

随机时变参数的随机逼近辨识及收敛性分析

赵明旺

吕勇哉

(武汉钢铁学院自动化系, 430081) (浙江大学工业控制所·杭州, 310027)

摘要: 本文讨论 MIMO 离散系统的随机时变参数基于随机逼近法的辨识问题. 文中研究了参数估计和输出误差的收敛性并给出了初步的持续激励条件. 在该条件下, 证明了估计参数值和估计值与随机时变参数的统计均方差分别收敛于该随机时变参数的期望值和方差值. 仿真结果表明了参数估计具有较好的收敛性与一致性.

关键词: 系统辨识; 收敛性分析; 随机系统; 时变系统

1 引言

在大量工程、社会和经济系统中, 存在随机性变化的系统参数, 如随机漂移参数、噪声参数、Markov 参数^[1~2, 5~7]等. 这些随机时变参数给系统辨识和控制带来了极大困难. 近十年来, 许多研究人员致力于具有这类参数的线性系统的辨识和自适应控制^[1~2, 5~6].

本文将讨论如下形式的噪声参数的随机逼近法辨识问题

$$\theta(t) = \theta + R(t), \quad (1)$$

其中 θ 和 $R(t)$ 分别为常值和零均值白噪声.

Chen 和 Caines^[2], Guo 和 Meyn^[6] 分别研究了具有 (1) 类随机时变参数的线性系统的自适应控制, 但未给出参数估计收敛的条件. Guo^[5] 利用 Kalman 滤波器型算法研究了如

$$\theta(t) = \theta(t-1) + R(t) \quad (2)$$

的时变参数辨识问题, 给出了估计误差的均方差在一较强充分激励条件之下的上界估计式. 对于常参数系统的随机逼近辨识, Chen 和 Guo^[3] 给出了一较弱的估计收敛的充分激励条件, 遗憾的是该条件并不适用于本文所讨论的随机时变参数辨识.

本文将针对随机时变参数的随机逼近辨识, 给出并证明一适宜的收敛充分激励条件. 计算机仿真结果将表明该辨识方法具有较好的收敛性与一致性.

2 系统描述与辨识算法

考虑如下统一的自回归方程表述

$$y(t) = \theta(t)^T \Phi(t-1) + w(t), \quad (3)$$

其中

$y(t), w(t) \in R^s$: 分别为系统输出和观测噪声;

$\Phi(t) \in R^p$: 为回归向量;

$\theta(t) = \theta + R(t) \in R^p \times s$: 为随机噪声参数阵;

$\theta, R(t)$: 分别为常参数阵和白噪声阵.

系统(3)可包括很广泛的系统,如静态系统(线性或具有线性参数的非线性系统),动态系统(线性或具有线性参数的非线性系统).由随机逼近基本方法^[3,4],有如下估计算法:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \frac{a\Phi(t)}{r(t)}[y^r(t+1) - \Phi^r(t)\hat{\theta}(t)], \quad (4)$$

$$r(t) = r(t-1) + \Phi^r(t)\Phi(t), \quad (5)$$

$$0 < a \leq 1, \quad r(-1) > 0.$$

由算法(4)和(5),利用观测向量序列 $\{\Phi(t)\}$ 可递推计算出 $r(t)$ 和 $\hat{\theta}(t+1)$.下一节将详细讨论参数估计的收敛性与一致性问题.

3 理论分析

为保证系统(3)的参数估计 $\hat{\theta}(t+1)$ 的收敛性与一致性,有如下关于系统激励和噪声的假设:

A1) 对噪声源 $w(t)$ 和 $R(t)$

$$1) \|E\{w(t) | F_{t-1}\}\| = 0. \quad \text{a. s.} \quad (6)$$

$$2) E\{\|w(t)\|^2 | F_{t-1}\} \leq \sigma^2. \quad \text{a. s.} \quad (7)$$

$$3) \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|w(t)\|^2 \leq \sigma^2. \quad \text{a. s.} \quad (8)$$

$$4) \|E\{R(t) | F_{t-1}\}\| = 0. \quad \text{a. s.} \quad (9)$$

$$5) E\{R(t)R(t)^T | F_{t-1}\} \leq C. \quad \text{a. s.} \quad (10)$$

$$6) \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R(t)R(t)^T \leq C. \quad \text{a. s.} \quad (11)$$

$$7) \|E\{R(t)w(t) | F_{t-1}\}\| = 0. \quad \text{a. s.} \quad (12)$$

其中 F_{t-1} 是由观测序列 $\{\Phi(t)\}$ 构成的非降 σ 子代数; C 为有限半正定阵或正定阵.

A2) 系统激励条件 I

1) 存在正数 δ 和 M_1 使下式成立

$$\|\Phi(t)\|^2 \leq M_1 r(t)^{\frac{1}{2}-\delta}. \quad (13)$$

$$2) \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)/t > 0. \quad (14)$$

A3) 系统激励条件 II

$$1) \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} r(N)/r(N-1) < \infty. \quad (15)$$

$$2) \lambda_{\max}^t/\lambda_{\min}^t \leq M_2 [\log r(t)]^{1/4}, \quad \text{a. s.} \quad \forall t \geq N_0. \quad (16)$$

其中 M_2 和 N_0 为有限正数; $\lambda_{\max}^t$ 和 $\lambda_{\min}^t$ 分别为如下矩阵的最大和最小特征值

$$\sum_{i=0}^t \Phi(i)\Phi(i)^T.$$

因此,对系统(3)和算法(4)、(5),有如下收敛性与一致性定理.

定理 在假设 A1) 和 A2) 成立条件下,当随机逼近算法(4)和(5)用于系统(3),则有

$$1^\circ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-1} b^r(t)b(t) = 0. \quad \text{a. s.} \quad (17)$$

$$2^\circ \|\hat{\theta}(t)\| < \infty. \quad \text{a. s.} \quad (18)$$

若进一步有 A3) 成立且 $a=1$,则

$$3^\circ \hat{\theta}(t) \rightarrow \theta. \quad \text{a. s.} \quad (19)$$

$$4^\circ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{\hat{\theta}(t) - \theta(t) [\hat{\theta}(t) - \theta(t)]^T | F_{t-1}\} \leq C, \quad \text{a. s.} \quad (20)$$

其中

$$b(t) = -\tilde{\theta}(t)^T \Phi(t), \quad (21)$$

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta. \quad (22)$$

证 定义如下随机 Lyapunov 函数

$$V(t) = \text{tr}[\tilde{\theta}(t)^T \tilde{\theta}(t)] \geq 0. \quad (23)$$

由式(4)和(22)可得

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(t) &= \tilde{\theta}(t-1) + \frac{a\Phi(t-1)}{r(t-1)} [\Phi(t-1)^T \theta(t) + w(t)^T - \Phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)] \\ &= \tilde{\theta}(t-1) + \frac{a\Phi(t-1)}{r(t-1)} [b^T(t-1) + \Phi(t-1)^T R(t) + w(t)^T]. \end{aligned} \quad (24)$$

因此, (23)式可记为

$$\begin{aligned} V(t) &= \text{tr}[\tilde{\theta}(t-1)^T \tilde{\theta}(t-1) + \frac{2a\tilde{\theta}(t-1)^T \Phi(t-1)}{r(t-1)} [b(t-1)^T \\ &\quad + \Phi(t-1)^T R(t) + w(t)^T] + \frac{a^2 \Phi(t-1)^T \Phi(t-1)}{r(t-1)^2} [b(t-1)^T \\ &\quad + \Phi(t-1)^T R(t) + w(t)^T] [b(t-1) + R^T(t) \Phi(t-1) + w(t)]] \\ &= V(t-1) - \frac{2ab^T(t-1)}{r(t-1)} [b(t-1) + R^T(t) \Phi(t-1) + w(t)] \\ &\quad + \frac{a^2 \|\Phi(t-1)\|^2}{r(t-1)^2} \|b(t-1) + R^T(t) \Phi(t-1) + w(t)\|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

由式(21)可知, $b(t-1)$ 是 F_{t-1} 可测的. 因此, 由鞅差性质可得

$$\begin{aligned} E\{V(t) | F_{t-1}\} &\leq V(t-1) - \frac{2ab^T(t-1)b(t-1)}{r(t-1)} \\ &\quad + \frac{a^2 \|\Phi(t-1)\|^2}{r(t-1)^2} [b^T(t-1)b(t-1) + \Phi(t-1)^T C \Phi(t-1) + \sigma^2] \\ &\leq V(t-1) - \frac{2a - a^2}{r(t-1)} b^T(t-1)b(t-1) \\ &\quad + \frac{a^2 \|\Phi(t-1)\|^2}{r(t-1)^2} [\Phi(t-1)^T C \Phi(t-1) + \sigma^2]. \end{aligned} \quad (26)$$

由假设 A2) 可得

$$\begin{aligned} \frac{\|\Phi(t-1)\|^2}{r(t-1)} \Phi(t-1)^T C \Phi(t-1) &\leq \frac{\|\Phi(t-1)\|^4}{r(t-1)} \|C\| \\ &\leq M_1^2 r(t-1)^{-1-2\delta} \|C\| \quad \{\text{利用式(13)}\} \\ &\leq K_1 t^{-1-2\delta}, \quad 0 \leq K_1 < \infty. \quad \{\text{利用式(14)}\} \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|\Phi(t-1)\|^2}{r(t-1)^2} [\Phi(t-1)^T C \Phi(t-1) + \sigma^2] \\ \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left[K_1 t^{-1-2\delta} + \frac{r(t-1) - r(t-2)}{r(t-1)r(t-2)} \sigma^2 \right] \quad \{\text{利用式(5)}\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} K_1 t^{-1-2\delta} + \left[\frac{1}{r(-1)} - \frac{1}{r(\infty)} \right] \sigma^2 < \infty. \quad (27)$$

故由式(26)和(27),根据鞅收敛定理(见文[4]附录A),有

$$i) V(t) \rightarrow \text{有限随机变量.} \quad \text{a. s.} \quad (28)$$

$$ii) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^r(t)b(t)}{r(t)} < \infty. \quad \text{a. s.} \quad (29)$$

因此,由 Kronecker 引理

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{r(N)} \sum_{i=0}^N b^r(t)b(t) = 0. \quad \text{a. s.} \quad (30)$$

故 1) 由式(14)可知式(17)成立.

2) 由式(28)和(23)可知式(18)成立.

3) 由假设条件 A2) 和 A3), 根据文[3]定理 2.4 可知当 $a=1$ 时, 式(19)成立.

4) 由式(22)可得

$$\begin{aligned} & [\hat{\theta}(t) - \theta(t)][\hat{\theta}(t) - \theta(t)]^r \\ &= \tilde{\theta}(t)\tilde{\theta}(t)^r - \tilde{\theta}(t)R(t)^r - R(t)\tilde{\theta}(t)^r + R(t)R(t)^r. \end{aligned} \quad (31)$$

而由(24)有

$$\begin{aligned} \|E\{R(t)^r \tilde{\theta}(t) | F_{t-1}\}\| &= \|E\{R(t)^r \tilde{\theta}(t-1) \\ &\quad + R(t)^r \frac{a\Phi(t-1)}{r(t-1)} [b(t-1)^r + \Phi(t-1)^r R(t) + w(t)^r] | F_{t-1}\}\| \\ &= \|E\{R(t)^r a\Phi(t-1)\Phi(t-1)^r R(t)/r(t-1) | F_{t-1}\}\| \\ &\leq aM_1 r(t-1)^{-\frac{1}{2}-\delta} \|C\| \\ &\leq K_2 t^{-\frac{1}{2}-\delta}, \quad 0 \leq K_2 < \infty. \quad \{\text{利用式(14)}\} \end{aligned} \quad (32)$$

由级数收敛性质有

$$\sum_{i=1}^N K_2 t^{-\frac{1}{2}-\delta}/t = \sum_{i=1}^N K_2 t^{-\frac{3}{2}-\delta} < \infty. \quad (33)$$

因此,根据 Kronecker 引理可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_2 t^{-\frac{1}{2}-\delta} = 0. \quad (34)$$

故

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|E\{R(t)\tilde{\theta}(t)^r + \tilde{\theta}(t)R(t)^r | F_{t-1}\}\| = 0. \quad \text{a. s.} \quad (35)$$

因此,由式(10)、(18)和(31)可得

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{[\hat{\theta}(t) - \theta(t)][\hat{\theta}(t) - \theta(t)]^r | F_{t-1}\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{\tilde{\theta}(t)\tilde{\theta}(t)^r - \tilde{\theta}(t)R(t)^r - R(t)\tilde{\theta}(t)^r + R(t)R(t)^r | F_{t-1}\} \\ &\leq C. \quad \text{a. s.} \end{aligned} \quad (36)$$

证毕.

上述定理及其证明可知(1)类随机时变参数的随机逼近辨识具有较好的估计收敛性

与一致性,且估计值与原时变参数的均方差收敛于时变参数的方差.保证定理成立的系统激励条件较弱,比如下系统充分激励条件

$$B_1 \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{t+N} \Phi(i) \Phi(i)^T \leq B_2, \quad (37)$$

$$\forall t, \exists N > \infty, B_1, B_2 > 0$$

弱得多,亦即满足条件(37)必满足本文定理中的系统激励条件 I 和 II. 因此,本文激励条件较易满足.

4 仿 真

本节介绍计算机仿真结果. 仿真对象为

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1(t)y(t-1) + a_2(t)y(t-1)u(t-2) + a_3(t)u(t-2) + w(t) \\ &= \theta^T(t)\Phi(t-1) + w(t). \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \theta(t) &= [a_1(t) \quad a_2(t) \quad a_3(t)]^T \\ &= [0.4 + r_1(t) \quad -0.2 + r_2(t) \quad -0.5 + r_3(t)]^T, \\ \Phi(t-1) &= [y(t-1) \quad y(t-1)u(t-2) \quad u(t-2)]^T. \end{aligned}$$

$w(t)$ 和 $r_i(t), i=1, 2, 3$ 分别是方差为 0.5 和 0.2 的零均值的白噪声. 仿真结果如图 1 所示. 由于随机逼近法属一阶收敛算法, 故估计收敛过程比最小二乘法(属二阶收敛算法)稍慢. 即使如此, 参数估计一致性得到充分验证.

5 结 论

本文详细研究了(1)类随机时变参数的随机逼近辨识的收敛性和一致性问题, 给出了保证系统参数估计收敛与一致收敛的系统激励的充分条件. 本文表明, (1)类随机时变参数的随机逼近辨识具有较好的收敛性与一致性. 在时变参数辨识领域, (2)类参数以及均值非常数且相关等更广泛的参数过程是值得进一步研究的问题, 与此相关的适应性控制问题亦值得深入讨论.

参 考 文 献

- [1] Caines, P. E.. Stochastic Adaptive Control: Randomly Varying Parameters and Continually Distributed Controls. Proc. of the 8th Triennial World Congress of IFAC, Kyoto, Japan, 1981
- [2] Chen, H. F. and Caines, P. E.. On the Adaptive Control of Stochastic Systems with Random Parameters. Proc. of the 23rd IEEE Conf. on Decision and Control, USA, 1984, 33-38
- [3] Chen, H. F. and Guo, L.. Adaptive Control with Recursive Identification for Stochastic Linear Systems. Advances in Control and Dynamic Systems, 1987, 26:277-331
- [4] Goodwin, G. C. and Sin, K. S.. Adaptive Filtering, Prediction, and Control. USA, Prentice-Hall INC, 1984
- [5] Guo, L.. Estimating Time-Varying Parameters by the Kalman Filter Based Algorithm; Stability and Convergence. IEEE

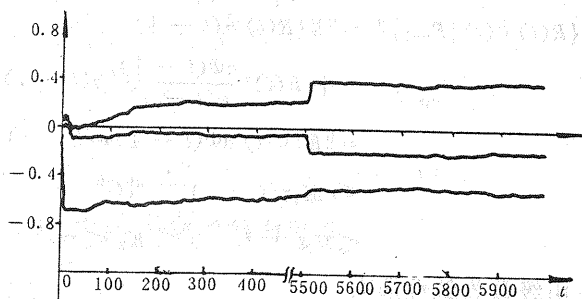


图 1 随机时变参数随机逼近法辨识仿真结果

Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35(2):141-147

- [6] Guo, L. and Meyn, S. P.. Adaptive Control for Time-Varying Systems; A Combination of Martingale and Markov Chain Techniques. Int. J. Adaptive Control and Signal Processing, 1990, 3(3):1-14
- [7] 袁展东. 自适应控制理论及其应用. 上海: 华东师范大学出版社, 1988

Parameter Identification and Convergence Analysis Based on Stochastic Approximation Method for Random Parameters

ZHAO Mingwang

(Department of Automation, Wuhan Iron & Steel University, Wuhan, 430081, PRC)

LÜ Yongzai

(Department of Chemical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, 310027, PRC)

Abstract: This paper presents new developments of parameter identification for MIMO discrete stochastic systems with random parameters. These algorithms are based on the stochastic approximation method. Convergence of both parameter estimated values and output error are studied and preliminary persistent exciting conditions are given. Under the conditions, it is proved that parameter estimates and mean square value of difference between parameter estimates and random parameters are ensured converging to expectations of these random parameters and the mean square derivation value of random parameters, respectively. The simulation results show us the truth of the conclusion of theoretical analysis.

Key words: system identification; convergence analysis; stochastic systems; time-varying systems

本文作者简介

赵明旺 1964年生. 1990年毕业于浙江大学工业自动化专业, 获工学博士学位, 现任武汉钢铁学院工业电气自动化系讲师. 目前研究兴趣和领域为参数估计, 自适应控制和智能控制等.

吕勇哉 1937年生. 1961年毕业于浙江大学化工系, 现任浙江大学教授, 博士生导师, 工业控制研究所所长. 主要研究领域为工业过程的建模和控制, 大系统理论, 智能控制与决策的理论与方法及其工业应用.