第 9 卷第 3 期
1992 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 3
Jun., 1992

多项式根的分布的若干结果*

王 龙 黄 琳

(北京大学力学系, 100871)

摘要：本文给出了实系数多项式为无周期多项式的充分必要条件.

关键词：线性系统；多项式；特征方程；稳定性；系数空间

考虑 n 次实系数多项式

$$f(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

若 $f(s)$ 的所有根均为单实根，则称 $f(s)$ 为无周期的 (Aperiodic)，记为 $f(s) \in A_p$. 若线性时不变系统的特征多项式为无周期的，则其动态响应不含振荡成份. 另外，无周期多项式在多项式稳定性的研究中有重要意义[1]，在一定条件下，多项式的稳定性将归结为两个无周期多项式根的分布情况. 在研究多项式凸组合的无周期性时，或在系数空间中研究系数变化对根的影响时[2,3]，迫切需要知道多项式无周期性在其系数上的反映，但目前这方面还未有显式的等价条件. 下面我们给出一个多项式无周期性在系数上的等价条件.

记全体在连续时间意义下稳定的多项式为 H.

对于 n 次复系数多项式 $p(s)$，设

$$p(j\omega) = m(\omega) + jn(\omega) = \sum_{i=0}^{n} (\beta_i + j\alpha_i)\omega^{n-i}, \quad \alpha_0 \neq 0.$$

其中 $m(\cdot)$、$n(\cdot)$ 为实多项式，α_i、β_i 为实数.

引理 1[1] $p(s) \in H$ 当且仅当多项式 $m(\cdot)$、$n(\cdot)$ 的根均为单实根，相互交错且

$$m(0)n'(0) - m'(0)n(0) > 0.$$

引理 2[4] $p(s) \in H$ 当且仅当矩阵 $(2n \times 2n)$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_0 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}.$$

所有偶次顺序主子式均大于零.

定理 1 $f(s) \in A_p$ 当且仅当矩阵 $(2n \times 2n)$

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于1990年8月30日收到. 1991年5月24日收到修改稿.

$$W=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & 2a_{n-2} & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & na_0 & \cdots & 3a_{n-3} & 2a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & 2a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

所有偶次顺序主子式均大于零.

证 命 $n(\omega)=f(\omega)$, $m(\omega)=f'(\omega)$,

则

$$m(0)n'(0)-m'(0)n(0)=a_{n-1}^2-2a_{n-2}a_n.$$

若 $a_{n-1}^2-2a_{n-2}a_n>0$,则 $f(s)\in A_p$ 当且仅当由

$$p(j\omega)=m(\omega)+jn(\omega)=f'(\omega)+jf(\omega)$$

决定的 $p(s)\in H$. 故由引理 1 和引理 2 知定理成立.

若 $a_{n-1}^2-2a_{n-2}a_n<0$,则命 $n(\omega)=f(\omega)$、$m(\omega)=-f'(\omega)$,

即有

$$m(0)n'(0)-m'(0)n(0)>0,$$

因此 $f(s)\in A_p$ 当且仅当由

$$p(j\omega)=m(\omega)+jn(\omega)=-f'(\omega)+jf(\omega)$$

决定的 $p(s)\in H$,但此时按引理 2 排出的矩阵中,二次顺序主子式为

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & -na_0 \end{vmatrix}=-na_0^2<0,$$

因此,在这种情况下,$f(s)\notin A_p$.

若 $a_{n-1}^2-2a_{n-2}a_n=0$,反设 $f(s)\in A_p$,则 $f(s)$ 和 $f'(s)$ 的根均为单实根且相互交错,故[1]

$$\lim_{\omega\to+\infty}\Delta\arg p(j\omega)=\lim_{\omega\to+\infty}\{\arg p(j\omega)-\arg p(-j\omega)\}=\pm n\pi.$$

其中 $p(j\omega)=f'(\omega)+jf(\omega)$.

故或者 $p(s)\in H$,或者 $p(-s)\in H$,这两种情况下,

$$a_{n-1}^2-2a_{n-2}a_n\neq 0, \qquad \text{矛盾}.$$

以上分析也同时说明了 $a_{n-1}^2-2a_{n-2}a_n>0$ 是 $f(s)\in A_p$ 的必要条件. 证毕.

例 1 考虑 $f(s)=a_0s^2+a_1s+a_2$, $a_0\neq 0$,则

$$W=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 2a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 2a_0 & a_1 \end{bmatrix}.$$

$$W_2=2a_0^2>0.$$

$$W_4=a_0^2(a_1^2-4a_0a_2)>0\Rightarrow a_1^2>4a_0a_2.$$

这正是熟知的结论.

例 2 考虑 $f(s)=a_0s^3+a_1s^2+a_2s+a_3$, $a_0\neq 0$,则

$$W=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 \end{bmatrix},$$

$$W_2=3a_0^2>0,$$

$$W_4=a_0^2(2a_1^2-6a_0a_2)>0\Rightarrow a_1^2-3a_0a_2>0,$$

$$W_6=a_0^2(a_1^2a_2^2-4a_0a_2^3+18a_0a_1a_2a_3-4a_1^3a_3-27a_0^2a_3^2)>0$$

$$\Rightarrow a_1^2a_2^2-4a_0a_2^3+18a_0a_1a_2a_3-4a_1^3a_3-27a_0^2a_3^2>0.$$

若利用三次方程解的判别式，则需作变换 $x=y-\frac{a_1}{3a_0}$，使方程变为 $y^3+py+q=0$，其中 $p=\frac{a_2}{a_0}-\frac{a_1^2}{3a_0^2}$，$q=\frac{2a_1^3}{27a_0^3}-\frac{a_1a_2}{3a_0^2}+\frac{a_3}{a_0}$，熟知方程有三个单实根的充要条件为 $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$，故 $p<0$，容易验证 $p<0\Leftrightarrow W_4>0$，$\Delta<0.\Leftrightarrow W_6>0$.

引理 3[1,5] 对于首两项系数均为正的实系数多项式 $p(s)$，$p(s)\in H$ 当且仅当由

$$p(s)=h(s^2)+sg(s^2)$$

决定的多项式 $h(\cdot)$、$g(\cdot)$ 的所有根均为单实负根，且这两个多项式的根相互交错.

考虑首项系数为正的 n 次实系数多项式

$$f(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n,\quad a_0>0.$$

定理 2 $f(s)\in A_p\cap H$ 当且仅当矩阵 $(2n\times 2n)$

$$W_H=\begin{bmatrix} na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & (n-3)a_3 & \cdots & & & & \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & & & & \\ 0 & na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \cdots & & & & \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \cdots & 2a_{n-2} & a_{n-1} & 0 & 0 \\ & & & & & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 \\ & & & & & 3a_{n-3} & 2a_{n-2} & a_{n-1} & 0 \\ & & & & & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

所有顺序主子式均大于零.

证 考虑多项式

$$\begin{aligned} p(s)&=f(s^2)+sf'(s^2)\\ &=a_0s^{2n}+na_0s^{2n-1}+a_1s^{2n-2}+(n-1)a_1s^{2n-3}+\cdots\\ &\quad+a_{n-2}s^4+2a_{n-2}s^3+a_{n-1}s^2+a_{n-1}s+a_n. \end{aligned}$$

由引理 3 易知

$$p(s)\in H\Leftrightarrow f(s)\in A_p\cap H.$$

再由熟知的 Hurwitz 稳定性判断准则即得证[1].

例 3 考虑 $f(s)=a_0s^2+a_1s+a_2$，$a_0>0$.

$$W_H = \begin{bmatrix} 2a_0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_1 & 2a_0 & a_0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}.$$

因此

$$2a_0 > 0,\quad a_0a_1 > 0,\quad 2a_0a_1^2 - a_0a_1^2 - 4a_0^2a_2 > 0,\quad a_2 > 0.$$

即

$$a_1 > 0,\quad a_2 > 0,\quad a_1^2 - 4a_0a_2 > 0.$$

与已知的结论相吻合.

参 考 文 献

[1] Gantmacher, F. R.. The Theory of Matrices, Chelsea. New York, 1959

[2] Siljak, D. D.. Parameter Space Methods for Robust Control Design: A Guided Tour. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, 34(7):674—688

[3] Huang Lin et al.. Stability of Families of Polynomials: Geometric Consideration in Coefficient Space. Int. J. Control, 1987, 45(2):649—660

[4] Soh, C. B. and Berger, C. S.. Damping Ratio of Polynomials with Perturbed Coefficients. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, 33(12):1180—1182

[5] Huang Lin et al.. Results on Positive Pairs of Polynomials and Their Application to the Construction of Stability Domains. Int J. Control, 1987, 46(1):153—159

Some New Results on the Root Distribution of Polynomials

WANG Long and HUANG Lin

(Department of Mechanics, Peking University • Beijing, 100871, PRC)

Abstract: A necessary and sufficient condition for a real polynomial to be aperiodic is given.

Key words: linear systems; polynomials; characteristic equations; stability; coefficient space

本文作者简介

王　龙　见本刊 1992 年第 2 期第 160 页.

黄　琳　见本刊 1992 年第 2 期第 160 页.