

具有完整性的最优控制系统设计*

倪茂林 吴宏鑫

(北京控制工程研究所, 100080)

摘要: 本文利用 Lyapunov 方程和 Riccati 方程, 提出一种多变量控制系统设计法. 所设计的系统具有完整性、最优性和良好的动特性, 并对系统参数变化具有鲁棒性.

关键词: 完整性; 鲁棒稳定性; 最优调节器; 控制系统设计

1 引言

在多变量控制系统设计中, 可将系统极点最优配置到复平面上某一理想区域, 从而使系统具有良好的动特性和最优性^[1]. 然而在实际应用中, 控制对象参数常发生变化, 甚至执行器失效. 这样系统可能失去预期的性能指标, 并且即使开环稳定的系统, 闭环后仍可能失去稳定性^[2,3]. 显然这是工程应用中不允许的.

若在执行器失效时系统仍能稳定工作, 则称之为具有完整性^[2,3]. 完整性属于鲁棒稳定性的范畴, 是多变量系统中一个重要问题^[2,3,4]. 对于开环稳定的系统, Shimemura 等^[2]基于变形 Riccati 方程用试凑法将系统极点移入图 1 所示阴影域, 从而使系统具有完整性和良好的动特性. 后来 Shieh 等人^[3]利用 Lyapunov 方程做了类似工作, 但系统极点移入的区域仅是图 1 阴影域的近似——截顶扇形域, 且计算步骤复杂.

本文在前文^[4]工作基础上, 给出利用 Lyapunov 方程将系统极点最优配置到图 1 阴影域的一种直接设计法. 所设计系统具有完整性、最优性和良好的动特性.

2 预备定理

考虑线性时不变可控系统

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (1)$$

其中 $x \in R^n, u \in R^p, A, B$ 为适当维矩阵, 且 $\text{Re} \lambda(A) < 0$.

引理 1^[1,5] 若 (A, B) 可控且矩阵 A 位于左半平面 (含虚轴) 上的特征值和特征向量为 $\{\lambda_i, \xi_i, i=1, \dots, q\}$, 则 Riccati 方程

$$A'S + SA - SBR^{-1}B'S = 0 \quad (2)$$

的最大解 S_0 满足关系式

$$\text{Null}(S_0) = \text{Span}(\xi_1, \dots, \xi_q). \quad (3)$$

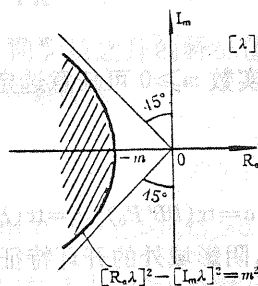


图 1 特征值平面图

* 国家自然科学基金资助课题.

本文于1990年10月4日收到. 1991年6月5日收到修改稿.

进而下面关系式对于任意实数 $\gamma > 1/2$ 成立.

$$\lambda(A - \gamma BR^{-1}B'S_0) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q \text{ 及 } n - q \text{ 个负实部特征值}\}. \quad (4)$$

引理 2^[3,4] 对于(1), 设 $\lambda_i, \xi_i (i=1, \dots, n)$ 为 A 的特征值和特征向量, 若 $P_0 \geq 0$ 为 Lyapunov 方程

$$A'P + PA + Q = 0, \quad Q \geq 0 \quad (5)$$

的解, 则闭环系统 $A - \gamma BB'P_0 (\gamma > 0 \text{ 为实数})$ 对于输入执行器失效具有完整性, 即对于开关矩阵 $L = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_r)$ 的所有取值, 总有 $\text{Re}\lambda(A - \gamma LBB'P_0) < 0$, 其中 δ_i 取值 1 或 0 分别表示第 i 个输入执行器正常或失效. 进而若有

$$Q\xi_i = 0, \quad (i=1, \dots, q; q \leq n), \quad (6)$$

则 $\lambda_i, \xi_i (i=1, \dots, q)$ 仍为 $A - \gamma BB'P_0$ 的特征值和特征向量.

3 主要结果

根据以上引理, 我们可以推出以下结果.

定理 1 对于系统(1), $\lambda_i, \xi_i (i=1, \dots, n)$ 含义同引理 2. 假设 A 有 q 个特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_q (q < n)$ 位于图 1 阴影域(含边界)上, 控制器可如下设计

$$(m^2I - A^2)'S + S(m^2I - A^2) - SBB'S = 0, \quad (7)$$

$$A'P + PA + S_0 = 0, \quad (8)$$

$$u = -\gamma B'P_0x. \quad (9)$$

其中实数 $m \geq 0$ 可任意选定, $S_0 \geq 0$ 为式(7)的最大解^[5], P_0 为(8)的唯一半正定解. 若选取系数

$$\gamma > \gamma_0 = (\sqrt{b^2 + 2ab} - b)/(2a). \quad (10)$$

其中 $a = \text{tr}(BB'P_0)^2, b = \text{tr}(BB'S_0)$, 则阴影域上的开环特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ 仍为 $A - \gamma BB'P_0$ 的特征值, 阴影域外的开环特征值中至少有一个(或共轭对)在 $A - \gamma BB'P_0$ 闭环后移入阴影域. 同时稳定控制(9)在下面指标函数意义下是最优的.

$$J = \int_0^\infty (x'Qx + u'u)dt, \quad Q = \gamma^2 P_0 BB'P_0 + \gamma S_0. \quad (11)$$

证 因为 (A, B) 可控, 且 $\text{Re}\lambda(A) < 0$, 易知 $(m^2I - A^2, B)$ 亦可控. 由引理 1 可知^[4]

$$\lambda(m^2I - A^2 - \alpha BB'S_0) = \{m^2 - \lambda_1^2, \dots, m^2 - \lambda_q^2 \text{ 及 } n - q \text{ 个负实部特征值}\}, \quad (\alpha > 1/2). \quad (12)$$

考虑到与特征值 λ_i 对应的 A 的特征向量(链)和与 $m^2 - \lambda_i^2$ 对应的 $m^2I - A^2$ 的特征向量(链)互为等价^[1], 由引理 1 知(7)的最大解 S_0 满足

$$\text{Null}(S_0) = \text{Span}(\xi_1, \dots, \xi_q). \quad (13)$$

由(8)、(13)和引理 2 易知, $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ 仍为 $A - \gamma BB'P_0$ 的特征值, 记 $A - \gamma BB'P_0$ 其余 $n - q$ 个特征值为 $\sigma_1 \dots \sigma_{n-q}$, 则有

$$\lambda[m^2I - (A - \gamma BB'P_0)^2] = \{m^2 - \lambda_1^2, \dots, m^2 - \lambda_q^2; m^2 - \sigma_1^2, \dots, m^2 - \sigma_{n-q}^2\}. \quad (14)$$

考虑到(8)可得

$$\begin{aligned} -(A - \gamma BB'P_0)^2 &= -A^2 + \gamma(ABB'P_0 - BB'A'P_0) \\ &\quad - \alpha BB'S_0 - [(\gamma - \alpha)BB'S_0 + \gamma^2(BB'P_0)^2]. \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $\alpha = 1/2 + \varepsilon, \varepsilon > 0$ 为无穷小量. 由于

3 期

$$\text{tr}(ABB'P_0 - BB'A'P_0) = 0, \quad (16)$$

$$a = \text{tr}(BB'P_0)^2 > 0, \quad b = \text{tr}(BB'S_0) \geq 0, \quad (17)$$

$$\text{tr}[(\gamma - a)BB'S_0 + \gamma^2(BB'P_0)^2] = a(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2). \quad (18)$$

式中 $\gamma_{1,2} = -(b \pm \sqrt{b^2 + 4aab}) / (2a)$, 若取 $\gamma > \gamma_0$, 则由(15)得

$$\text{tr}[m^2I - (A - \gamma BB'P_0)^2] \leq \text{tr}(m^2I - A^2 - aBB'S_0). \quad (19)$$

由式(12)、(14)和(19)得

$$(m^2 - \sigma_1^2) + \dots + (m^2 - \sigma_{n-q}^2) < 0. \quad (20)$$

(20)式表明, $(m^2 - \sigma_j^2)$ ($j=1, 2, \dots, n-q$)中至少有一项实部为负, 考虑到 $\text{Re}\sigma_j < 0$ (引理 2), 可知 σ_j ($j=1, 2, \dots, n-q$)中至少有一个(或共轭对)落入图 1 阴影域. 因此, 阴影域上的 A 的特征值仍为 $A - \gamma BB'P_0$ 的特征值, 阴影域外的 A 的特征值中至少有一个(或共轭对)闭环 $A - \gamma BB'P_0$ 后移入阴影域.

另外, (8)式可改写为

$$A'(\gamma P) + (\gamma P)A - (\gamma P)BB'(\gamma P) + Q = 0, \quad Q = \gamma^2 PBB'P + \gamma S_0. \quad (21)$$

由于 $\text{Re}\lambda(A) < 0$, (Q, A) 可检测, 易知式(9)是在(11)意义下的最优控制.

由上可知, 反复应用定理 1 总可以将系统所有极点移入理想区域, 从而改善了系统的动态特性.

定理 2 对于系统(1), 设 λ_j ($j=1, \dots, \mu$) 是 A 位于图 1 阴影域之外的特征值, 令 $A_1 = A$. 若循环应用定理 1 k 次后 λ_j 全被移入阴影域, 则最终闭环系统为

$$A_{k+1} = A - BB'\bar{P}, \quad \bar{P} = \sum_{i=1}^k \gamma_i P_i. \quad (22)$$

它是在加权阵 $\{Q = \sum_{i=1}^k Q_i, R = I_r\}$ 意义下线性二次最优的. 其中 $P_i \geq 0, \gamma_i > 0, Q_i \geq 0$ 分别为第 i 次应用定理 1 时(8)的解, (9)中系数和(11)中的状态加权阵. 另外 $\bar{P} \geq 0$ 亦满足方程

$$A'\bar{P} + \bar{P}A + \bar{Q} = 0, \quad \bar{Q} = \sum_{i=1}^k Q_i - \bar{P}BB'\bar{P}. \quad (23)$$

若 $\bar{Q} \geq 0$, 则闭环系统 A_{k+1} 对于输入执行器失效具有完整性.

证 参见文献[1, 3, 5], 此略.

需要指出, 定理 2 中 $\bar{Q} \geq 0$ 是系统具有完整性的充分条件, 并非必要. 对于一般系统而言, 适当调整(22)中系数 γ_i 可使系统具有完整性.

4 飞行控制系统设计实例

某 F8-C 型飞机的运动方程为(1), 其中^[6]

$$A = \begin{bmatrix} -1.38 & 0.223 & -33 & 0 \\ -0.00371 & -0.196 & 6.71 & 0 \\ 0.115 & -0.999 & -0.107 & 0.0302 \\ 0.989 & 0.149 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 11.6 & 4.43 \\ 0.209 & -1.76 \\ -0.00141 & -0.0107 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) 根据系统开环特征值 $\{-0.0098, -0.3097 \pm j3.1895, -1.0538\}$, 选取 $m=0.5$, 令 $i=1, A_1=A$.

2) 解方程(7)得其最大解 S_1 , 代入(8)解得 P_1 , 由(10)得 $\gamma_0=0.0049$. 若选(9)中系数

$\gamma=0.05$, 则系统所有极点一次即被移入理想区域. 这里为说明设计方法, 取 $\gamma_1=0.01$, 则由(11)得 Q_1 , 第一次闭环系统为 $A_2=A_1+BF_1$, 其中 $F_1=-\gamma_1 B' P_1$.

3) 因为 $\lambda(A_2)=\{-0.2601, -1.0538, -2.1640, -7.7462\}$, 仍有一特征值位于阴影域外, 故令 $i=2$, 重复 2). 根据(10)选取 $\gamma_2=1(>0.342)$, 得第二次闭环系统 $A_3=A_2+BF_2$, 其中 $F_2=-\gamma_2 B' P_2$.

4) 由于 $\lambda(A_3)=\{-0.9610, -1.0538, -2.1640, -7.7462\}$, 所有特征值均位于理想域, 故取 A_3 为最终闭环系统 A_c , 等效总状态反馈阵为

$$F = F_1 + F_2 = \begin{bmatrix} -0.2377 & 1.1871 & -1.5552 & -0.1381 \\ -0.3338 & 3.5629 & -1.3459 & -0.0473 \end{bmatrix}$$

可以验证, 闭环系统 A_c 是线性二次最优的, 其中加权阵为 $\{Q=Q_1+Q_2, R=I_2\}$.

5) 在执行器失效情况下, 即 $L_1=\text{diag}(0, 1)$, $L_2=\text{diag}(1, 0)$, $L_3=\text{diag}(0, 0)$, 闭环特征值变为

$$\lambda(A + BL_1F) = \{-0.1199, -1.0538, -2.5225, -5.7219\},$$

$$\lambda(A + BL_2F) = \{-0.8885, -1.0538, -1.1239 \pm j2.8739\},$$

及 $\lambda(A + BL_3F) = \lambda(A)$, 显然所得系统在执行器失效情况下具有完整性. 可以验证, 文[6]设计的闭环系统 $A+BK_5$ 不具有完整性.

6) 当系统矩阵 A 的元素 a_{11}, a_{13} 摄动 $\pm 10\%$ 时, 文[6]设计的系统 $A+BK_5$ 便失去稳定性; 本文设计的系统 $A+BF$, 即使 a_{11}, a_{13} 变化 $\pm 100\%$, 系统特征值分别变为 $\{-0.512, -1.631, -3.229, -7.933\}$ 和 $\{-0.528 \pm j0.778, -1.862, -7.626\}$, 显然系统仍保持良好的稳定性. 可以看出, 本文方法设计的系统具有较强的参数鲁棒性.

5 结 论

本文针对工程实际系统中存在的执行器失效问题, 提出了一种多变量控制系统设计法. 所设计系统具有完整性、最优性、良好的动特性和参数鲁棒性. 将这种方法用于工程设计, 尤其是象航空航天等要求高可靠性的场合, 可降低硬件设备投资, 产生巨大经济效益, 因此本文提出的方法具有很大的工程价值.

参 考 文 献

- [1] Kawasaki, N. and Shimemura, E.. Determining Quadratic Weighting Matrices to Locate Poles in a Specified Region. *Automatica*, 1983, 19:557—560
- [2] Shimemura, E. and Fujita, M.. A Design Method for Linear State Feedback Systems Possessing Integrity Based on a Solution of a Riccati-Type Equation. *Int. J. Control*, 1985, 42:887—899
- [3] Shieh, L. S., Dib, H. M., Ganesan, S. and Yates, R. E.. Optimal Pole-Placement for State-Feedback Systems Possessing Integrity. *Int. J. System Sci.*, 1988, 19(8):1419—1435
- [4] 倪茂林. 具有完整性和良好动特性的系统设计. *控制与决策*, 1990, 5(4):48—51
- [5] Ni Maolin. A Note on the Maximum Solutions of Riccati Equations. *Automatica*, 1991, 27:1059—1060
- [6] Owens, T. J. and O'Reilly, J.. Parametric State-Feedback Control for Arbitrary Eigenvalue Assignment with Minimum Sensitivity. *IEE Proc. Pt. D*, 1989, 136:307—313

The Design of Optimal Control Systems Possessing Integrity

NI Maolin and WU Hongxin

(Beijing Institute of Control Engineering • Beijing, 100080, PRC)

Abstract: By means of Lyapunov equation and Riccati equation, a design method for multivariable control systems is presented in this paper. The resulting system possesses integrity, optimality and good response. It is also robust with respect to the model parameter variations.

Key words: integrity; robust stability; optimal regulator; control system design

本文作者简介

倪茂林 1963年生, 1983年于河北机电学院自动化系获得学士学位, 同年7月至1986年9月在天津水泥工业设计研究院从事水泥生产过程自动化的科研与设计工作。1988年于哈尔滨工业大学控制工程系获硕士学位, 并被授予“哈尔滨工业大学优秀毕业研究生”称号, 获“金盾奖”。1992年于北京控制工程研究所获得博士学位。研究兴趣为鲁棒控制, 最优控制及其在航空航天控制中的应用。

吴宏鑫 见本刊1992年第2期第115页。