第9卷第3期
1992年6月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 3
Jun., 1992

连续系统中二次型性能函数对系统参数灵敏度的计算

孙增圻　马少平
(清华大学计算机系·北京,100084)

摘要: 本文给出了在连续系统中计算二次型性能函数对系统参数灵敏度的一般方法,结果归结为求解两个对偶的李雅普诺夫方程.同时给出了不同控制器结构时的具体算法.对于随机系统,也给出了相应的计算方法.最后举例说明本文结果在系统分析中的应用.

关键词: 参数灵敏度;二次型性能函数;李雅普诺夫方程

1 引　言

灵敏度是控制系统的一个重要指标,很多人对此进行了研究,如[1,2].本文讨论在连续系统中二次型性能函数对系统参数灵敏度计算的一般公式和算法.对于控制器为直接状态反馈及具有观测器结构的动态反馈时,分别讨论了对控制对象及控制器参数灵敏度的计算.对于随机系统也给出了相应的计算灵敏度的公式.最后举例说明了本文结果的应用.

2 主要结果

定理 1　设连续系统的模型及初始条件为

$$\dot{x} = Hx, \quad x(0) = x_0. \tag{1}$$

二次型性能函数为

$$J = \int_0^\infty x^T Q x \mathrm{d}t. \tag{2}$$

并设系统(1)是渐近稳定的,即 H 的所有特征值均在左半平面.则性能函数对系统参数的灵敏度为

$$\frac{\partial J}{\partial H} = 2SR. \tag{3}$$

其中 S 和 R 满足如下的李雅普诺夫方程:

$$H^T S + SH + Q = 0, \tag{4}$$

$$HR + RH^T + R_0 = 0, \quad R_0 = x_0 x_0^T. \tag{5}$$

为了证明该定理,首先给出如下两个引理:

引理 1[3]　如果 $f(X)$是矩阵 X 的标量函数,且有

$$f(X + \varepsilon \Delta X) - f(X) = \varepsilon \mathrm{tr}[M\Delta X] + O(\varepsilon^2) \tag{6}$$

成立,则

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = M^T. \tag{7}$$

本文于1991年6月24日收到. 1991年12月5日收到修改稿.

引理 2[4] 矩阵指数 $e^{(A+\varepsilon B)t}$可以展开成如下的级数形式：

$$e^{(A+\varepsilon B)t} = e^{At} + \varepsilon\int_0^t e^{A(t-\tau)}Be^{A\tau}\mathrm{d}\tau + O(\varepsilon^2). \tag{8}$$

其中 A 和 B 是维数相同的方阵，ε 是标量.

根据式(1)得

$$x(t) = e^{Ht}x(0). \tag{9}$$

将式(9)代入(2)并化简得

$$J = x^T(0)Sx(0) = \mathrm{tr}R_0S. \tag{10}$$

其中

$$S = \int_0^\infty e^{H^Tt}Qe^{Ht}\mathrm{d}t. \tag{11}$$

可以证明，当 H 的特征值均在左半平面时，S 满足如式(4)所示的李雅普诺夫方程.

根据引理 2，有

$$\begin{aligned} e^{(H+\varepsilon\Delta H)t} &= e^{Ht} + \varepsilon\int_0^t e^{H(t-\tau)}\Delta He^{H\tau}\mathrm{d}\tau + O(\varepsilon^2) \\ &= e^{Ht} + \varepsilon D + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$D = \int_0^t e^{H(t-\tau)}\Delta He^{H\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{13}$$

根据式(11)及(12)有

$$\begin{aligned} S(H+\varepsilon\Delta H) &= \int_0^\infty e^{(H+\varepsilon\Delta H)^Tt}Qe^{(H+\varepsilon\Delta H)t}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^\infty [e^{Ht} + \varepsilon D + O(\varepsilon^2)]^TQ[e^{Ht} + \varepsilon D + O(\varepsilon^2)]\mathrm{d}t \\ &= S(H) + \varepsilon(W + W^T) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$W = \int_0^\infty e^{H^Tt}QD\mathrm{d}t. \tag{15}$$

根据式(10)和(14)可得

$$\begin{aligned} J(H+\varepsilon\Delta H) &= \mathrm{tr}R_0S(H+\varepsilon\Delta H) = \mathrm{tr}R_0S(H) + \varepsilon\mathrm{tr}R_0(W+W^T) + O(\varepsilon^2) \\ &= J(H) + 2\varepsilon\mathrm{tr}R_0W + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}R_0W &= \mathrm{tr}R_0\int_0^\infty e^{H^Tt}Q\int_0^t e^{H(t-\tau)}\Delta He^{H\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{tr}R_0\int_0^\infty\int_0^t e^{H^Tt}Qe^{H(t-\tau)}\Delta He^{H\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{tr}R_0\int_0^\infty\int_\tau^\infty e^{H^Tt}Qe^{H(t-\tau)}\Delta He^{H\tau}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{tr}R_0\int_0^\infty\int_0^\infty e^{H^T(\sigma+\tau)}Qe^{H\sigma}\Delta He^{H\tau}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{tr}R_0\int_0^\infty e^{H^T\tau}S\Delta He^{H\tau}\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

$$=\mathrm{tr}\int_0^\infty e^{H\tau}R_0e^{H^T\tau}\mathrm{d}\tau S\Delta H=\mathrm{tr}RS\Delta H, \tag{17}$$

$$R=\int_0^\infty e^{H\tau}R_0e^{H^T\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{18}$$

显然 R 满足如式(5)所示的李雅普诺夫方程. 将式(17)代入(16)并根据引理 1 立即可得定理之结论.

定理 2　设给定控制对象的状态方程及初始条件为

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad x(0)=x_0. \tag{19}$$

其中 $x\in R^n, u\in R^m$,控制器为直接状态线性反馈,即

$$u=-Lx. \tag{20}$$

给定二次型性能函数为

$$J=\int_0^\infty (x^TQ_1x+u^TQ_2u)\mathrm{d}t. \tag{21}$$

其中 Q_1 和 Q_2 为非负定对称阵. 则性能函数对系统参数的灵敏度为

$$\frac{\partial J}{\partial A}=2SR,\quad \frac{\partial J}{\partial B}=-2SRL^T, \tag{22}$$

$$\frac{\partial J}{\partial L}=2(Q_2L-B^TS)R. \tag{23}$$

其中 S 和 R 满足

$$H^TS+SH+Q=0,\quad Q=Q_1+L^TQ_2L, \tag{24}$$

$$HR+RH^T+R_0=0,\quad R_0=x_0x_0^T. \tag{25}$$

定理 3　设控制对象及初始条件为

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu,\quad x(0)=x_0,\\ y=Cx.\end{cases} \tag{26}$$

其中 $x\in R^n, u\in R^m, y\in R^r$,控制器为具有观测器结构的动态反馈,即

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}=\hat{A}\hat{x}+\hat{B}u+K[y-C\hat{x}],\\ u=-L\hat{x}.\end{cases} \tag{27}$$

二次型性能函数同式(21). 则性能函数对系统参数的灵敏度为

$$\frac{\partial J}{\partial A}=2E_1^TSRE_1,\quad \frac{\partial J}{\partial B}=-2E_1^TSRE_2L^T, \tag{28}$$

$$\frac{\partial J}{\partial C}=2K^TE_2^TSRE_3,\quad \frac{\partial J}{\partial \hat{A}}=2E_2^TSRE_2, \tag{29}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{B}}=-2E_2^TSRE_2L^T,\quad \frac{\partial J}{\partial K}=2E_2^TSRE_3C^T, \tag{30}$$

$$\frac{\partial J}{\partial L}=2[Q_2LE_2^T-E_4^TS)RE_2. \tag{31}$$

其中

$$H^TS+SH+Q=0, \tag{32}$$

$$HR+RH^T+R_0=0, \tag{33}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & L^T Q_2 L \end{bmatrix}, \quad R_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ \hat{x}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^T & \hat{x}_0^T \end{bmatrix}, \tag{34}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} B \\ \hat{B} \end{bmatrix}. \tag{35}$$

以上定理2和定理3的证明可参照定理1. 限于篇幅，此处略去其证明过程. 定理1～3给出了确定性系统性能函数对系统参数灵敏度的计算方法. 下面给出随机系统的结果.

定理 4 设随机系统的状态方程为

$$\dot{x} = Hx + v. \tag{36}$$

其中 v 为白噪声干扰，且有

$$Ev(t) = 0, \quad Ev(t)v^T(\tau) = V\delta(t-\tau). \tag{37}$$

并设系统是渐近稳定的，且已处于平稳状态. 给定平均的性能函数为

$$J = E\left[\frac{1}{T}\int_0^T x^T Q x \mathrm{d}t\right]. \tag{38}$$

则性能函数对系统参数的灵敏度为

$$\frac{\partial J}{\partial H} = 2SP. \tag{39}$$

其中 S 和 P 满足如下的李雅普诺夫方程

$$H^T S + SH + Q = 0, \tag{40}$$

$$HP + PH^T + V = 0. \tag{41}$$

根据矩阵求迹性质，式(38)可变成

$$J = \mathrm{tr}\left[\frac{1}{T}\int_0^T (Exx^T) Q \mathrm{d}t\right]. \tag{42}$$

令 $P(t) = Ex(t)x^T(t)$，由于假设系统已处于平稳状态，从而有 $P(t) =$ 常数 $\triangleq P$. 将其代入式(42)可得

$$J = \mathrm{tr}PQ. \tag{43}$$

根据式(36)和(37)可以推得，$P = \int_0^\infty e^{Ht} V e^{H^T t} \mathrm{d}t$. 由于假定系统是渐近稳定的，因而 P 满足如式(41)所示的李雅普诺夫方程. 将 P 的表达式代入式(43)得

$$J = \mathrm{tr}\int_0^\infty e^{Ht} V e^{H^T t} \mathrm{d}t Q = \mathrm{tr}V \int_0^\infty e^{H^T t} Q e^{Ht} \mathrm{d}t = \mathrm{tr}VS. \tag{44}$$

其中 $S = \int_0^\infty e^{H^T t} Q e^{Ht} \mathrm{d}t$，它满足如式(40)所示的李雅普诺夫方程. 对比式(44)和(10)看出，两者具有相同的结构形式，而且其中 S 的表达式也相同. 只要建立 V 与 R_0 以及 P 与 R 的相应关系，则两者的表达式也是相同的. 因此参考式(3)立即可以得到式(39)的结果.

式(39)中包含了对系统所有参数的灵敏度，若给定控制对象及控制器的具体类型，也可象确定性系统那样(见定理2和3)求出对控制对象及控制器参数灵敏度的具体形式.

3 举 例

设系统的结构如图1所示. 其中

$$G(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}. \tag{45}$$

已知标称参数为：$T_1 = 2, T_2 = 0.5, T_3 = 0.05, T_4 = 0.01, K = 40$. 系统在标称参数下的伯德

图如图2所示.

设系统的初始条件为 $y(0)=1$, $y^{(i)}(0)=0(i=1,2,3)$. 设外输入 $r=0$,并选二次型性能函数

$$J=\int_0^\infty (150y^2+\dot{y}^2)\mathrm{d}t.$$

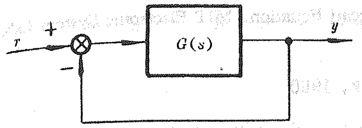

图 1　系统结构图

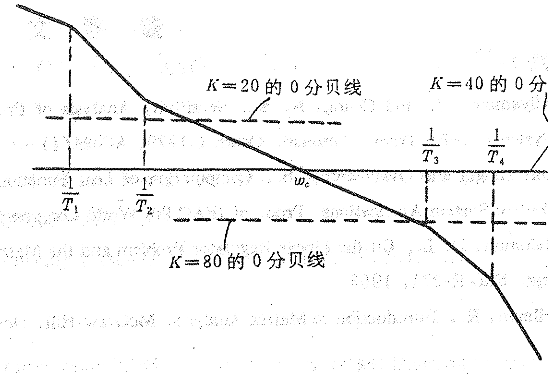

图 2　对数幅频特性

要求计算系统的性能对参数的灵敏度. 为了便于分析和比较,这里计算的是相对灵敏度,即

$$S_J^{T_i}=\frac{\partial J/J}{\partial T_i/T_i}=\frac{\partial J}{\partial T_i}\cdot\frac{T_i}{J},\quad (i=1,2,3,4)$$

和

$$S_J^K=\frac{\partial J}{\partial K}\cdot\frac{K}{J}.$$

将该系统变换为状态方程表示,再利用定理2,并经一定的变换,最后求得结果为:

$$S_J^{T_1}=0.076,\quad S_J^{T_2}=-0.1974,\quad S_J^{T_3}=0.3202,$$
$$S_J^{T_4}=0.1109,\quad S_J^K=-0.01384.$$

可见,性能函数 J 对 T_2和 T_3较敏感. 由图2看出,T_2和 T_3影响中频段,因而它们对系统的性能影响较大. 同时看出 T_2增大或 T_3减小均使 J 减小,这是因为它们使得中频段斜率为−20分贝/十倍频的线段加长.

为了比较在不同增益时系统性能对增益灵敏度的变化,我们取开环增益的标称值分别为 $K_1=20$,$K_2=40$和 $K_3=80$三种情况,它们相当于伯德图上下平移处于三种不同的位置,如图2所示. 最后算得结果如表1所示. 可看出,当 $K=40$时增益变化对性能的影响比其它两种情况小得多,而且这时 J 的绝对值也最小. 从而说明,当 ω_c 位于左右两个拐点中间且较偏向于高频拐点时,这样的安排较合理.

表 1　不同 K 值时的系统灵敏度

K	20	40	80
J	23.92	20.23	24.60
S_J^K	−0.4446	−0.01384	0.5734

4　结束语

本文给出的系统参数灵敏度的计算,关键是求解两个对偶的李雅普诺夫方程,计算并不复杂. 它可以在控制系统的分析和设计的许多方面获得应用.

参考文献

[1] Miyamoto, Y. and Chang, K. S.. Sensitivity Analysis of Process Variables for Linear Quadratic Stochastic Control Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1979, AC-24(4)

[2] Sun Zengqi and Qvarnström, B.. Computation of Loss Function Derivatives with Respect to Feedback Cofficients and Control System Applications. Proc. of IFAC 9th World Congress, Hungary, 1984

[3] Kleinman, D. L.. On the Linear Regulator Problem and the Matrix Riccati Equation. MIT Electronic System Lab. Tech Rept. ESL-R-271, 1966

[4] Bellman, R.. Introduction to Matrix Analysis. McGraw-Hill, New York, 1960

Computation of Parameter Sensitivities of Quadratic Performance Function in Time Continuous System

SUN Zengqi and MA Shaoping

(Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University·Beijing, 100084, PRC)

Abstract: General formulas are given in this paper for computation of parameter sensitivities of quadratic performance function in time continuous systems. The main computation is to solve two dual Lyapunov equations. The concrete algorithms are given for different control structures and for stochastic systems. Finally an example is presented to show the application of the results of this paper in system analysis and design.

Key words: parameter sensitivities; quadratic performance function; Lyapunov equation

本文作者简介

孙增圻 1943年生. 教授. 1966年毕业于清华大学自动控制系,留校任教. 1979年赴瑞典进修,1981年在瑞典获博士学位. 1990年赴美进修半年. 现为清华大学计算机系教授. 曾从事最优控制,控制系统CAD,计算机控制理论等方面的研究. 目前主要研究兴趣为智能控制,机器人控制和仿真以及神经元控制等领域.

马少平 1962年生. 讲师. 1982年毕业于清华大学计算机系. 1985年获硕士学位. 留校任教. 目前的研究兴趣主要是人工智能,知识工程和专家系统等.