全局渐近跟踪控制律<sup>[14]</sup>. 同时, 文献[15-17]提出了不同的路径跟踪控制策略.

然而, 笔者不希望使用不同的控制器处理不同的控制任务, 而是希望机器人在不同的控制器之间连续切换. 例如对于常见的进坞操作, 笔者期望机器人按照预设的几何轨迹到达期望的位置和姿态. 因此希望利用单一控制器同时实现轨迹跟踪与定点镇定.

一些学者已对统一控制问题进行了研究, 以下简

要介绍其中重要成果.

在持续激励条件下, Dixon等为轮式移动机器人设计了全局指数跟踪控制律, 通过设置某个参数为零, 跟踪控制律也可用于定点镇定<sup>[18]</sup>. 在饱和约束条件下, Lee等为轮式移动机器人设计了全局动力学统一控制器, 同时实现了跟踪和镇定目标, 但是控制器参数选择与参考轨迹有关<sup>[19]</sup>. 为了实现轮式移动机器人的全局渐近跟踪和镇定, Do等设计了全局时变静态反馈统一控制器<sup>[20]</sup>和全局时变输出反馈统一控制器<sup>[21]</sup>. 然而, 文献[18]提出的控制器是基于控制任务的, 文献[18–21]提出的控制器只能跟踪特定类型的可行轨迹(包括固定点), 但不能跟踪任意参考轨迹. 为了跟踪任意可行/不可行轨迹, 研究者转而设计实际稳定统一控制器, 保证跟踪误差全局一致最终有界. Dixon等为轮式移动机器人分别设计了变结构统一控制律和鲁棒统一控制律, 在有界扰动下可保证位置和姿态跟踪误差全局一致毕竟有界<sup>[22–23]</sup>. Behal等将文献[22–23]的结果扩展到欠驱动水面船舶, 提出了连续时变统一控制律, 保证跟踪误差全局一致最终有界<sup>[24]</sup>. 文献[22–24]提出的控制器能够跟踪任意可行轨迹, 但不能跟踪不可行轨迹. 对于不可行轨迹跟踪, Bloch等利用滑模方法为一阶非完整积分器系统设计了运动学统一控制器, 可以保证系统状态跟踪包括固定点和不可行轨迹在内的任意参考轨迹, 且跟踪误差任意小<sup>[25]</sup>. Morin等提出了横截函数方法, 并利用此方法分别为可控无漂移非线性系统和轮式移动机器人设计了统一反馈控制器, 均实现了对任意参考轨迹的实际跟踪<sup>[26–27]</sup>. 然而, 为了获得小的跟踪误差, 基于横截函数法设计的控制器会使得控制输入在暂态过程中幅值很大.

本文针对参数不确定轮式移动机器人设计了自适应统一控制律, 使得机器人对任意参考轨迹的跟踪误差全局一致最终有界, 且最终界任意小. 与文献[23]只能跟踪可行参考轨迹相比, 本文设计的控制器可以跟踪任意参考轨迹, 包括可行轨迹和不可行轨迹, 且跟踪误差全局一致最终有界.

本文内容安排如下: 第2节给出了轮式移动机器人统一控制问题描述; 第3节为控制律设计及证明; 第4节进行了仿真验证; 第5节为结论.

## 2 问题描述(Problem formulation)

轮式移动机器人的简化模型为<sup>[28]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{\theta} = r, \\ \dot{v} = \beta_1 \bar{\tau}_1, \\ \dot{r} = \beta_2 \bar{\tau}_2, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $(x, y)$ 表示机器人质心在惯性坐标系下的位置;  $\theta$ 表示机器人的姿态角, 即机器人线速度方向与横轴正向的夹角;  $(v, r)$ 分别表示机器人的线速度和角速度; 模型参数 $\beta_1 = \frac{1}{Rm}$ ,  $\beta_2 = \frac{L}{RI}$ ;  $R$ 表示轮子半径;  $2L$ 为两个后轮的间距;  $m$ 为机器人的质量;  $I$ 为机器人关于质心的转动惯量;  $\bar{\tau}_1 = \tau_1 + \tau_2$ ,  $\bar{\tau}_2 = \tau_1 - \tau_2$ 为控制输入,  $\tau_1, \tau_2$ 为后轮电机产生的控制力矩.

**假设 1** 模型参数 $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ 未知.

笔者期望机器人跟踪任意参考轨迹 $(x_r(t), y_r(t), \theta_r(t))$ 可以是固定点或是可行/不可行轨迹. 如果参考轨迹 $(x_r(t), y_r(t), \theta_r(t))$ 满足式(1)的运动学约束则称其为可行轨迹, 否则称为不可行轨迹<sup>[26]</sup>. 对参考轨迹做如下假设:

**假设 2**  $(\dot{x}_r(t), \dot{y}_r(t), \dot{\theta}_r(t), \ddot{x}_r(t), \ddot{y}_r(t), \ddot{\theta}_r(t))$ 始终有界.

在实际中, 目标 $(x_r(t), y_r(t), \theta_r(t))$ 的速度和加速度始终有界, 因此这个假设是合理的.

轮式移动机器人任意轨迹跟踪统一控制器设计问题可以描述为: 在假设1–2下, 设计控制律 $(\bar{\tau}_1(\cdot), \bar{\tau}_2(\cdot))$ 使得机器人可以跟踪任意参考轨迹, 即机器人位置和角度误差 $(x - x_r, y - y_r, \theta - \theta_r)$ 全局一致最终有界, 且最终界可以通过调节控制器参数被设置到任意小.

接下来利用文献[18, 22–23]的坐标变换将机器人的误差模型转换为一种有利的形式. 首先定义如下误差变量:

$$\begin{cases} x_e = \tilde{x} \cos \theta + \tilde{y} \sin \theta, \\ y_e = -\tilde{x} \sin \theta + \tilde{y} \cos \theta, \\ \theta_e = \theta - \theta_r, \end{cases} \quad (2)$$

其中位置误差变量 $\tilde{x}, \tilde{y}$ 定义为

$$\tilde{x} = x - x_r, \quad \tilde{y} = y - y_r. \quad (3)$$

此时位置和角度误差动态可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_e = v + y_e r - \dot{x}_r \cos \theta - \dot{y}_r \sin \theta, \\ \dot{y}_e = \dot{x}_r \sin \theta - \dot{y}_r \cos \theta - x_e r, \\ \dot{\theta}_e = r - \dot{\theta}_r. \end{cases} \quad (4)$$

基于式(2)定义新的误差变量

$$z_1 = \theta_e, \quad z_2 = x_e, \quad \omega = -x_e \theta_e - 2y_e. \quad (5)$$

对式(5)求导并结合式(1)–(4), 可得误差变量动态方程为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = u_1, \\ \dot{z}_2 = u_2, \\ \dot{\omega} = u_1 z_2 - u_2 z_1 + f, \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$\begin{cases} f = 2z_2\dot{\theta}_r - 2\dot{x}_r \sin \theta + 2\dot{y}_r \cos \theta, \\ u_1 = r - \dot{\theta}_r, \\ u_2 = v + y_e r - \dot{x}_r \cos \theta - \dot{y}_r \sin \theta. \end{cases} \quad (7)$$

式(6)为受扰的一阶非完整积分器,  $f$ 为扰动项(见文献[25]), 这种形式有利于统一控制器的设计. 对式(7)中的 $u_1, u_2$ 求导并结合式(1)–(6)可得

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \dot{r} - \ddot{\theta}_r = \beta_2 \bar{\tau}_2 - \ddot{\theta}_r, \\ \dot{u}_2 &= \dot{v} + y_e \dot{r} - \ddot{x}_r \cos \theta - \ddot{y}_r \sin \theta + \\ &\quad (\dot{y}_e + \dot{x}_r \sin \theta - \dot{y}_r \cos \theta)r \triangleq \\ &\quad \beta_1 \bar{\tau}_1 - \frac{1}{2} \beta_2 \bar{\tau}_2 (\omega + z_1 z_2) + f_{u2}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$f_{u2} = -\ddot{x}_r \cos \theta - \ddot{y}_r \sin \theta + (\dot{y}_e + \dot{x}_r \sin \theta - \dot{y}_r \cos \theta)r.$$

此时机器人模型(1)转换为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = u_1, \\ \dot{z}_2 = u_2, \\ \dot{\omega} = u_1 z_2 - u_2 z_1 + f, \\ \dot{u}_1 = \frac{1}{\gamma_2} \bar{\tau}_2 - \ddot{\theta}_r, \\ \dot{u}_2 = \frac{1}{\gamma_1} \bar{\tau}_1 - \frac{1}{2\gamma_2} \bar{\tau}_2 (\omega + z_1 z_2) + f_{u2}, \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $\gamma_1 = \beta_1^{-1}, \gamma_2 = \beta_2^{-1}, u_1, u_2, f$ 在式(7)中给出.

基于模型(10), 本文的控制目标可以重新描述为: 在假设1–2和参数 $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ 未知的情况下, 设计控制输入 $(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ 使得跟踪误差 $(z_1, z_2, \omega)$ 全局一致最终有界, 且最终界可以任意小.

**注1** 机器人跟踪可行轨迹时, 参考轨迹可以表示为 $\dot{x}_r = v_r \cos \theta_r, \dot{y}_r = v_r \sin \theta_r$ , 其中 $v_r$ 表示参考轨迹线速度. 此时 $f = 2(z_2 \dot{\theta}_r - v_r \sin z_1)$ . 设计如下虚拟速度控制律以镇定 $(z_1, z_2, \omega)$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{1+\omega^2} [k_0(z_1 + z_2\omega) + \omega(-2v_r \frac{\sin z_1}{z_1} + 2\omega \dot{\theta}_r)], \\ u_2 &= -\frac{1}{1+\omega^2} [k_0(z_2 - z_1\omega) + \omega(2v_r \omega \frac{\sin z_1}{z_1} + 2\dot{\theta}_r)], \\ k_0 &\geq 0, \frac{\sin z_1}{z_1} \Big|_{z_1=0} = 1. \end{aligned}$$

取备选 Lyapunov 函数  $V_0 = 0.5(z_1^2 + z_2^2 + \omega^2)$ , 则  $\dot{V}_0 = -k_0(z_1^2 + z_2^2) \leq 0$ . 利用 Barbalat 引理可以证明  $\dot{V}_0 \rightarrow 0, (z_1, z_2) \rightarrow 0$ . 而且可以进一步证明: 只要  $\lim_{t \rightarrow \infty} (|v_r| + |\dot{\theta}_r|) \neq 0$ , 则  $(z_1, z_2) \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0$ . 由于篇幅限制, 具体证明过程在此省略. 基于虚拟控制律并结合自适应技术和后退法, 可以进一步设计实际控制律 $(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ 使得 $(z_1, z_2, \omega) \rightarrow 0$ .

然而, 此控制律只能跟踪特定类型的可行参考轨迹, 不能跟踪不可行或定常参考轨迹. 因此, 需要设计可以跟踪任意参考轨迹(包括不可行轨迹)的统一控制器.

考虑到不可行轨迹跟踪最好的结果是全局一致最终有界跟踪<sup>[27]</sup>, 因此本文的控制目标是设计统一控制律保证跟踪误差 $(z_1, z_2, \omega)$ 全局一致最终有界, 且最终界可以任意小.

### 3 控制器设计(Controller design)

基于模型(10), 本节分两步设计统一控制器: I) 为 $(z_1, z_2, u_1, u_2)$ 设计辅助轨迹 $(z_{1d}, z_{2d}, \dot{z}_{1d}, \dot{z}_{2d})$ 使得 $(z_{1d}, z_{2d})$ 全局一致最终有界, 且最终界可以任意小; II) 设计自适应控制律 $(\bar{\tau}_1(\cdot), \bar{\tau}_2(\cdot))$ 使得 $(z_1, z_2, u_1, u_2)$ 全局趋于 $(z_{1d}, z_{2d}, \dot{z}_{1d}, \dot{z}_{2d})$ . 此时 $(z_1, z_2, \omega)$ 全局一致最终有界.

#### 3.1 辅助轨迹设计(Design of auxiliary trajectory)

辅助轨迹 $(z_{1d}, z_{2d}, \dot{z}_{1d}, \dot{z}_{2d})$ 设计为

$$\dot{z}_{1d} = -k_1 z_{1d} (\rho - \varepsilon^2) - \frac{z_{2d}}{\rho} (f + k_2 \omega), \quad (11)$$

$$\dot{z}_{2d} = -k_1 z_{2d} (\rho - \varepsilon^2) + \frac{z_{1d}}{\rho} (f + k_2 \omega), \quad (12)$$

其中:  $\rho = z_{1d}^2 + z_{2d}^2, k_1 > 0, k_2 > 0, \varepsilon > 0, \rho(0) \geq \varepsilon^2, \omega, f$ 在式(5)(7)中给出.

**引理1** 式(11)–(12)的辅助动态 $(z_{1d}, z_{2d})$ 保证: 1)  $(z_{1d}, z_{2d}, \rho)$ 全局一致最终有界, 最终界为 $(\alpha_1 \varepsilon, \alpha_1 \varepsilon, \alpha_1 \varepsilon^2), \alpha_1 > 1$ , 且最终界可以通过减小 $\varepsilon$ 而变得任意小; 2)  $\dot{z}_{1d} z_{2d} - \dot{z}_{2d} z_{1d} = -(f + k_2 \omega)$ .

**证** 对 $\rho$ 求导可得 $\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = -k_1 \rho (\rho - \varepsilon^2)$ . 此式的解析解为

$$\rho(t) = \frac{\varepsilon^2}{1 - \left[ 1 - \frac{\varepsilon^2}{\rho(0)} \right] e^{-2\varepsilon^2 k_1 t}},$$

$$\rho(0) \geq \varepsilon^2 > 0, k_1 > 0.$$

由此可知,  $\rho(t)$ 渐近趋于 $\varepsilon^2$ , 即 $\rho(t) \geq \varepsilon^2, \rho(t) \rightarrow \varepsilon^2$ . 因此,  $(z_{1d}, z_{2d}, \rho)$ 全局一致最终有界, 最终界为 $(\alpha_1 \varepsilon, \alpha_1 \varepsilon, \alpha_1 \varepsilon^2)$ , 且可以任意小, 其中 $\alpha_1 > 1$ .

由式(11)–(12)可以直接得到 $\dot{z}_{1d} z_{2d} - \dot{z}_{2d} z_{1d} = -(f + k_2 \omega)$ .

**注2** 由引理1的证明过程可知 $f + k_2 \omega$ 不要求有界. 实际上, 无论 $f + k_2 \omega$ 是否有界, 只要 $\rho(0) \geq \varepsilon^2, k_1 > 0$ , 辅助轨迹 $(z_{1d}, z_{2d})$ 最终必定会收敛到一个稳定的极限环 $z_{1d}^2 + z_{2d}^2 = \varepsilon^2$ .

#### 3.2 实际控制律设计(Design of actual control law)

定义辅助误差变量

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - z_{1d}, \dot{e}_1 = u_1 - \dot{z}_{1d}, \\ e_2 = z_2 - z_{2d}, \dot{e}_2 = u_2 - \dot{z}_{2d}, \end{cases} \quad (13)$$

$$s_1 = \dot{e}_1 + k_3 e_1, s_2 = \dot{e}_2 + k_4 e_2, \quad (14)$$

其中:  $k_3 > 0, k_4 > 0$ .

由式(10)(13)–(14)可得 $s_1, s_2$ 状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \frac{1}{\gamma_2} \bar{\tau}_2 - \ddot{\theta}_r - \dot{z}_{1d} + k_3 \dot{e}_1 \triangleq \\ &\frac{1}{\gamma_2} \bar{\tau}_2 - f_{s1} - k_5 s_1, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 &= \frac{1}{\gamma_1} \bar{\tau}_1 - \frac{1}{2\gamma_2} (\omega + z_1 z_2) \bar{\tau}_2 + f_{u2} - \\ &\dot{z}_{2d} + k_4 \dot{e}_2 \triangleq \frac{1}{\gamma_1} \bar{\tau}_1 - \frac{1}{2\gamma_2} (\omega + \\ &z_1 z_2) \bar{\tau}_2 + f_{s2} - k_6 s_2, \end{aligned} \quad (16)$$

其中:

$$k_5 > 0, k_6 > 0,$$

$$f_{s1} = \ddot{\theta}_r + \dot{z}_{1d} - k_3 \dot{e}_1 - k_5 s_1,$$

$$f_{s2} = f_{u2} - \dot{z}_{2d} + k_4 \dot{e}_2 + k_6 s_2,$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1d} &= -k_1 \dot{z}_{1d} (\rho - \varepsilon^2) - k_1 z_{1d} \dot{\rho} + \frac{z_{2d}(f + k_2 \omega)}{\rho^2} \dot{\rho} - \\ &\frac{\dot{z}_{2d}(f + k_2 \omega) + z_{2d}(\dot{f} + k_2 \dot{\omega})}{\rho}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{2d} &= -k_1 \dot{z}_{2d} (\rho - \varepsilon^2) - k_1 z_{2d} \dot{\rho} - \frac{z_{1d}(f + k_2 \omega)}{\rho^2} \dot{\rho} + \\ &\frac{\dot{z}_{1d}(f + k_2 \omega) + z_{1d}(\dot{f} + k_2 \dot{\omega})}{\rho}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\dot{\rho} = -2k_1 \rho (\rho - \varepsilon^2),$$

$$\begin{aligned} \dot{f} &= 2\dot{z}_2 \dot{\theta}_r + 2z_2 \ddot{\theta}_r - 2\ddot{x}_r \sin \theta - 2\dot{x}_r \cos \theta r + \\ &2\ddot{y}_r \cos \theta - 2\dot{y}_r \sin \theta r. \end{aligned}$$

基于式(15)–(16), 设计控制输入 $\bar{\tau}_1(\cdot), \bar{\tau}_2(\cdot)$ 使得 $(s_1, s_2) \rightarrow 0$ , 即 $(e_1, e_2, \dot{e}_1, \dot{e}_2) \rightarrow 0$ . 相应结果在如下定理中给出.

**定理 1** 基于假设1–2和辅助轨迹(11)–(12), 并选择控制参数 $k_7 > 0, k_8 > 0$ , 则如下的自适应控制律:

$$\bar{\tau}_1 = -\hat{\gamma}_1 f_{s2} + \frac{\hat{\gamma}_1}{2} (\omega + z_1 z_2) f_{s1}, \quad (19)$$

$$\bar{\tau}_2 = \hat{\gamma}_2 f_{s1}, \quad (20)$$

$$\dot{\hat{\gamma}}_1 = k_7 s_2 [f_{s2} - \frac{1}{2} (\omega + z_1 z_2) f_{s1}], \quad (21)$$

$$\dot{\hat{\gamma}}_2 = -k_8 s_1 f_{s1} + \frac{1}{2} k_8 s_2 (\omega + z_1 z_2) f_{s1}, \quad (22)$$

可以保证: 1)  $(s_1, s_2, \omega)$  全局趋于零; 2) 模型(10)中的跟踪误差 $(z_1, z_2)$  全局一致最终有界, 且最终界为 $(\alpha_1 \alpha_2 \varepsilon, \alpha_1 \alpha_2 \varepsilon)$ ,  $\alpha_2 > 1$ ; 3) 控制输入 $(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$  全局有界.

**证** 将式(20)代入式(15)可得

$$\dot{s}_1 = \frac{\hat{\gamma}_2}{\gamma_2} f_{s1} - f_{s1} - k_5 s_1 = -k_5 s_1 - \frac{\bar{\gamma}_2}{\gamma_2} f_{s1}, \quad (23)$$

其中 $\bar{\gamma}_2 = \gamma_2 - \hat{\gamma}_2$ ,  $\hat{\gamma}_2$  表示 $\gamma_2$ 的估计值.

将式(19)–(20)代入式(16)得到

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 &= \\ &-\frac{\hat{\gamma}_1}{\gamma_1} f_{s2} + \frac{\hat{\gamma}_1}{2\gamma_1} (\omega + z_1 z_2) f_{s1} + \\ &f_{s2} - k_6 s_2 - \frac{\hat{\gamma}_2}{2\gamma_2} (\omega + z_1 z_2) f_{s1} = \\ &-k_6 s_2 + \frac{\bar{\gamma}_1}{\gamma_1} f_{s2} + \frac{1}{2} (\omega + z_1 z_2) f_{s1} (\frac{\hat{\gamma}_1}{\gamma_1} - \frac{\hat{\gamma}_2}{\gamma_2}) = \\ &-k_6 s_2 + \frac{\bar{\gamma}_1}{\gamma_1} (f_{s2} - \frac{1}{2} (\omega + z_1 z_2) f_{s1}) + \\ &\frac{1}{2} \frac{\bar{\gamma}_2}{\gamma_2} (\omega + z_1 z_2) f_{s1}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中用到等式

$$\begin{cases} \frac{\hat{\gamma}_1}{\gamma_1} - \frac{\hat{\gamma}_2}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1 - \bar{\gamma}_1}{\gamma_1} - \frac{\gamma_2 - \bar{\gamma}_2}{\gamma_2} = -\frac{\bar{\gamma}_1}{\gamma_1} + \frac{\bar{\gamma}_2}{\gamma_2}, \\ \bar{\gamma}_1 = \gamma_1 - \hat{\gamma}_1, \end{cases}$$

$\hat{\gamma}_1$  表示 $\gamma_1$ 的估计值.

构造备选Lyapunov函数

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + \frac{\bar{\gamma}_1^2}{\gamma_1 k_7} + \frac{\bar{\gamma}_2^2}{\gamma_2 k_8}), \\ &\gamma_1 k_7 > 0, \gamma_2 k_8 > 0, \end{aligned}$$

结合式(21)–(24)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -k_5 s_1^2 - k_6 s_2^2 - \frac{\bar{\gamma}_2}{\gamma_2} s_1 f_{s1} + \\ &\frac{\bar{\gamma}_1}{\gamma_1} s_2 [f_{s2} - \frac{1}{2} (\omega + z_1 z_2) f_{s1}] + \\ &\frac{1}{2} \frac{\bar{\gamma}_2}{\gamma_2} s_2 (\omega + z_1 z_2) f_{s1} + \frac{\bar{\gamma}_1 \dot{\bar{\gamma}}_1}{\gamma_1 k_7} + \frac{\bar{\gamma}_2 \dot{\bar{\gamma}}_2}{\gamma_2 k_8} = \\ &-k_5 s_1^2 - k_6 s_2^2 \leq q_0. \end{aligned} \quad (25)$$

1) 变量 $s_1, s_2, \omega$  全局趋于零.

由于 $V_1 \geq 0, \dot{V}_1 \leq 0$ , 可得

$$0 \leq V_1(\infty) \leq V_1(t) \leq V_1(t_0) < \infty.$$

为了利用Barbalat引理证明 $(s_1, s_2) \rightarrow 0$ , 需要证明 $\dot{V}_1$ 一致连续, 即证明 $\dot{V}_1$ 有界.

由于 $V_1$ 有界, 因此 $(s_1, s_2, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2)$ 有界,  $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$ 有界. 由式(14)得

$$\dot{e}_1 = -k_3 e_1 + s_1, \dot{e}_2 = -k_4 e_2 + s_2,$$

可得 $(e_1, \dot{e}_1, e_2, \dot{e}_2)$ 有界. 又因为 $(z_{1d}, z_{2d})$ 有界, 所以 $(z_1, z_2)$ 有界. 基于以上分析和假设2可知, 如果 $\omega$ 有界, 则 $\dot{s}_1, \dot{s}_2$ 有界.

结合引理1中

$$\dot{z}_{1d} z_{2d} - \dot{z}_{2d} z_{1d} = -(f + k_2 \omega)$$

可得 $\omega$ 动态为

$$\dot{\omega} = u_1 z_2 - u_2 z_1 + f =$$

$$(\dot{z}_{1d} + \dot{e}_1)(z_{2d} + e_2) - (\dot{z}_{2d} + \dot{e}_2)(z_{1d} + e_1) + f =$$

$$\begin{aligned} & \dot{z}_{1d}z_{2d} - \dot{z}_{2d}z_{1d} + \dot{e}_1(z_{2d} + e_2) - \dot{e}_2(z_{1d} + e_1) + \\ & e_2\dot{z}_{1d} - e_1\dot{z}_{2d} + f = \\ & -k_2\omega + \dot{e}_1(z_{2d} + e_2) - \dot{e}_2(z_{1d} + e_1) + \\ & e_2\dot{z}_{1d} - e_1\dot{z}_{2d}. \end{aligned} \quad (26)$$

然而, 由于式(26)中 $(\dot{z}_{1d}, \dot{z}_{2d})$ 隐含 $\omega$ , 所以不能由式(26)直接得到 $\omega$ 的有界性. 为了消除耦合项 $(e_2\dot{z}_{1d} - e_1\dot{z}_{2d})$ 项, 引入状态变换 $\bar{\omega} = \omega - e_2z_{1d} + e_1z_{2d}$ 并得到

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\omega}} &= -k_2\omega + \dot{e}_1(z_{2d} + e_2) - \dot{e}_2(z_{1d} + e_1) - \\ & \dot{e}_2z_{1d} + \dot{e}_1z_{2d} \triangleq \\ & -k_2\bar{\omega} + f_\omega, \quad k_2 > 0, \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} f_\omega &= -k_2(e_2z_{1d} - e_1z_{2d}) + \dot{e}_1(z_{2d} + e_2) - \\ & \dot{e}_2(z_{1d} + e_1) - \dot{e}_2z_{1d} + \dot{e}_1z_{2d}. \end{aligned}$$

由于 $(e_1, \dot{e}_1, e_2, \dot{e}_2, z_{1d}, z_{2d})$ 均有界, 故 $f_\omega$ 有界. 式(27)显示 $\bar{\omega}$ 有界, 故 $\omega$ 也有界. 因此,  $(\dot{s}_1, \dot{s}_2)$ 有界,  $\ddot{V}_1 = -2k_5s_1\dot{s}_1 - 2k_6s_2\dot{s}_2$ 有界, 从而 $\dot{V}_1$ 一致连续.

综合以上分析和Barbalat引理可知 $\dot{V}_1 \rightarrow 0$ , 因此 $(s_1, s_2) \rightarrow 0$ , 即 $(e_1, e_2, \dot{e}_1, \dot{e}_2) \rightarrow 0$ . 因为 $(e_1, e_2, \dot{e}_1, \dot{e}_2) \rightarrow 0$ 且 $(z_{1d}, z_{2d})$ 全局一致最终有界, 所以 $f_\omega \rightarrow 0$ ,  $(\bar{\omega}, \omega) \rightarrow 0$ . 总之 $s_1, s_2, e_1, e_2, \dot{e}_1, \dot{e}_2, \omega$ 均全局趋于零.

最后, 由以上分析和 $(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ 的表达式(19)–(20)可知, 控制输入 $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$ 全局有界.

2) 跟踪误差 $(z_1, z_2)$ 全局一致最终有界, 且最终界为 $(\alpha_1\alpha_2\varepsilon, \alpha_1\alpha_2\varepsilon)$ ,  $\alpha_2 > 1$ .

因为 $(e_1, e_2) \rightarrow 0$ ,  $(z_{1d}, z_{2d})$ 全局一致最终有界且最终界为 $\alpha_1\varepsilon$ , 因此 $z_1 = e_1 + z_{1d}, z_2 = e_2 + z_{2d}$ 全局一致最终有界且最终界为 $(\alpha_1\alpha_2\varepsilon, \alpha_1\alpha_2\varepsilon)$ . 显然, 最终界可通过减小 $\varepsilon$ 而变得任意小.

**推论 1** 引理1和定理1保证机器人位置和角度跟踪误差 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \theta_e)$ 全局一致最终有界, 最终界为

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\alpha_3(2 + \alpha_1\alpha_2\varepsilon)\varepsilon, \right. \\ & \left. \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\alpha_3(2 + \alpha_1\alpha_2\varepsilon)\varepsilon, \alpha_1\alpha_2\varepsilon \right), \quad \alpha_3 > 1, \end{aligned}$$

且可以被设置到任意小.

**证** 由式(2)–(3)(5)可得

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{1}{2}(z_1 \sin \theta + 2 \cos \theta)z_2 + \frac{1}{2} \sin \theta \omega, \\ \tilde{y} = -\frac{1}{2}(z_1 \cos \theta - 2 \sin \theta)z_2 - \frac{1}{2} \cos \theta \omega, \\ \theta_e = z_1. \end{cases}$$

应用范数不等式可以得到

$$\begin{cases} \|\tilde{x}\| \leq \frac{1}{2}(2 + \|z_1\|)\|z_2\| + \frac{1}{2}\|\omega\|, \\ \|\tilde{y}\| \leq \frac{1}{2}(2 + \|z_1\|)\|z_2\| + \frac{1}{2}\|\omega\|, \\ \|\tilde{\theta}\| = \|z_1\|. \end{cases} \quad (28)$$

推论1可以由式(28)和定理1直接得到.

**注 3** 在本文中, 跟踪误差最终界可以任意小, 但不能渐近收敛到零. 这是因为式(11)–(12)中的辅助状态 $(z_{1d}, z_{2d})$ 最终收敛到极限环 $z_{1d}^2 + z_{2d}^2 = \varepsilon^2 (\varepsilon > 0)$ , 而不是零.

**注 4** 在暂态响应过程中, 增大 $\rho(0)$ 或减小 $k_1$ 可以减小控制输入的幅值. 在稳态响应过程中, 减小 $\varepsilon$ 将导致控制输入幅值增大, 增大 $\varepsilon$ 将使得跟踪误差最终界增大.

**注 5** 与文献[19–24]只能跟踪可行参考轨迹相比, 本文的控制器可以跟踪任意参考轨迹, 包括可行和不可行轨迹. 与文献[26–27]相比, 本文对系统模型参数不确定具有鲁棒性.

#### 4 仿真实验(Simulation verification)

本节通过仿真算例验证所设计控制律的有效性. 在此给出4种参考轨迹: 可行固定点、可行直线、可行圆、不可行轨迹. 其中可行轨迹可以由式(29)产生:

$$\dot{x}_r = v_r \cos \theta_r, \dot{y}_r = v_r \sin \theta_r, \dot{\theta}_r = r_r, \quad (29)$$

不可行轨迹不能由式(29)产生. 基于文献[29]中给出的模型参数 $\beta_1 = 0.167, \beta_2 = 2.17$ , 在此给出4种参考轨迹跟踪仿真结果.

1) 可行固定点轨迹.

可行固定点轨迹由式(29)直接产生, 初始值选为 $(v_r, r_r)(0) = (0, 0), (x_r, y_r, \theta_r)(0) = (0, 0, 0)$ . 机器人状态和估计值初始值选为

$$\begin{aligned} (x, y, \theta, v, r)(0) &= (-3, -3, 1, 0, 0), \\ (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)(0) &= (5, 1). \end{aligned}$$

控制参数选为

$$\begin{cases} (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8) = \\ (0.1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \\ \varepsilon = 0.1, (z_{1d}, z_{2d})(0) = (0, -3). \end{cases}$$

可行固定点跟踪仿真结果如图1所示.

2) 可行直线轨迹.

可行直线轨迹由式(29)直接产生, 初始值选为 $(v_r, r_r)(0) = (0.2, 0), (x_r, y_r, \theta_r)(0) = (0, 0, 0)$ . 机器人状态和估计值初始值选为

$$\begin{aligned} (x, y, \theta, v, r)(0) &= (-3, -2, 0, 0, 0), \\ (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)(0) &= (5, 1), \end{aligned}$$

控制参数选为

$$\begin{cases} (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8) = \\ (0.1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \\ \varepsilon = 0.1, (z_{1d}, z_{2d})(0) = (0, -3). \end{cases}$$

可行直线跟踪仿真结果如图2所示.

3) 可行圆轨迹.

可行圆轨迹由式(29)直接产生, 初始值选为  $(v_r, r_r)(0) = (0.2, 0.04), (x_r, y_r, \theta_r)(0) = (0, 0, 0)$ . 与前两个仿真算例相似, 选择机器人状态和估计值初始值为

$$\begin{aligned} (x, y, \theta, v, r)(0) &= (-1, -1, 1, 0, 0), \\ (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)(0) &= (5, 1), \end{aligned}$$

控制参数选为

$$\begin{cases} (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8) = \\ (0.1, 0.05, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \\ \varepsilon = 0.5, (z_{1d}, z_{2d})(0) = (0, -1). \end{cases}$$

可行圆跟踪仿真结果如图3所示.

4) 不可行轨迹.

不可行参考轨迹可以由机器人模型间接产生:

$$\begin{aligned} x_r &= x_{r1} + L_1 \cos \theta_{r1}, \quad y_r = y_{r1} + L_1 \sin \theta_{r1}, \\ \theta_r &= \theta_{r1}, \quad \dot{x}_{r1} = v_{r1} \cos \theta_{r1}, \\ \dot{y}_{r1} &= v_{r1} \sin \theta_{r1}, \quad \dot{\theta}_{r1} = r_{r1}, \end{aligned}$$

其中  $(x_r, y_r)$  表示机器人对称轴上距离质心  $L_1$  的一点. 在此选择

$$\begin{aligned} (v_{r1}, r_{r1})(0) &= (0.2, 0.04), \\ (x_{r1}, y_{r1}, \theta_{r1})(0) &= (0, 0, 0), \quad L_1 = 1, \end{aligned}$$

机器人状态和估计值初始值选为

$$\begin{aligned} (x, y, \theta, v, r)(0) &= (-1, -1, 1, 0, 0), \\ (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)(0) &= (5, 1), \end{aligned}$$

并选择控制参数

$$\begin{cases} (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8) = \\ (0.1, 0.05, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \\ \varepsilon = 0.5, (z_{1d}, z_{2d})(0) = (0, -1). \end{cases}$$

不可行轨迹跟踪仿真结果如图4所示. 接下来, 保持所有状态初始值和控制参数不变, 令  $\varepsilon = 0.2$ , 并得到仿真结果如图5所示.

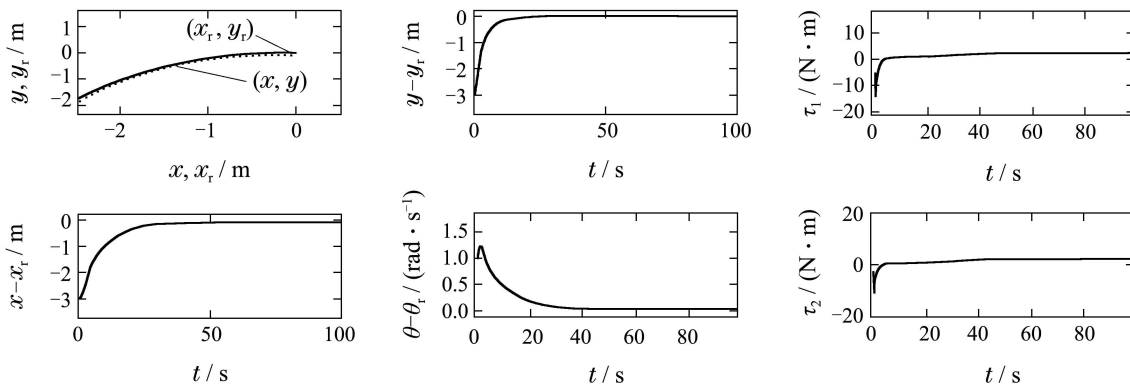


图1 可行固定点镇定仿真结果

Fig. 1 Simulation results for the feasible fixed-point stabilization

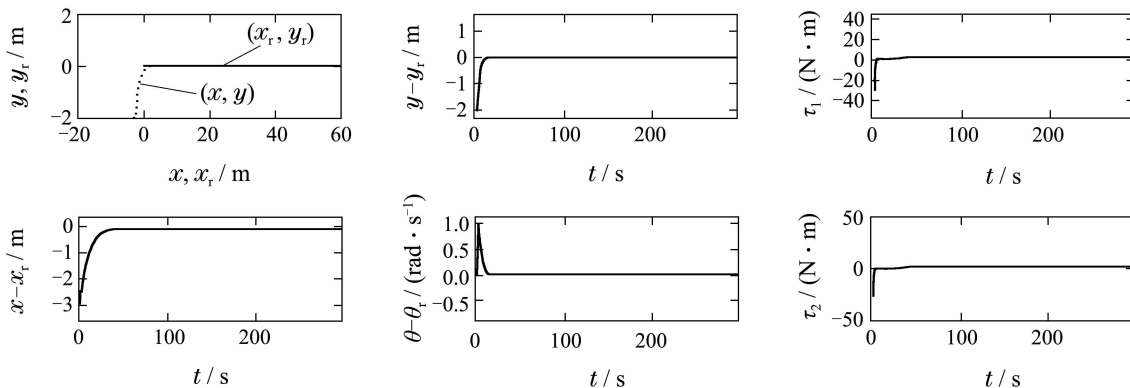


图2 可行直线跟踪仿真结果

Fig. 2 Simulation results for tracking the feasible straight line

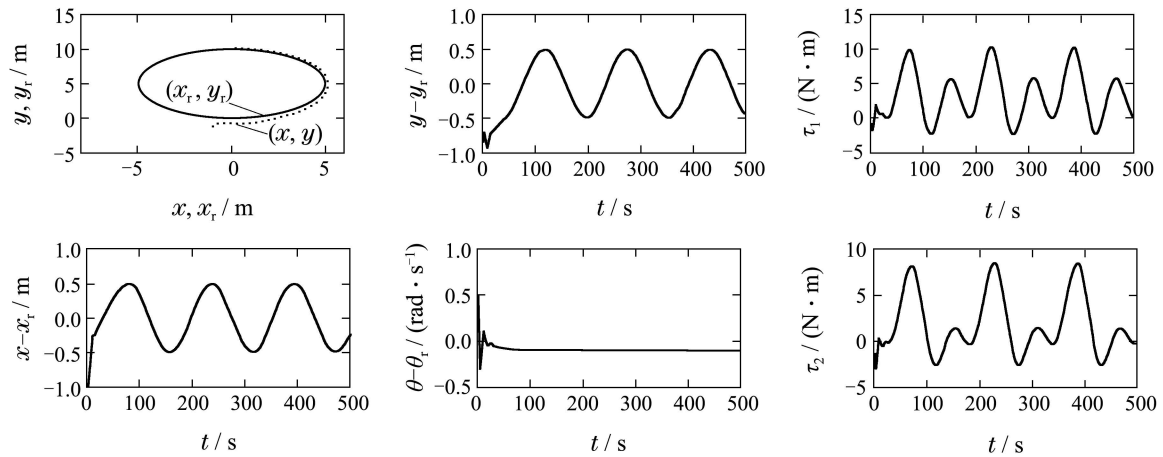


图 3 可行圆跟踪仿真结果

Fig. 3 Simulation results for tracking the feasible circle path

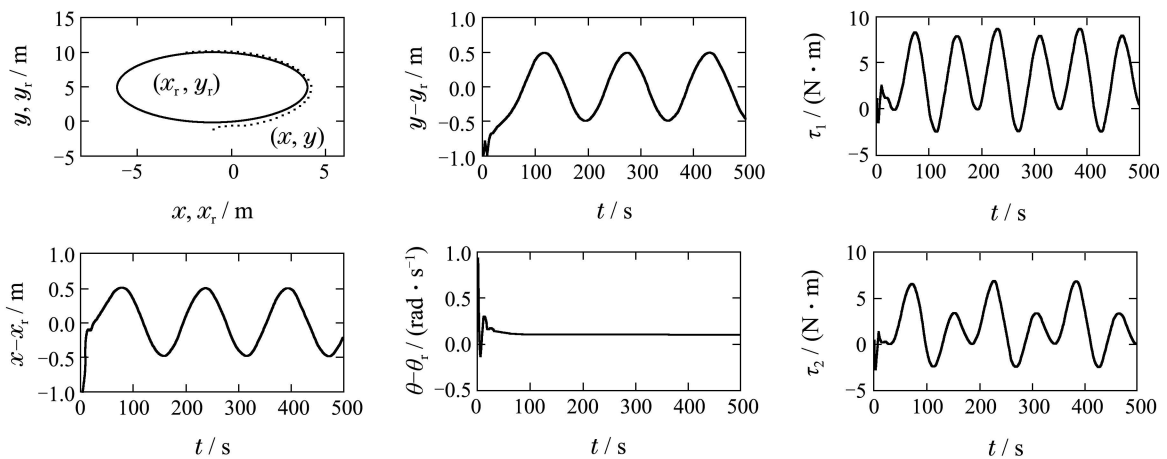


图 4  $\epsilon = 0.5$  时不可行轨迹跟踪仿真结果

Fig. 4 Simulation results for tracking the non-feasible trajectory with  $\epsilon = 0.5$

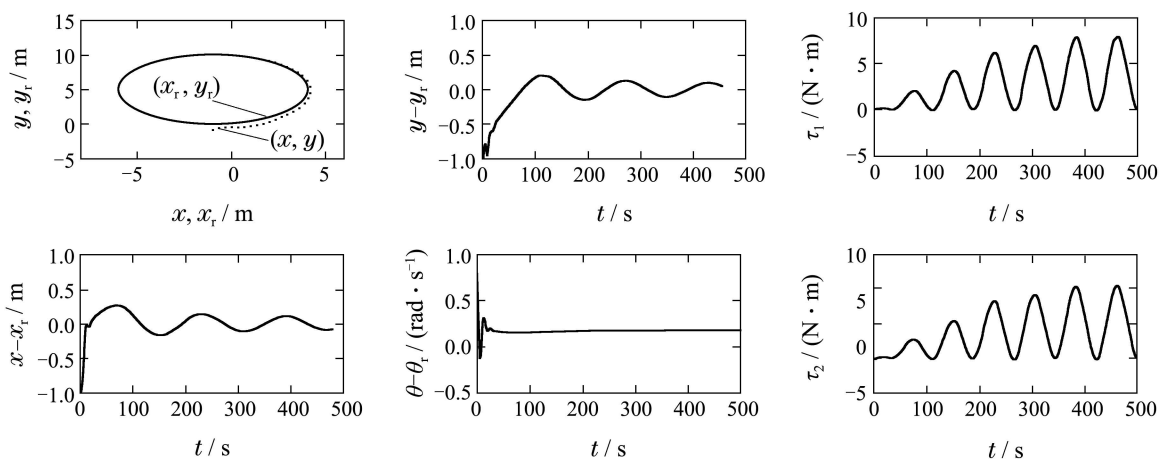


图 5  $\epsilon = 0.2$  时不可行轨迹跟踪仿真结果

Fig. 5 Simulation results for tracking the non-feasible trajectory with  $\epsilon = 0.2$

图1-5仿真结果表明: 1) 所设计的控制器可以跟踪任意参考轨迹, 包括固定点、可行/不可行轨迹; 2) 跟踪误差最终收敛到一个由 $\epsilon$ 值决定大小的原点邻域内; 3) 跟踪误差的最终界可以通过减小 $\epsilon$ 而

减小, 但是会增大控制输入的幅值。

### 5 结论(Conclusion)

本文针对参数不确定轮式移动机器人设计了动态反馈统一控制律, 该控制律可以跟踪任意参考轨

迹,跟踪误差全局一致最终有界、且最终界可以任意小.构造的辅助轨迹克服了渐近稳定非完整系统所遇到的困难.利用Lyapunov方法得到的参数自适应控制律实现了对辅助轨迹的跟踪.所提出的控制律可以实际镇定任意参考轨迹(包括固定点、可行轨迹和不可行轨迹).下一步的工作是将本文的控制器设计方法推广到其他非完整欠驱动系统.

### 参考文献(References):

- [1] BROCKETT R W. *Asymptotic Stability and Feedback Stabilization* [M]. Boston: Birkhauser, 1983.
- [2] BLOCH A M, REYHANOGLU M, MCCLAMROCH N H. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(11): 1746 – 1757.
- [3] DE WIT C C, SORDALEN O J. Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(11): 1791 – 1797.
- [4] SAMSON C. Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart [J]. *Advanced Robot Control*, 1991: 125 – 151.
- [5] JIANG Z P. Iterative design of time-varying stabilizers for multi-input systems in chained form [J]. *Systems & Control Letters*, 1996, 28(5): 255 – 262.
- [6] SAMSON C. Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(1): 64 – 77.
- [7] GODHAVN J M, EGELAND O. A Lyapunov approach to exponential stabilization of nonholonomic systems in power form [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(7): 1028 – 1032.
- [8] M'CLOSKEY R T, MURRAY R M. Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(5): 614 – 628.
- [9] ESCOBAR G, ORTEGA R, REYHANOGLU M. Regulation and tracking of the nonholonomic double integrator: A field-oriented control approach [J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 125 – 131.
- [10] DIXON W E, JIANG Z P, DAWSON D M. Global exponential set-point control of wheeled mobile robots: a Lyapunov approach [J]. *Automatica*, 2000, 36(11): 1741 – 1746.
- [11] KANAYAMA Y, KIMURA Y, MIYAZAKI F, et al. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Cincinnati, OH: IEEE, 1990: 384 – 389.
- [12] WALSH G, TILBURY D, SASTRY S, et al. Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(1): 216 – 222.
- [13] JIANG Z P, NIJMEIJER H. Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping [J]. *Automatica*, 1997, 33(7): 1393 – 1399.
- [14] JIANG Z P, NIJMEIJER H. A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(2): 265 – 279.
- [15] AGUILAR M, SOUERES P, COURDESSES M, et al. Robust path-following control with exponential stability for mobile robots [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Leuven: IEEE, 1998, 4: 3279 – 3284.
- [16] DE WIT C C, KHENNOUF H, SAMSON C, et al. *Nonlinear Control Design for Mobile Robots* [M]. Singapore: World Scientific, 1993.
- [17] DEL RIO F D, JIMÉNEZ G, SEVILLANO J L, et al. Error adaptive tracking for mobile robots [C] // *The 28th IEEE Annual Conference of the Industrial Electronics Society*. Sevilla, Spain: IEEE, 2002, 3: 2415 – 2420.
- [18] DIXON W E, DAWSON D M, ZHANG F, et al. Global exponential tracking control of a mobile robot system via a PE condition [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2000, 30(1): 129 – 142.
- [19] LEE T C, SONG K T, LEE C H, et al. Tracking control of unicycle-modeled mobile robots using a saturation feedback controller [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2001, 9(2): 305 – 318.
- [20] DO K D, JIANG Z P, PAN J. Simultaneous tracking and stabilization of mobile robots: an adaptive approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1147 – 1151.
- [21] DO K D, JIANG Z P, PAN J. A global output-feedback controller for simultaneous tracking and stabilization of unicycle-type mobile robots [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2004, 20(3): 589 – 594.
- [22] DIXON W E, DAWSON D M, ZERGEROGLU E. Tracking and regulation control of a mobile robot system with kinematic disturbances: a variable structure-like approach [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2000, 122: 616.
- [23] DIXON W E, DAWSON D M, ZERGEROGLU E, et al. Robust tracking and regulation control for mobile robots [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2000, 10: 199 – 216.
- [24] BEHAL A, DAWSON D M, DIXON W E, et al. Tracking and regulation control of an underactuated surface vessel with nonintegrable dynamics [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(3): 495 – 500.
- [25] BLOCH A, DRAKUNOV S. Stabilization and tracking in the nonholonomic integrator via sliding modes [J]. *Systems & Control Letters*, 1996, 29(2): 91 – 99.
- [26] MORIN P, SAMSON C. Practical stabilization of driftless systems on Lie groups: the transverse function approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(9): 1496 – 1508.
- [27] MORIN P, SAMSON C. Control of nonholonomic mobile robots based on the transverse function approach [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2009, 25(5): 1058 – 1073.
- [28] LAPIERRE L, SOETANTO D, PASCOAL A. Nonsingular path following control of a unicycle in the presence of parametric modelling uncertainties [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, 16(10): 485 – 503.
- [29] CORRADINI M L, ORLANDO G. Control of mobile robots with uncertainties in the dynamical model: a discrete time sliding mode approach with experimental results [J]. *Control Engineering Practice*, 2002, 10(1): 23 – 34.

### 作者简介:

庞海龙 (1988–), 男, 硕士研究生, 目前研究为非线性控制、轮式移动机器人控制, E-mail: phlok163@163.com;

马保离 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性系统控制、机器人控制, E-mail: mabaoli@buaa.edu.cn.