分布网络中离散时间系统的平滑算法*

张建华　戴冠中
(西北工业大学计算机科学与工程系·西安,710072)

摘要：本文考虑具有一个中心处理器和两个局部处理器下的估计结构的平滑合成问题，讨论了当已知局部滤波估计和当已知局部平滑估计时两种情况下的分布平滑估计，并导出了合成算法.

关键词：分布式估计；状态估计；平滑

1 引　　言

经典估计理论是集中式的，即使存在多个观测站，通常也要将各子站的测量送到同一处理器进行集中处理. 但有些系统(如电力系统)是地理位置极分散的. 由于成本、可靠性和通信频带宽度等方面的考虑，人们转向分布估计方法的研究，即各子站先处理其测量，然后再将结果传送至中心处理器合成. 另一个考虑分布式估计结构的动因是 VLSI 技术的发展，它使得复杂系统的并行处理成为可能. 作为分布式估计的子问题，一些研究者对分布平滑估计问题进行了探讨. Willsky 和其合作者[1]对连续时间系统两个滤波器形式的平滑器合成算法进行了研究. 其离散情况下的算法由周叶和戴冠中等[2]给出. 离散时间系统前通平滑器的合成问题的解答，由 Watanabe[3]等给出.

本文的工作：基于 Rauch-Tung-Striebel 平滑器和滤波估计合成算法，导出分布探测网络中离散时间 Rauch-Tung-Striebel 平滑器的合成解.

2 问题的表述和 Rauch-Tung-Striebel 平滑器

考虑如下线性随机系统

$$x(k+1) = \Phi(k+1,k)x(k) + w(k), \tag{2.1}$$

$$y_i(k) = H_i(k)x(k) + v_i(k), \quad i = 1,2. \tag{2.2}$$

其中 $x(k)$、$w(k) \in R^n$, $y_i(k)$、$v_i(k) \in R^{m_i}$, 矩阵 $\Phi(k+1,k)$, $H_i(k)$ 具有相容的维数，噪声 $\{w(k), v_1(k), v_2(k)\}$ 为具有零均值的白噪声过程，其方差

$$E\left\{\begin{bmatrix} w(k) \\ v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(j) & v_1^T(j) & v_2^T(j) \end{bmatrix}\right\} = \mathrm{diag}[Q(k), R_1(k), R_2(k)]\delta_{kj}, \tag{2.3}$$

且与 $x(0) \sim N(x_0, P_0)$ 不相关，其中 δ_{kj} 是 Kronecker 函数. 假定

a) 局部处理器 1 和 2 不通讯.

b) 中心处理器可与局部处理器 1 和 2 分别通讯，它们具有同样的验前知识(2.1)式，$H_i(k)$, $R_i(k)$, $i=1,2$, $Q(k)$, x_0, P_0.

* 本文于1990年10月4日收到. 1991年7月11日收到修改稿.

定义 $Y_i=\{y_i(j),1\leqslant j\leqslant N\},i=1,2$，而 N 固定. 我们要推出合成的 Rauch-Tung-Striebel 平滑器，且分别在已知局部滤波或局部平滑估计的情况下讨论之. 下面我们简述 Rauch-Tung-Striebel 平滑器[4].

已知 $\{Y_1,Y_2\}$，求

$$\hat{x}(k|N)=E[x(k)|Y_1,Y_2]$$

和

$$P(k|N)=E\{[x(k)-\hat{x}(k|N)][x(k)-\hat{x}(k|N)]^T\}.$$

则 Rauch-Tung-Striebel 平滑器为

$$\hat{x}(k|N)=\hat{x}(k|k)+A(k)[\hat{x}(k+1|N)-\hat{x}(k+1|k)], \tag{2.4}$$

$$A(k)=P(k|k)\Phi^T(k+1,k)P^{-1}(k+1|k), \tag{2.5}$$

$$P(k|N)=P(k|k)+A(k)[P(k+1|N)-P(k+1|k)]A^T(k). \tag{2.6}$$

初值为 $\hat{x}(N|N),P(N|N)$.

其中 $\hat{x}(k|k),\hat{x}(k+1|k),P(k|k),P(k+1|k)$ 由下面的 Kalman 滤波器给出：

$$\hat{x}(k+1|k)=\Phi(k+1,k)\hat{x}(k|k),\quad \hat{x}(0|0)=x_0, \tag{2.7}$$

$$P(k+1|k)=\Phi(k+1,k)P(k|k)\Phi^T(k+1,k)+Q(k),\quad P(0|0)=P_0, \tag{2.8}$$

$$\hat{x}(k+1|k+1)=\hat{x}(k+1|k)+K(k+1)\left\{\begin{bmatrix}y_1(k+1)\\ y_2(k+1)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}H_1(k+1)\\ H_2(k+1)\end{bmatrix}\hat{x}(k+1|k)\right\}, \tag{2.9}$$

$$P(k+1|k+1)=\left\{I-K(k+1)\begin{bmatrix}H_1(k+1)\\ H_2(k+1)\end{bmatrix}\right\}P(k+1|k), \tag{2.10}$$

或

$$P^{-1}(k+1|k+1)=P^{-1}(k+1|k)+\sum_{i=1}^{2}H_i^T(k+1)R_i^{-1}(k+1)H_i(k+1), \tag{2.11}$$

$$K(k+1)=P(k+1|k)[H_1^T(k+1)\ H_2^T(k+1)]\left\{\begin{bmatrix}H_1(k+1)\\ H_2(k+1)\end{bmatrix}P(k+1|k)\cdot[H_1^T(k+1)\ H_2^T(k+1)]+\mathrm{diag}[R_1(k+1),R_2(k+1)]\right\}^{-1}. \tag{2.12}$$

类似地，局部 Rauch-Tung-Striebel 平滑器为

$$\hat{x}_i(k|N)=E\{x_i(k)|Y_i\},$$

$$P_i(k|N)=E\{[x_i(k)-\hat{x}_i(k|N)][x_i(k)-\hat{x}_i(k|N)]^T\},$$

$$\hat{x}_i(k|N)=\hat{x}_i(k|k)+A_i(k)[\hat{x}_i(k+1|N)-\hat{x}_i(k+1|k)], \tag{2.13}$$

$$A_i(k)=P_i(k|k)\Phi^T(k+1,k)P_i^{-1}(k+1|k), \tag{2.14}$$

$$P_i(k|N)=P_i(k|k)+A_i(k)[P_i(k+1|N)-P_i(k+1|k)]A_i(k), \tag{2.15}$$

$$\hat{x}_i(k+1|k)=\Phi(k+1,k)\hat{x}_i(k|k),\quad \hat{x}_i(0|0)=x_0, \tag{2.16}$$

$$P_i(k+1|k)=\Phi(k+1,k)P_i(k|k)\Phi^T(k+1,k)+Q(k),\quad P(0|0)=P_0, \tag{2.17}$$

$$\hat{x}_i(k+1|k+1)=\hat{x}_i(k+1|k)+K_i(k+1)[y_i(k+1)-H_i(k+1)\hat{x}_i(k+1|k)], \tag{2.18}$$

$$P_i(k+1|k+1)=[I-K_i(k+1)H_i(k+1)]P_i(k+1|k). \tag{2.19}$$

或

$$P_i^{-1}(k+1|k+1)=P_i^{-1}(k+1|k)+H_i^T(k+1)R_i(k+1)H_i(k+1), \tag{2.20}$$

$$K_i(k+1)=P_i(k+1|k)H_i^T(k+1)[H_i(k+1)P_i(k+1|k)H_i^T(k+1)+R_i(k+1)]^{-1}. \quad (2.21)$$

3 基于局部滤波估计的分布平滑合成算法

本节导出平滑合成公式. 所使用的信息是局部处理器所产生的滤波估计及其误差方差,这里的结果基于[2]的工作.

3.1 集中式的实现

1) 局部处理器 i 按式(2.16～2.21)计算 $\hat{x}_i(k|k)$,$\hat{x}_i(k+1|k)$,$P_i(k+1|k)$,$P_i(k+1|k+1)$,并传送至中心处理器.

2) 中心处理器先按下述引理合成产生整体滤波估计 $\hat{x}(k|k)$,$\hat{x}(k+1|k)$,而 $P(k+1|k)$,$P(k+1|k+1)$按式(2.8)及(2.10)计算;然后,再按式(2.4～2.6)求 $\hat{x}(k|N)$.

引理 按本文所述的估计结构,则滤波合成有解

$$\hat{x}(k|k)=\zeta(k)+P(k|k)[P_1^{-1}(k|k)\hat{x}_1(k|k)+P_2^{-1}(k|k)\hat{x}_2(k|k)], \quad (3.1)$$

$$\zeta(k+1)=F(k+1,k)\zeta(k)+\sum_{i=1}^{2}L_i(k+1,k)\hat{x}_i(k|k), \quad (3.2)$$

$$F(k+1,k)=P(k+1|k+1)P^{-1}(k+1|k)\Phi(k+1,k), \quad (3.3)$$

$$L_i(k+1,k)=P(k+1,k+1)[P_i^{-1}(k+1|k)-P^{-1}(k+1|k)]Q(k)\Phi^T(k,k+1)P_i^{-1}(k|k), \quad (3.4)$$

$$\zeta(0)=-x_0. \quad (3.5)$$

证 参阅[2].

3.2 分布式实现

1) 局部处理器 i 按式(2.16～2.21)计算 $\hat{x}_i(k|k)$,$\hat{x}_i(k+1|k)$,$P_i(k|k)$,$P_i(k+1|k)$,并接收中心处理器发送的 $P(k|k)$,$P(k+1|k)$,且按下述公式计算 $\zeta_i(k)$,

$$\zeta_i(k+1)=F(k+1,k)\zeta_i(k)+L_i(k+1,k)\hat{x}_i(k|k). \quad (3.6)$$

其中 $L_i(k+1,k)$,$F(k+1,k)$按式(3.3～3.4)计算,初值 $\zeta_1(0)=0$, $\zeta_2(0)=-x_0$.

2) 中心处理器按

$$\hat{x}(k|k)=\sum_{i=1}^{2}[\zeta_i(k)+P(k|k)P_i^{-1}(k|k)\hat{x}_i(k|k)] \quad (3.7)$$

计算 $\hat{x}(k|k)$,再依式(2.8)及(2.10)计算 $P(k+1|k)$,$P(k+1|k+1)$,且传送至局部处理器 i,再按式(2.4～2.6)计算 $\hat{x}(k|N)$.

证 显然式(3.6～3.7)可以从分解式(3.1)及(3.2)中求得.

4 基于局部平滑估计的分布 Rauch-Tung-Striebel 平滑器

在这一节中,我们考虑已知局部平滑估计的分布平滑合成问题.

4.1 集中式实现

1) 局部处理器 i 按式(2.13～2.21)计算 $\hat{x}_i(k|N)$及 $A_i(k)$,$P_i(k|k)$,并传送至中心处理器.

2) 中心处理器按式(2.8)和式(2.10)计算 $P(k+1|k)$,$P(k+1|k+1)$. 按式(2.5)求解 $A(k)$,并依下述定理的算法求解整体平滑估计 $\hat{x}(k|N)$.

定理 按本文所述估计结构,则 Rauch-Tung-Striebel 平滑合成有解

$$\hat{x}(k|N) = \sum_{i=1}^{2} A(k)A_i^{-1}(k)\hat{x}_i(k|N) + \eta(k), \tag{4.1}$$

$$\eta(k) = A(k)\eta(k+1) - A(k)\sum_{i=1}^{2}[I - A(k+1)A_i^{-1}(k+1)]\hat{x}_i(k+1|N)$$
$$+ A(k)Q(k)\Phi^T(k,k+1)f(k), \tag{4.2}$$

$$\eta(N+1) = \sum_{i=1}^{2}\Phi(N+1,N)[P(N|N)P_i^{-1}(N|N) - I]\hat{x}_i(N|N), \tag{4.3}$$

$$f(k) = A^{-T}(k)f(k+1) - \sum_{i=1}^{2}[I - A^{-T}(k)A_i^T(k)]\Phi^T(k+1,k)Q^{(1)}(k)$$
$$\cdot [A_i^{-1}(k)\hat{x}_i(k|N) - \hat{x}_i(k+1|N)], \quad f(N) = 0. \tag{4.4}$$

证　由式(2.8)、(2.17)得

$$P^{-1}(k+1|k)\Phi(k+1,k)P(k|k) = [I - P^{-1}(k+1|k)Q(k)]\Phi^T(k,k+1), \tag{4.5}$$
$$P_i^{-1}(k+1|k)\Phi(k+1,k)P_i(k|k) = [I - P_i^{-1}(k+1|k)Q(k)]\Phi^T(k,k+1). \tag{4.6}$$

又由式(2.5)、(2.14)及(4.5)、(4.6)得

$$I - A(k)\Phi(k+1,k) = A(k)Q(k)\Phi^T(k,k+1)P^{-1}(k|k), \tag{4.7}$$
$$I - A_i(k)\Phi(k+1,k) = A_i(k)Q(k)\Phi^T(k,k+1)P_i^{-1}(k|k). \tag{4.8}$$

由式(2.13)、(2.16)得

$$[I - A_i(k)\Phi(k+1,k)]\hat{x}_i(k|k) = \hat{x}_i(k|N) - A_i(k)\hat{x}_i(k+1|N). \tag{4.9}$$

由式(4.8)及上式可以解出

$$Q(k)\Phi^T(k,k+1)P_i^{-1}(k|k)\hat{x}_i(k|k) = A_i^{-1}(k)\hat{x}_i(k|N) - \hat{x}_i(k+1|N). \tag{4.10}$$

再由式(2.4)及(3.1)得

$$\hat{x}(k|N) = A(k)\hat{x}(k+1|N) + [I - A(k)\Phi(k+1,k)]\zeta(k)$$
$$+ \sum_{i=1}^{2}A(k)Q(k)\Phi^T(k,k+1)P_i^{-1}(k|k)\hat{x}_i(k|k)$$
$$= A(k)\hat{x}(k+1|N) + [I - A(k)\Phi(k+1,k)]\zeta(k)$$
$$+ \sum_{i=1}^{2}A(k)[A_i^{-1}(k)\hat{x}_i(k|N) - \hat{x}_i(k+1|N)]. \tag{4.11}$$

令

$$\eta(k) = \hat{x}(k|N) - \sum_{i=1}^{2}A(k)A_i^{-1}(k)\hat{x}_i(k|N)$$
$$= A(k)\hat{x}(k+1|N) + [I - A(k)\Phi(k+1,k)]\zeta(k)$$
$$- \sum_{i=1}^{2}A(k)\hat{x}_i(k+1|N). \tag{4.12}$$

又

$$\eta(k+1) = \hat{x}(k+1|N) - \sum_{i=1}^{2}A(k+1)A_i^{-1}(k+1)\hat{x}_i(k+1|N),$$

则

$$\eta(k) = A(k)\eta(k+1) - A(k)\sum_{i=1}^{2}[I - A(k+1)A_i^{-1}(k+1)]\hat{x}_i(k+1|N)$$

$$+[I-A(k)\Phi(k+1,k)]\zeta(k). \tag{4.13}$$

由式(3.2～3.4)及式(4.10)得

$$P^{-1}(k+1|k+1)\zeta(k+1)=A^T(k)P^{-1}(k|k)\zeta(k)+\sum_{i=1}^{2}[P_i^{-1}(k+1|k)-P^{-1}(k+1|k)] \cdot Q(k)Q^{(1)}(k)[A_i^{-1}(k)\hat{x}_i(k|N)-\hat{x}_i(k+1|N)]. \tag{4.14}$$

这里，$Q^{(1)}(k)$是满足 $Q(k)Q^{(1)}(k)Q(k)=Q(k)$的广义逆，非常容易计算，参阅[5]. 再由式(2.14)、(2.17)有

$$\begin{aligned}A_i(k)&=P_i(k|k)\Phi^T(k+1,k)P_i^{-1}(k+1|k)\\&=\Phi(k,k+1)[P_i(k+1|k)-Q(k)]P_i^{-1}(k+1|k)\\&=\Phi(k,k+1)-\Phi(k,k+1)Q(k)P_i^{-1}(k+1|k).\end{aligned} \tag{4.15}$$

同理

$$A(k)=\Phi(k,k+1)-\Phi(k,k+1)Q(k)P^{-1}(k+1|k),$$

两者相减得

$$[P_i^{-1}(k+1|k)-P^{-1}(k+1|k)]Q(k)=[A^T(k)-A_i^T(k)]\Phi^T(k+1,k). \tag{4.16}$$

式(4.16)代入式(4.14)并令 $f(k)=P^{-1}(k|k)\zeta(k)$得

$$f(k)=A^{-T}(k)f(k+1)+\sum_{i=1}^{2}[-I+A^{-T}(k)A_i^T(k)]\Phi^T(k+1,k)Q^{(1)}(k) \cdot [A_i^{-1}(k)\hat{x}_i(k|N)-\hat{x}_i(k+1|N)]. \tag{4.17}$$

由式(4.11～4.13)及式(4.17)不难得出定理的结果.

4.2 分布式实现

1）局部处理器 i 按式(2.13～2.21)计算 $\hat{x}_i(k|N)$、$A_i(k)$，并传送至中心处理器；同时接收中心处理器发来的 $A(k)$；并按

$$f_i(k)=A^{-T}(k)f_i(k+1)-[I-A^{-T}(k)A_i^T(k)]\Phi^T(k+1,k)Q^{(1)}(k) \cdot [A_i^{-1}(k)\hat{x}_i(k|N)-\hat{x}_i(k+1|N)],\quad f_i(N)=0, \tag{4.18}$$

$$\eta_i(k)=A(k)\eta_i(k+1)-A(k)[I-A(k+1)A_i^{-1}(k+1)]\hat{x}_i(k+1|N)+A(k)Q(k)\Phi^T(k,k+1)f_i(k), \tag{4.19}$$

$$\eta_i(N+1)=\Phi(N+1,N)[P(N|N)P_i^{-1}(N|N)-I]\hat{x}_i(N|N). \tag{4.20}$$

计算 $\eta_i(k)$，并传送至中心处理器.

2）中心处理器按

$$\hat{x}(k|N)=\sum_{i=1}^{2}[A(k)A_i^{-1}(k)+\eta_i(k)] \tag{4.21}$$

求解 $\hat{x}(k|N)$.

5 结　论

本文考虑由一个中心处理器和两个局部处理器组成的递阶网络估计结构中的分布估计问题. 基于这种结构，给出当已知局部滤波估计和局部平滑估计的情况下的 Rauch-Tung-Striebel 平滑器的合成算法. 对于每一算法又分别考虑了集中式实现和分布式实现这两种情况，本文给出的算法可以压缩通讯带宽.

参 考 文 献

[1] Willsky, A. S., et al.. Combining and Updating of Local Estimation and Regional Maps Along Sets of One-Dimensional Tracks. IEEE Trans. Automat. Contr., 1982, 27:799—813

[2] 周叶,戴冠中,王立新.线性离散时间系统分散估计的合成算法.控制与决策,1989,4(6):1—6

[3] Watanabe, K. and Trafestas S. G.. Discrete-Time Forward-Pass Smoothers in Distributed-Sensor Networks, Int. J. Systems Sci., 1988, 19(8):1375—1385

[4] Gelb, A.. Applied Optimal Estimation. MA, USA: MIT Press, 1979, 212—257

[5] Thomas, A. B. I. and Greville, N. E.. Generalized Inverses, Theory and Applications. New York: Wiley, 1974, 137—182

Decentralized Smoothing Algorithms of Discrete-Time Systems in Distributed-Sensor Networks

ZHANG Jianhua　and　DAI Guanzhong

(Department of Computer Science, Northwestern Polytechnical University • Xi'an, 710072, PRC)

Abstract: Combining problems of the Rauch-Tung-Striebel smoothers are solved in distributed-sensor networks, assuming that a simple estimation structure consists of a global processor and of two local processors. Two cases are considered for the problems of decentralized smoothing when the local-filtered estimates are available and when the local-smoothed estimates are available.

Key words: decentralized estimation; state estimation; smoothing

本文作者简介

张建华　1965 年生.1985 年毕业于西北工业大学电子工程系,1988 年获该系工学硕士学位.现为西北工业大学计算机科学与工程系博士生,从事综合电子系统,微分对策,分布式估计等理论与应用研究.研究兴趣为非线性系统及神经网络的应用基础.

戴冠中　见本刊 1992 年第 1 期第 28 页.