多变量加权多步预报控制*

徐立鸿　冯纯伯

（东南大学自动化研究所·南京，210018）

摘要：对于线性多变量系统，本文给出了一种完全不同于以往的全状态反馈或观测器-控制器型的算法——多变量加权多步预报控制(MWLPC)算法. 这种算法除引进了预测控制中的多步输出预报、滚动优化等机制外，最重要的是在二次型性能指标中引入了可调的多项式或有理分式矩阵权因子；适当选取这些权因子，便可按设计要求、仅用系统的输出信息反馈便能任意配置闭环系统的特征矩阵，从而保证闭环稳定性和其他优良性质. 此外，该算法不改变原系统的零点，因而适用于非最小相位系统.

关键词：多变量系统；预测控制；极点配置；闭环稳定性；非最小相位系统

1 引　言

线性多变量系统的控制问题，已有不少好的工作[1~3]. 然而，以往的算法大多是系统的全状态反馈或观测器-控制器型的控制算法[4,5]，而不是仅用输出信息反馈来达到设计目的的. 在自适应情形中，大多数方法都集中于最小方差和模型参考控制器设计[6]，而这些方法基于以下两个假定：1) 系统是最小相位的；2) 交互(interactor)矩阵已知或至少它的结构已知. 然而，许多系统经采样后可以是非最小相位的[7]，而在实际问题中，交互矩阵即使是部分已知也是不容易做到的.

本文的多变量加权多步预报控制算法(MWLPC)是在作者提出的单变量的相应控制算法[8,9]的基础上得到的. 该算法除具有预测控制中的多步输出预报、滚动优化等机制外，还具有闭环特征矩阵配置、零点增补、前馈和输出信息反馈等改进系统稳定性及动态特性的诸多有效机制. 由于该算法不改变原系统的零点，故适用于非最小相位系统.

本文由以下几部分组成：第二节给出线性多变量系统的模型和加权的二次型性能指标；MWLPC 算法及其闭环稳定性定理将在第三节中给出；第四节分析了各个权因子的作用，确定了它们的选取原则；第五节给出了一个设计实例，以表明 MWLPC 算法对开环不稳定和非最小相位的系统有较理想的控制效果；作者对 MWLPC 算法的结论性评述在第六节中给出.

2 模型与性能指标

考虑如下多变量线性时不变系统

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})\xi(t). \tag{1}$$

其中 $A(z^{-1})$、$B(z^{-1})$和 $C(z^{-1})$均为关于后退算子 z^{-1}的多项式矩阵，它们具有如下的形式($A(0)=C(0)=I_n$)

---

* 国家自然科学基金资助.
本文于1990年9月25日收到. 1991年6月17日收到修改稿.

$$X(z^{-1}) = X_0^* + X_1^* z^{-1} + \cdots + X_{n_x}^* z^{-n_x}. \tag{2}$$

$\{u(\cdot)\}$、$\{y(\cdot)\}$分别为 n 维输入、n 维输出向量，$\{\xi(\cdot)\}$是 n 维独立的随机白噪声向量，且有 $E\{\xi(t)\}=0$，$E\{\xi(t)^{\tau}\xi(t)\}=\Sigma_{\xi}$. 式(2)中 X_i^* 为 $n\times n$ 系数矩阵.

为便于讨论，以下假定 $C(z^{-1})=I_n$，故(1)为

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + \xi(t). \tag{3}$$

极小化性能指标为

$$J = E\Big\{\sum_{k=1}^{N} \| P_k(z^{-1})y(t+k) - Q_k(z^{-1})r(t+k) \|^2 + \sum_{k=1}^{M} \| R_k(z^{-1})u(t+k-1) \|^2\Big\}. \tag{4}$$

其中 $\{r(\cdot)\}$为 n 维参考输入向量，这里假定$\{r(\cdot)\}$是已知且范数有界的；N、M 分别是输出预报水平和控制水平，$M\leqslant N$；$P_k(z^{-1})$、$Q_k(z^{-1})$和 $R_k(z^{-1})$均为可调权因子，它们为 z^{-1} 的多项式或有理分式矩阵. 第四节将专门讨论它们的选取原则.

为使我们的 MWLPC 算法具有闭环特征矩阵配置等机制，选取

$$P_k(z^{-1}) \equiv P(z^{-1}), \quad Q_k(z^{-1}) \equiv Q(z^{-1})$$

为 z^{-1}的多项式矩阵.

$$R_k(z^{-1}) = \begin{cases} \sqrt{\lambda} I_n, & 2 \leqslant k \leqslant N, \\ \sqrt{\lambda} I_n + z^{-1}R_0(z^{-1}), & k = 1. \end{cases} \tag{5}$$

其中 $R_0(z^{-1})$为 z^{-1}的有理分式矩阵，$\lambda>0$ 为常数. 假定 $R_0(z^{-1})$有如下的互质左因子描述

$$R_0(z^{-1}) = [\overline{K}_L(z^{-1})]^{-1} \cdot \overline{K}_W(z^{-1}). \tag{6}$$

其中 $\overline{K}_L(z^{-1})$和 $\overline{K}_W(z^{-1})$都是待选取的多项式矩阵.

3 MWLPC 算法及其闭环稳定性

为简单起见，以下所有多项式或有理分式矩阵 $X(z^{-1})$简记为 X，常数矩阵记为 X^*.

假定

$$u(t+k-1) = u(t+M-1), \quad 当\ M < k \leqslant N. \tag{7}$$

作丢番(Diophantine)分解

$$P = D_kA + z^{-k}E_k \tag{8}$$

和

$$D_kB = G_k + z^{-k}F_k. \tag{9}$$

其中 $\deg E_k=\deg F_k=k-1$. 于是式(3)成为

$$Py(t+k) = G_ku(t+k-1) + F_ku(t-1) + E_ky(t) + D_k\xi(t), \quad (k=1,2,\cdots,N). \tag{10}$$

由此立得 $y_p(t+k)\triangleq py(t+k)$的向前 k 步预报为

$$\hat{y}(t+k|t) = G_ku(t+k-1) + F_ku(t-1) + E_ky(t), \quad (k=1,2,\cdots,N). \tag{11}$$

由式(8)和(9)有

$$G_k + z^{-k}F_k = PA^{-1}B - z^{-k}E_kA^{-1}B. \tag{12}$$

若设

$$PA^{-1}B = G_0^* + G_1^*z^{-1} + \cdots + G_{k-1}^*z^{-(k-1)} + \cdots, \tag{13}$$

则

$$G_k = G_0^* + G_1^* z^{-1} + \cdots + G_{k-1}^* z^{-(k-1)}. \tag{14}$$

于是预报方程(11)可写成以下 $nN\times 1$ 向量方程形式：

$$\hat{y}_p = \underline{G}^* u + Fu(t-1) + Ey(t). \tag{15}$$

其中

$$\hat{y}_P = [\hat{y}_P(t+1|t)^\tau, \hat{y}_P(t+2|t)^\tau, \cdots, \hat{y}_P(t+N|t)^\tau]^\tau, \tag{16}$$

$$u = [u(t)^\tau, u(t+1)^\tau, \cdots, u(t+M-1)^\tau]^\tau, \tag{17}$$

$$F = [F_1^\tau, F_2^\tau, \cdots, F_N^\tau]^\tau, \tag{18}$$

$$E = [E_1^\tau, E_2^\tau, \cdots, E_N^\tau]^\tau, \tag{19}$$

$$G^* = \begin{bmatrix} G_0^* & & & \\ G_1^* & G_0^* & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ G_{N-1}^* & G_{N-2}^* & \cdots & G_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I_{nM} & & \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix}. \tag{20}$$

再记

$$r_Q = [r_Q(t+1)^\tau, r_Q(t+2)^\tau, \cdots, r_Q(t+N)^\tau]^\tau, \tag{21}$$

$$r_Q(t+k) = Qr(t+k), \quad (k = 1, 2, \cdots, N). \tag{22}$$

于是性能指标(4)为

$$J = J_1 + \sigma^2. \tag{23}$$

其中

$$J_1 = (\hat{y}_P - r_Q)^\tau (\hat{y}_P - r_Q) + u_R^\tau u_R, \tag{24}$$

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{N} \| D_k \xi(t+k) \|^2, \quad (\| x \|^2 = Ex^\tau x). \tag{25}$$

这里

$$u_R = \begin{bmatrix} R_1(z^{-1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_M(z^{-1}) \end{bmatrix} u = \sqrt{\lambda}\, u + I^* R_0 u(t-1). \tag{26}$$

其中

$$I^* = [I_n, 0, \cdots, 0]^\tau. \tag{27}$$

由式(23)～(25)知，极小化 J 等价于极小化 J_1.

由 $\frac{\partial J_1}{\partial u} = 0$，立得

$$u = (\underline{G}^{*\tau} \underline{G}^* + \lambda I)^{-1} \underline{G}^{*\tau} [r_Q - Fu(t-1) - Ey(t)] - (\underline{G}^{*\tau} \underline{G}^* + \lambda I)^{-1} I^* \sqrt{\lambda} R_0 u(t-1). \tag{28}$$

于是在 t 时刻的 MWLPC 控制律为

$$u(t) = H^{*\tau} [r_Q - Fu(t-1) - Ey(t)] - W^* \sqrt{\lambda} R_0 u(t-1). \tag{29}$$

其中

$$H^{*\tau} \triangleq [H_1^*, \cdots, H_N^*] = I^{*\tau} (\underline{G}^{*\tau} \underline{G}^* + \lambda I)^{-1} G^{*\tau}, \tag{30}$$

$$W^{*\tau} = I^{*\tau} (\underline{G}^{*\tau} \underline{G}^* + \lambda I)^{-1} I^*. \tag{31}$$

由式(31)，W^* 为非奇异矩阵，故 $R_0 W^{*-1}$ 仍为 z^{-1} 的有理分式矩阵，记

$$R_W = W^* R_0 W^{*-1},$$

则有

$$W^* R_0 = R_W W^*. \tag{32}$$

设 R_W 的一个互质左因子分解为

$$R_W = K_L^{-1} K_W, \tag{33}$$

则

$$R_0 = (K_L W^*)^{-1}(K_W W^*) = \overline{K}_L^{-1}\overline{K}_W. \tag{34}$$

于是由 K_L、K_W 即得 R_0 的一个左因子分解. 因此, MWLPC 控制律(29)可写成

$$\overline{D}u(t) + \overline{H}y(t) = \overline{S}r. \tag{35}$$

其中

$$\overline{D} = K_L + z^{-1}[K_L(H^{*\tau}F) + \sqrt{\lambda}K_W W^*], \tag{36}$$

$$\overline{H} = K_L(H^{*\tau}E), \tag{37}$$

$$\overline{S} = K_L(S^* Q), \quad (S^* = H_1^* + \cdots + H_N^*). \tag{38}$$

这里假定参考输入 $r(t+k)=r$ 为常值向量. 多项式矩阵 K_L、K_W 将根据闭环特征矩阵的配置来决定. 用 MWLPC 控制律(35)于系统(3), 得闭环系统方程如下

$$y(t) = z^{-1}B_r T^{-1} K_L S^* Q r + B_r T^{-1}\overline{D}\xi_b(t). \tag{39}$$

其中

$$T = \overline{D}A_r + z^{-1}\overline{H}B_r, \tag{40}$$

$$B\xi_b(t) = \xi(t). \tag{41}$$

这里 (A_r, B_r) 是系统的开环传递函数矩阵 $A^{-1}B$ 的一个互质右因子分解, 即

$$A^{-1}B = B_r A_r^{-1}. \tag{42}$$

B_r 与 B 是单位模等价的. 故不改变原系统零点.

由式(36)、(37)和(40)立得

$$T = K_L A_1 + z^{-1}K_W B_1. \tag{43}$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= A_r + z^{-1}[H^{*\tau}(FA_r + EB_r)] \\ &= A_r + z^{-1}\sum_{k=1}^{N} H_k^*(F_k A_r + E_k B_r) \\ &= A_r + z^{-1}\sum_{k=1}^{N} H_k^* L_k \\ &\triangleq A_r + z^{-1}(H^{*\tau}L). \end{aligned} \tag{44}$$

这里

$$L = [L_1^\tau, \cdots, L_N^\tau]^\tau,$$

而 L_k 满足

$$PB_r = F_k A_r + z^{-k}L_k, \quad (k = 1, 2, \cdots, N), \tag{45}$$

$$B_1 = \sqrt{\lambda}W^* A_r. \tag{46}$$

假定 A、B 右互质, 则由式(44)～(46)知, A_1、B_1 也右互质, 从而对任意多项式矩阵 $T(z^{-1})$, 方程(43)有唯一解 K_L、K_W. 因此, 由闭环系统方程(39)知, 其特征矩阵 T 可通过选取 K_L 和 K_W 按(43)式任意设定. 至于权多项式矩阵 P、Q 的选取方法将在下一节讨论.

到此, 我们得到了 MWLPC 算法.

下面分析该算法的闭环稳定性. 为此, 对系统(1)作如下假定:

A1) $A(z^{-1})$、$B(z^{-1})$ 均为非奇异矩阵, 且右互质;

A2) $\max(n_a, n_b)$已知；

A3) $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\frac{1}{K}\sum\limits_{j=1}^{k}\|\xi(t+j)\|^2<\infty, t\geqslant 1.$ a.s.

于是有如下闭环稳定性结果.

定理 若系统(1)满足假定A1)～A3)，且选取多项式矩阵 K_L 和 K_W，使得

$$K_L A_1 + z^{-1}K_W B_1 = T.$$

其中 T 为按设计要求给定的稳定的多项式矩阵，A_1、B_1的定义见式(44)～(46). 则应用MWLPC控制器(35)于该系统，所得的闭环系统是以概率1输入-输出(范数)有界稳定的.即

$$\lim_{k\to\infty}\sup\frac{1}{K}\sum_{t=1}^{k}\|u(t)\|^2<\infty, \quad \text{a.s.} \tag{47}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sup\frac{1}{K}\sum_{t=1}^{k}\|y(t)\|^2<\infty. \quad \text{a.s.} \tag{48}$$

证 在假定A1)和A2)下，闭环系统方程为

$$y(t) = z^{-1}B_rT^{-1}K_LS^*Qr + B_rT^{-1}\overline{D}\xi_b(t). \tag{49}$$

类似可导出关于 $u(t)$的如下式子

$$u(t) = A_rT^{-1}K_LS^*Qr - A_rT^{-1}\overline{H}\xi_a(t). \tag{50}$$

其中 $A_r\xi_a(t)=\xi(t)$.

由于 T 为稳定的多项式矩阵，且假定A3)成立，则由式(49)和(50)立得

$$\frac{1}{K}\sum_{t=1}^{k}\|y(t)\|^2\leqslant C'_y+\frac{C''_y}{K}\sum_{t=1}^{k}\|r\|^2, \tag{51}$$

$$\frac{1}{K}\sum_{t=1}^{k}\|u(t)\|^2\leqslant C'_u+\frac{C''_u}{K}\sum_{t=1}^{k}\|r\|^2. \tag{52}$$

其中 C'_y、C''_y、C'_u 和 C''_u 均是有界常数. 因此，由参考信号 r 的有界性立得(47)和(48)式成立. 证毕.

当系统参数未知时，可以用多变量参数估计方法(例如多变量递推最小二乘法)在线估计模型参数，再与MWLPC控制器的在线设计相结合，得到自适应MWLPC控制器. 受篇幅所限，本文对自适应情形及其稳定性不作进一步的讨论，这方面的结果可参见[9].

4 权因子的作用和选取原则

1) 权多项式矩阵 $P(z^{-1})$

由(8)和(25)式知，当取 P 的增益 $|\mu_p|$ 较小时(即有 $P(z^{-1})=\mu_p\overline{P}(z^{-1})$，$\overline{P}(0)=I_n$)，由噪声干扰引起的跟踪误差 σ^2 也较小. 因此，它对抑制噪声干扰有重要作用.

2) 权多项式矩阵 $Q(z^{-1})$

由闭环系统方程(39)知，Q 的引入相当于在控制系统中增加了前馈，它增加了闭环系统的零点，因而可按设计对系统动态性能的要求选取它. 此外，若取 Q 满足 $Q(1)=[K_L(1)\cdot S^*]^{-1}T(1)[B_r(1)]^{-1}$，则MWLPC无稳态误差.

3) 权有理分式矩阵 $R_k(z^{-1})$

这是对闭环稳定性有重要影响的权. 在本文的算法中，我们巧妙地设置了 $R_k(z^{-1})$的形式，并通过选取 $K_W(z^{-1})$和 $K_L(z^{-1})$，达到了只利用系统输出信息的反馈便能任意配置

闭环特征矩阵,保证闭环稳定性及其他动态性能的目的.

综上分析可知,通过选取权因子,MWLPC 算法能保证闭环稳定性和良好的动态特性,并且适用于非最小相位系统.

5　一个设计实例

考虑如下开环不稳定、且非最小相位的系统

$$y(t) = -A_1^* y(t-1) + B_0^* u(t-1) + B_1^* u(t-2) + \xi(t).$$

式中
$$A_1^* = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.4 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad B_1^* = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

取权因子 $P(z^{-1}) \equiv P(z^{-1}) = I$,特征多项式矩阵 $T(z^{-1})$ 取为

$$T(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1-0.5z^{-1} & 0 \\ 0 & 1-0.5z^{-1} \end{bmatrix}.$$

参考输入 $r_1(t)=10$,$r_2(t)$ 为 ± 10 的方波,间隔为 20 采样周期. 采用带遗忘因子 $\beta=0.95$ 的递推最小二乘法估计模型参数. 仿真结果见图 1. 它表明,MWLPC 算法对开环不稳定且是非最小相位的系统有良好的控制效果.

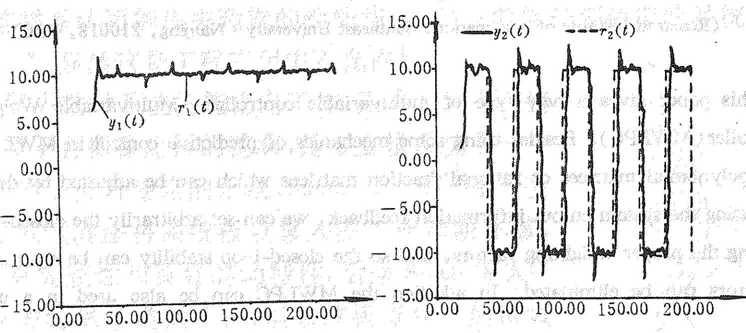

图 1　MWLPC 算法对开环不稳定且非最小相位系统的跟踪

6　结　　论

由于可以按设计要求任意选取权因子,使得 MWLPC 算法在对多变量系统进行控制时,有以下优点:

1) 闭环系统的特征多项式矩阵可根据设计需要任意设定,故能够保证闭环稳定性及其他优良特性;

2) MWLPC 算法不改变原系统的零点,因而可用于非最小相位系统;同时它还增加了新的零点,改善了闭环系统的动态品质;

3) 消除了稳态误差;

4) 在 MWLPC 算法中,除采用了多步输出预报和滚动优化等预测控制的有效方法外,还通过选取权因子,引进了前馈补偿、动态反馈、零点增补和闭环特征矩阵配置等改进系统稳定性及动态特性的诸多有效机制. 这是 MWLPC 算法的重要特点之一.

参　考　文　献

[1] Wolovich, W. A.. The Differential Operator Approach to Linear System Analysis and Design. J. Franklin Inst., 301,

nos. 1 & 2:22—47

[2] Kwatny, H. G. and Kalnitsky, K. C.. On Alternative Methodologies for the Design of Robust Linear Multivariable Regulator. IEEE Trans. Automat. Contr., AC-23:930—933

[3] Massad, M., Sanchez, G. and Duque, M.. A Performance-Oriented Multivariable Adaptive Generalized Predictive Controller. 10th World Congress of IFAC, Munich, 10:75—79

[4] Kailath, T.. Linear System, by Prentice-Hall. Inc. Englewood Cliffs, N., 07632

[5] 关肇直主编. 多变量线性系统控制引论——微分算子多项式矩阵法. 北京:科学出版社,1987

[6] Dugard, L. and Dion, J. M.. Direct Adaptive Control for Linear Multivariable Systems. Int. J. Control, 42:1251—1281

[7] Åström, K. J., Hangander, P. and Sternby, J.. Zeros of Sampled Systems. Automatica, 20:31—38

[8] 徐立鸿,冯纯伯. 加权多步预报控制. 自动化学报,1991,17(6):658—668

[9] 徐立鸿. 预测控制的研究. 东南大学博士学位论文,1991

Multivariable Weighted Long-Range Predictive Control

XU Lihong and FENG Chunbo

(Research Institute of Automation, Southeast University • Nanjing, 210018, PRC)

Abstract: This paper gives a new type of multivariable controller—Multivariable Weighted Long-range Predictive Controller (MWLPC). Besides using some mechanics of predictive control in MWLPC, we introduce some weighting polynomial matrices or rational fraction matrices which can be adjusted by designer in the cost function. Only using the system output information feedback, we can set arbitrarily the closed-loop characteristic matrix by choosing the proper weighting factors, and so the closed-loop stability can be ensured and the steady-state tracking errors can be eliminated. In addition the MWLPC can be also used in a unminimum phase systems.

Key words: multivariable system; predictive control; pole-placement; closed-loop stability; unminimum phase systems

本文作者简介

徐立鸿 1960年生. 1988年在上海华东师范大学数学系控制理论专业获理学硕士学位. 1991年5月在东南大学自动化研究所毕业并获工学博士学位. 现为该所讲师. 目前主要从事预测控制,系统辨识与自适应控制,鲁棒及智能化控制理论及其应用的研究.

冯纯伯 见本刊1992年第1期第43页.