第 9 卷第 4 期
1992 年 8 月

Vol. 9, No. 4
Aug., 1992

指定区域内的极点配置及其鲁棒性

王海晏
(华东冶金学院自动化系·马鞍山,243002)

摘要: 本文提出了利用解 Lyapunov 方程将系统的极点配置在一个事先指定的区域内的一种方法,并分析了在线性时不变扰动下闭环系统的鲁棒性.

关键词: 极点配置;鲁棒性;线性分式变换

1 引　言

众所周知,一个控制系统的数学模型仅是它相应物理系统的一个近似. 所以,对于控制系统在扰动下的鲁棒性是非常重要的. 对于鲁棒稳定性已经提出了许多方法,但这些方法仅涉及稳定鲁棒性,而没有考虑维持系统某种性能指标的鲁棒性. 文[1]对于线性二次型调节器提出将最优闭环极点配置在一个圆盘内的一种方法,但没有讨论在系统受到扰动下的鲁棒性问题. 最近,文[2~4]提出了在线性时不变扰动下,系统的鲁棒极点配置. 本文中,我们将提出另一种方法.

2 基本方法

考虑线性连续系统 $\Sigma(A,B)$

$$\dot{X} = AX + BU, \quad X \in R^n, \quad U \in R^m. \tag{2.1}$$

其中 A,B 是适当维数的常数矩阵. 假设 (A,B) 是完全能控的. 对于系统 $\Sigma(A,B)$,引入状态反馈

$$U = FX. \tag{2.2}$$

则闭环系统可写成

$$\dot{X} = (A + BF)X. \tag{2.3}$$

利用附录 A 中的结论可得:

引理 2.1 假设系统(2.1)是完全能控的,线性分式变换(A.2)将指定区域 D(假定 D 为圆盘,若区域 D 不是圆盘,则该区域内一定包含一个内接圆)映射到左半复平面上. 如果状态反馈 K 使得 $(G+\Gamma K)$ 渐近稳定,则闭环系统 $(A+BF)$ 的极点在指定区域 D 内. 其中

$$F = -K(G + \Gamma K - \gamma I)^{-1}. \tag{A.7c}$$

$\Sigma(G,\Gamma)$ 定义如(A.5a,b).

证　因系统 $(G+\Gamma K)$ 渐近稳定,则其特征值均在左半复平面上. 又 $f(\lambda)$ 是将区域 D 映射到左半复平面上的线性分式变换. 利用变换(A.4)和(A.7)以及命题 A.1,即得系统 $(A+BF)$ 的极点均在指定区域 D 内.　　证毕

定理 2.1 设系统(2.1)完全能控,则反馈控制律

本文于1990年9月24日收到. 1991年12月2日收到修改稿.

$$U = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P^{-1}X = FX \tag{2.4}$$

具有下列性质：

i) $U=FX$ 使得下列二次型性能指标取最小值

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (X^{\mathrm{T}}QX + U^{\mathrm{T}}RU)\mathrm{d}t, \quad Q = 2\beta_1 P^{-1}. \tag{2.5}$$

ii) $\mathrm{Re}(\lambda_i(A_c)) = \mathrm{Re}(\lambda_i(A+BF)) \leqslant -\beta_1$.

其中 P 满足下列 Lyapunov 方程

$$(A+\beta_1 I)P + P(A+\beta_1 I)^{\mathrm{T}} = BR^{-1}B^{\mathrm{T}}. \tag{2.6}$$

R 是一个正定对称矩阵；β_1 是一个正实常数，且满足

$$\beta_1 > \| A \|. \tag{2.7}$$

这里 $\|(\cdot)\|$ 表示矩阵的一种范数.

证　因 (A,B) 完全能控，β_1 是一正实常数，R 为正定对称矩阵，所以 $[-(A+\beta_1 I), BR^{-\frac{1}{2}}]$ 完全能控[5]. 因此下列 Lyapunov 方程

$$[-(A+\beta_1 I)]P + P[-(A+\beta_1 I)]^{\mathrm{T}} + BR^{-1}B^{\mathrm{T}} = 0 \tag{2.8}$$

的解 P 是正定的.

又对任意一种范数均有

$$\max_i |\lambda_i(A)| \leqslant \| A \|. \tag{2.9}$$

它暗示矩阵 $-(A+\beta_1 I)$ 是渐近稳定矩阵. 因此，Lyapunov 方程(2.8)具有唯一解[6]. 这样 Lyapunov 方程(2.8)(即(2.6))具有唯一正定解 P. 从而 P^{-1} 存在，且亦为正定矩阵. 用 P^{-1} 分别左乘和右乘(2.8)两边，得

$$P^{-1}(A+\beta_1 I) + (A+\beta_1 I)^{\mathrm{T}}P^{-1} - P^{-1}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P^{-1} = 0, \tag{2.10}$$

或

$$P^{-1}A + A^{\mathrm{T}}P^{-1} - P^{-1}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P^{-1} + 2\beta_1 P^{-1} = 0. \tag{2.11}$$

由上式及 LQ 问题解的存在唯一性知结论 i)成立.

利用等式(2.10)及 Riccati 方程解的镜像性质[7]，即知

$$\mathrm{Re}(\lambda_i(A+BF)) \leqslant -\beta_1, \quad (F = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P^{-1})$$

成立.　　证毕.

注 1　由定理 2.1 的证明可知，条件(2.7)可改为 $\beta_1 > 0$ 且使得矩阵 $[-(A+\beta_1 I)]$ 渐近稳定.

利用定理 2.1 及引理 2.1 可确定状态反馈矩阵使得闭环系统的极点在一个事先指定的区域内[8]. 这种方法用解一个 Lyapunov 方程代替文[1]中求解一个代数 Riccati 方程而使得问题的求解得到简化. 为了避免有过多的矩阵求逆运算，对系统 $\Sigma(G,\Gamma)$，由定理 2.1 和式(A.5)、(A.7c)可得下述推论.

推理 2.1　将闭环系统 $(A+BF)$ 的极点配置在指定区域 D 内的状态反馈增益阵 F 为

$$F = R^{-1}B^{\mathrm{T}}[\beta P(A+\alpha I)^{\mathrm{T}} - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}]^{-1}(A+\alpha I),$$

或

$$F = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\{P[\beta I + 2(\beta_1+\gamma)(A+\alpha I)^{\mathrm{T}}]\}^{-1}.$$

其中 α, β 由(A.3)确定，$\beta_1 > \| G \|$，P 为下列 Lyapunov 方程

$$(G + \beta_1 I)P + P(G + \beta_1 I)^{\mathrm{T}} = \Gamma R^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}$$

的唯一对称正定解. (G,Γ)由(A.5a,b)确定,R为对称正定矩阵.

3 鲁棒性分析

3.1 问题的表述

考虑标称系统

$$\dot{X} = AX + BU. \tag{3.1}$$

(A,B)是完全能控的.利用推论2.1可确定状态反馈$U=FX$,使得标称闭环系统矩阵$(A+BF)$的特征值在一个指定的区域D内.由于存在不确定性,使得标称矩阵A、B变成$A+\Delta A$,$B+\Delta B$,即系统(3.1)变成

$$\dot{X} = (A + \Delta A)X + (B + \Delta B)U. \tag{3.2}$$

问题是设计状态反馈

$$U = FX, \tag{3.3}$$

使得受扰的闭环系统矩阵

$$A + \Delta A + (B + \Delta B)F = A + BF + E, \quad E = \Delta A + \Delta BF \tag{3.4}$$

的特征值仍保留在区域D内.

本文仅讨论扰动ΔA,ΔB是常数矩阵.

3.2 鲁棒性分析

扰动后的闭环系统可表成

$$\dot{X} = (A + E + BF)X = (\overline{A} + BF)X, \quad \overline{A} = A + E. \tag{3.5}$$

利用变换(A.3),系统$\Sigma(\overline{A},B)$可变换成$\Sigma(\overline{G},\Gamma)$

$$\overline{G} = G + \Delta G. \tag{3.6}$$

其中矩阵G、Γ、K的定义同(A.5).

$$\begin{aligned}\Delta G &= -\beta(A + BF + \alpha I)^{-1}E[(A + BF + \alpha I) + E]^{-1} \\ &= -\beta(A + BF + \alpha I)^{-1}E[(A + BF + \alpha I)^{-1}E + I]^{-1}(A + BF + \alpha I)^{-1}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

定理3.1 如果扰动矩阵E满足

$$\| E \|_2 \leqslant \frac{\beta_2}{\| (A + BF + \alpha I)^{-1} \|_2(|\beta| \, \| (A + BF + \alpha I)^{-1} \|_2 + \beta_2)}. \tag{3.8}$$

其中

$$\beta_2 = \frac{\lambda_{\min}(K^{\mathrm{T}}RK + 2\beta_1 P^{-1})}{2\lambda_{\max}(P^{-1})}.$$

则扰动后的闭环系统的极点仍保留在指定区域D内.

证 首先由定理2.1,可确定状态反馈矩阵K,使得$(G+\Gamma K)$满足

$$P^{-1}(G + \Gamma K) + (G + \Gamma K)^{\mathrm{T}}P^{-1} + K^{\mathrm{T}}RK + 2\beta_1 P^{-1} = 0. \tag{3.9}$$

且 $K=-R^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}P^{-1}$, $\mathrm{Re}\lambda_i(G+\Gamma K)\leqslant-\beta_1$.

另一方面,由于

$$\frac{\beta_2}{|\beta| \, \| (A + BF + \alpha I)^{-1} \|_2 + \beta_2} < 1,$$

所以由(3.8)知

$$\| E \|_2 < \frac{1}{\| (A + BF + \alpha I)^{-1} \|_2}. \tag{3.10}$$

条件(3.10)保证矩阵$(A+BF+\alpha I+E)$可逆. 由(3.7)式，利用近似逆矩阵的误差估计关系得

$$\begin{aligned} \| \Delta G \|_2 &\leqslant \frac{|\beta| \, \| (A + BF + \alpha I)^{-1} E \|_2 \| (A + BF + \alpha I)^{-1} \|_2}{1 - \| (A + BF + \alpha I)^{-1} E \|_2} \\ &\leqslant \frac{|\beta| \, \| E \|_2 \| (A + BF + \alpha I)^{-1} \|_2^2}{1 - \| E \|_2 \| (A + BF + \alpha I)^{-1} \|_2}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

考虑到函数$h(x) = x/(1-x)$，$(|x|<1)$为严格增函数，利用条件(3.8)即得

$$\| \Delta G \|_2 \leqslant \beta_2, \tag{3.12}$$

即矩阵$(G+\Gamma K+\Delta G)$是渐近稳定矩阵[9]. 于是由引理2.1知，矩阵$(A+BF+E)$的特征值与$(A+BF)$的特征值位于同一区域D内. 证毕.

注2 由定理证明可知，要使扰动后的闭环系统$(A+BF+E)$与原闭环系统$(A+BF)$的极点在同一个事先指定的区域内，只要经过(A.3)变换后的闭环系统$(G+\Gamma K+\Delta G)$保持稳定，而$(G+\Gamma K)$是渐近稳定的. 因此，利用变换(A.3)可将系统的稳定鲁棒性及性能指标鲁棒性问题转化为鲁棒稳定性问题. 而对于鲁棒稳定性问题已有较多成果可以利用. 例如，可有如下结论：

设A、B、F、E、G、Γ、ΔG的定义同上，R是对称正定矩阵，P是下列Lyapunov方程

$$(G + \beta_1 I)P + P(G + \beta_1 I)^{\mathrm{T}} = \Gamma R^{-1} \Gamma^{\mathrm{T}}$$

的正定解，其中$\beta_1 > \| G \|_2$.

让$M = \beta_1 P^{-1} + P^{-1}\Gamma R^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}} P^{-1}$，$K = -R^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}} P^{-1}$，如果有

$$\begin{aligned} \| \Delta G \|_2 &\leqslant \frac{1}{2 \| M^{-1} \|_2 \| P^{-1} \|_2} + \frac{\beta_1}{2\delta(P)} \\ &= \frac{\lambda_{\min}(M)}{2\lambda_{\max}(P^{-1})} + \beta_1 \frac{\lambda_{\min}(P^{-1})}{2\lambda_{\max}(P^{-1})}. \end{aligned}$$

则扰动后的闭环系统$(A+BF+E)$的极点仍保留在$(A+BF)$的极点所在的区域D内.

证 略(可参考文献[10].)

4 说明性例子

例1[11] 设系统的状态方程为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U,$$

指定区域D为以$-3+j0$为圆心，2为半径的一个圆区域.

这时取$\alpha=5$，$\beta=-4$，$\gamma=1$，则$f(\lambda)$将区域D映射到左半复平面上. $\| G \|_2 = \max \sqrt{\lambda_i(GG^{\mathrm{T}})}$，则有$\| G \|_2 = 0.3108$，取$\beta_1 = 0.8 > \| G \|_2$，$R^{-1} = 100I$，可求得状态反馈增益阵为

$$F = \begin{bmatrix} -3.6408 & -0.8244 \\ 2.0000 & -6.6748 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_i(A + BF) = \{-3.6408, -3.6748\} \in D.$$

并且有

$$\| (A+BF+\alpha I)^{-1} \|_2 = 0.7964$$

$$\beta_2 = \frac{\lambda_{\min}(K^{T}RK + 2\beta_1 P^{-1})}{2\lambda_{\max}(P^{-1})} = \frac{1.9738}{2\times 1.8012} = 0.5479.$$

所以由条件(3.8)得扰动界为 $\|E\|_2 \leqslant 0.1843$.

例 2[1] 考虑系统

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U .$$

指定区域 D 为以 $-6+j0$ 为圆心，4 为半径的一个圆区域.

这时可取 $\alpha=10, \beta=-8, \gamma=1$. 又取 $\beta_1=0.1, R=I$，则可求得状态反馈增益阵为

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -5.5679 & 0 \\ -18.3675 & 18.3675 & -8.5715 \end{bmatrix}.$$

于是可求得 $\lambda_i(A+BF)=\{-4.2734, -4.2981, -4.5679\}\in D$.

并且有

$$\| (A+BF+\alpha I)^{-1} \|_2 = 0.8648,$$

$$\beta_2 = \frac{\lambda_{\min}(K^{T}RK + 2\beta_1 P^{-1})}{2\lambda_{\max}(P^{-1})} = \frac{18.1992}{2\times 6979.5880} = 0.0013 .$$

于是由(3.8)可得扰动界为 $\|E\|_2 \leqslant 0.0002$.

显然上面的计算结果过于保守. 为了改善其保守性，一方面需改善线性状态空间模型渐近稳定的扰动界. 然而这一问题至今仍无满意的结果[12]. 另一方面，由定理 2.1 可知，当区域 D 指定后，反馈增益矩阵 F 将由对称正定矩阵 R 和 β_1 所确定. 显然对 R 和 β_1 进行优化设计可改善上面所得到的允许误差的上界.

5 结束语

对于设计线性时不变系统，常有一定的性能要求. 而将闭环系统的极点配置在一个事先指定的区域内常常是必要的. 本文提出可利用求解一个 Lyapunov 方程而实现上述要求，并讨论了当系统受到线性干扰后，系统的稳定鲁棒性及性能鲁棒性问题. 利用线性分式变换(A.3)可将该问题转化为一般的稳定鲁棒性问题，从而使得所讨论的问题得到简化. 然而，所得到的保证系统鲁棒性的扰动界较为保守，有待进一步研究.

参考文献

[1] Kim, S. B. and Furuta, K.. Regulator Design with Poles in a Specified Region. Int. J. Control, 1988, 47(1):143—160

[2] Juang Yautarng, Hong Zuuchang and Wang Yitarng. Lyapunov Approach to Robust Pole-Assignment Analysis. Int. J. Control, 1989, 49(3):921—927

[3] Juang Yautarng, Hong Zuuchang and Wang Yitarng. Robustness of Pole-Assignment in a Specified Region. IEEE, Trans. Automat. Contr., 1989, 34(7):758—760

[4] Juang Yautarng, Hong Zuuchang and Wang Yitarng. Eigenvalue Assignment Robustness:The Analysis for Autonomous System Matrices. Int. J. Control, 1989, 49(5):1787—1797

[5] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B.. Linear Optimal Control. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1971(有中译本)
[6] Thomas Kailath. Linear Systems. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1980(有中译本)
[7] Molinari, B. P.. The Time-Invariant Linear-Quadratic Optimal Control Problem, Automatic, 1977, 13(4): 347—357
[8] 王海晏. 配置极点在指定区域内的一种状态反馈设计. 重庆:第二届全国控制与决策学术会议论文集. 1990, 11—13
[9] Patel, R. V. and Toda, M.. Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems. JACC, 1980, San Francisco, California: TP8—A
[10] Patel, R. V., Toda, M. and Sridhar, B.. Robustness of Linear Quadratic State Feedback Designs in the Presence of System Uncertainty. IEEE, Trans. Automat. Contr., 1977, 22(6): 945—949
[11] 喻铁军,戴冠中. 具有指定闭环极点的次最优控制系统设计. 控制理论与应用, 1990, 7(2): 32—39
[12] 黄琳,王龙,于年才. 系统鲁棒性的若干问题——背景、现状与挑战. 控制理论与应用, 1991, 8(1): 11—29

附录 A

命题 A.1[1]　设矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,而

$$\Phi(\mu)=\gamma_0\prod_{j=1}^{m}(\mu-\mu_j)^{\sigma_j}. \tag{A.1}$$

其中 $\sigma_j(j=1,2,\cdots,m)$ 是整数,则 $\Phi(\lambda_i),i=1,2,\cdots,n$,是矩阵 $\Phi(A)$ 的特征值.

考虑线性分式函数

$$\rho=f(\lambda)=\frac{a\lambda+b}{c\lambda+d},\quad ad-bc\neq 0. \tag{A.2}$$

条件 $ad-bc\neq 0$ 保证变换(A.2)不是常数变换,且是保形变换. 为简单起见,将(A.2)式写成

$$\rho=f(\lambda)=\frac{\beta}{\lambda+\alpha}+\gamma. \tag{A.3}$$

其中 $\alpha=d/c,\quad \beta=(bc-ad)/c,\quad \gamma=a/c$.

(A.3)的逆变换为

$$\lambda=g(\rho)=-\alpha+\frac{\beta}{\rho-\gamma}, \tag{A.4}$$

也是一个保形变换.

(A.3)和(A.4)又称为线性分式变换.

适当地选择 α 使 $(A+\alpha I)$ 非奇异. 令

$$\begin{cases} G=\gamma I+\beta(A+\alpha I)^{-1}, & \text{(A.5a)}\\ \Gamma=(A+\alpha I)^{-1}B, & \text{(A.5b)}\\ K=-\beta F(A+\alpha I+BF)^{-1} & \\ \quad=-\beta F(I+(A+\alpha I)^{-1}BF)^{-1}(A+\alpha I)^{-1}. & \text{(A.5c)}\end{cases}$$

其中 I 表示适当维数的单位矩阵. 则有

$$G+\Gamma K=f(A+BF). \tag{A.6}$$

若令

$$\begin{cases} A=-\alpha I+\beta(G-\gamma I)^{-1}, & \text{(A.7a)}\\ B=\beta(G-\gamma I)^{-1}\Gamma, & \text{(A.7b)}\\ F=-K(G+\Gamma K-\gamma I)^{-1}. & \text{(A.7c)}\end{cases}$$

则有

$$A+BF=g(G+\Gamma K). \tag{A.8}$$

于是有下述结论[1]

系统 $\Sigma(G,\Gamma)$ 完全能控,当且仅当系统 $\Sigma(A,B)$ 完全能控.

Pole-Assignment in a Specified Region and Robustness

WANG Haiyan

(Department of Automation, East China Institute of Metallurgy · Ma'anshan, 243002, PRC)

Abstract: A method of assigning the poles of a closed-loop system in a specified region by solving a Lyapunov equation is proposed in this paper, and then, we analyze the robustness of the closed-loop systems under linear time-invariant perturbations.

Key words: pole-assignment; robustness; linear fractional transformation

本文作者简介

王海晏　1962年生. 1983年在安徽师范大学数学系获学士学位,1985年在东北工学院自动控制系获硕士学位. 毕业后分配在华东冶金学院自动化系工作至今. 曾研究过经济预测模型. 目前的研究领域为鲁棒控制和 H_∞ 控制,并对非线性系统的几何方法感兴趣.

全国第八届"微机在仪器仪表中的应用"学术会议在泰安召开

由中国仪表学会微机应用学会主办的全国第八届"微机在仪器仪表中的应用"学术交流会于6月2日至5日在山东省泰安市召开. 会议收到论文八十余篇,与会代表六十多人. 会议受到泰安市各级领导的重视,并得到山东矿业学院的大力支持. 在开幕式上,学会理事长、合肥工业大学张奠成教授作了"知识工程及其发展"的学术报告,大会还特邀国内著名学者、南开大学袁著祉教授、航天部25所所长夏国洪研究员作了专题学术报告. 会上分组进行了学术交流,并组织了参观活动. 该学会还在会议期间召开了理事会,并决定于1993年12月下旬召开一次题为"信息世界与计算机"的国际学术会议,会议地址初步选定为深圳.

(捷)