鲁棒观测器-控制器的设计*

丁 锋 谢新民
(清华大学自动化系·北京,100084)

摘要:本文讨论了多变量系统参数摄动下鲁棒观测器-控制器的设计方法,并给出了带观测器-控制器闭环系统的鲁棒稳定条件.

关键词:多变量系统;观测器;控制器;鲁棒性

1 引 言

Chen 和 Wong 讨论了鲁棒控制器的设计方法及闭环系统的稳定条件[1].但在系统状态不可得到的情况下,Chen 和 Wong 的方法将无能为力了.由于系统的参数摄动,破坏了观测器和带观测器的闭环系统可以独立配置极点的分离性原理,这给工程设计带来困难.本文将讨论系统参数摄动下,鲁棒观测器-控制器的设计方法及其闭环系统的鲁棒稳定条件.

2 问题陈述

考虑下列参数摄动多变量系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Delta A(x) + \Delta B(u), \\ y = Cx + \Delta C(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 状态, $u(t)\in R^r$ 输入, $y(t)\in R^m$ 输出; A、B 和 C 均为适当维数常矩阵; $\Delta A(x)$、$\Delta B(x)$ 和 $\Delta C(x)$ 是线性或非线性时变参数摄动(当 $\Delta A(x)=\Delta Ax$, $\Delta B(u)=\Delta Bu$, $\Delta C(x)=\Delta Cx$ 时,(1)式称为线性定常系统参数摄动),且对其上界作下列限制

$$\|\Delta A(x)\| \leqslant \beta_1\|x\|,\ \|\Delta B(u)\| \leqslant \beta_2\|u\|,\ \|\Delta C(x)\| \leqslant \beta_2\|x\|. \tag{2}$$

其中 β_1,β_2 和 β_3 均为常数.

定义 n 维向量 x 的范数 $\|x\| = \sum_{i=1}^{N}|x_i|$, (3)

n 维矩阵 $A=(a_{ij})$ 的范数[2]

$$\|A\| = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|. \tag{4}$$

系统(1)近似为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{5}$$

---

* 八五项目资金资助项目.
本文于1990年5月25日收到. 1991年6月15日收到修改稿.

不失一般性，假设(A,B)能控，(C,A)能观测. 我们选择系统(1)的观测器-控制器的结构如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = LCx + (A - LC)x_1 + L\Delta C(x) + Bu, \\ u = -Kx_1. \end{cases} \tag{6}$$

式中 $x_1(t) \in R^n$ 观测器状态，L 和 K 是适当维数的矩阵.

鲁棒观测器-控制器的设计问题是：选择观测器和控制器的参数 L 和 K，以便使闭环近似系统(5)、(6)渐近稳定，同时，参数摄动闭环系统(1)、(6)也渐近稳定. 也就是说，在我们的设计中，参数摄动是可以容忍的，观测器-控制器是鲁棒观测器-控制器.

3 鲁棒稳定性定理

把(1)、(6)式写成矩阵形式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A(x) + \Delta B(u) \\ L\Delta C(x) \end{bmatrix}, \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_1 \end{bmatrix} + \Delta C(x). \end{cases} \tag{7}$$

引入如下相似变换

$$\begin{bmatrix} x \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

式中 I 为单位阵. 则(7)式变为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A(x) + \Delta B(u) \\ \Delta A(x) + \Delta B(u) - L\Delta C(x) \end{bmatrix}, \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_2 \end{bmatrix} + \Delta C(x). \end{cases} \tag{8}$$

记

$$\begin{aligned} &\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}. \\ &\Delta\bar{A}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \Delta A(x) + \Delta B(u) \\ \Delta A(x) + \Delta B(u) - L\Delta C(x) \end{bmatrix}, \\ &\bar{C} = [C \quad 0], \quad \Delta\bar{C}(\bar{x}) = \Delta C(x). \end{aligned} \tag{9}$$

式(8)可简写成

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \Delta\bar{A}(\bar{x}), \\ y = \bar{C}\bar{x} + \Delta\bar{C}(\bar{x}), \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{20} \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{10}$$

带观测器的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x}, \\ y = \bar{C}\bar{x}, \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0. \end{cases} \tag{11}$$

令 $\varphi(t)$ 为(11)式的状态转移矩阵

$$\varphi(t) = \exp(\overline{A}t). \tag{12}$$

存在常数 $M>0$ 和 $\alpha>0$ 使下述不等式成立

$$\|\varphi(t)\| \leqslant M\exp(-\alpha t), \quad t \geqslant 0. \tag{13}$$

为了满足(13)式,只须适当选择观测器-控制器的参数 L 和 K,就能使 $\overline{A}$ 的所有特征值 $\lambda_i(\overline{A}), i=1,2,\cdots,2n$ 均位于左半平面内(这一点很易达到,因 (A,B) 能控,(C,A) 能观测). 当 $\overline{A}$ 的离虚轴最近的特征值是非重特征值时,可取 $-\alpha=\max \mathrm{Re}(\lambda_i(\overline{A}))$;当 $\overline{A}$ 的离虚轴最近的特征值为 q 重时,则存在 $M_1>0$ 和 $M>0$ 使不等式

$$\|\varphi(t)\| \leqslant M_1 t^q \exp(-\alpha_1 t) \leqslant M\exp(-\alpha t), \quad t \geqslant 0$$

成立. 其中 $-\alpha_1=\max \mathrm{Re}(\lambda_i(\overline{A})), 0<\alpha<\alpha_1$.

运用 Gronwall 引理[3,4],有鲁棒稳定性定理:

定理 设系统(1)的参数摄动满足关系式(2),如果通过选择观测器-控制器的参数 L 和 K,那末,能使闭环系统(10)渐近稳定的一个充分条件是不等式

$$\alpha > M(2\beta_1 + 2\beta_2\|K\| + \beta_3\|L\|) \tag{14}$$

成立.

证 (10)式的解为 $\bar{x}(t) = \varphi(t)\bar{x}_0 + \int_0^t \varphi(t-\tau)\Delta\overline{A}(\bar{x}(\tau))\mathrm{d}\tau. \quad (15)$

对(15)式两边取范数,得到

$$\|\bar{x}(t)\| \leqslant \|\varphi(t)\|\,\|\bar{x}_0\| + \int_0^t \|\varphi(t-\tau)\|\,\|\Delta\overline{A}(\bar{x}(\tau))\|\mathrm{d}\tau. \tag{16}$$

由(9)式可得

$$\begin{aligned}\|\Delta\overline{A}(\bar{x}(\tau))\| &= \left\|\begin{matrix}\Delta A(x) + \Delta B(u) \\ \Delta A(x) + \Delta B(u) - L\Delta C(x)\end{matrix}\right\| \\ &\leqslant 2\|\Delta A(x)\| + 2\|\Delta B(u)\| + \|L\|\,\|\Delta C(x)\| \\ &\leqslant 2\beta_1\|x(\tau)\| + 2\beta_2\|u(\tau)\| + \beta_3\|L\|\,\|x(\tau)\| \\ &\leqslant (2\beta_1 + 2\beta_2\|K\| + \beta_3\|L\|)\|\bar{x}(\tau)\|.\end{aligned} \tag{17}$$

由(13)、(16)和(17)式,得到

$$\|\bar{x}(t)\| \leqslant M\exp(-\alpha t)\|\bar{x}_0\| + \int_0^t M\exp[-\alpha(t-\tau)](2\beta_1 + 2\beta_2\|K\| + \beta_3\|L\|)\|\bar{x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau,$$

或

$$\|\bar{x}(t)\|\exp(\alpha t) \leqslant M\|\bar{x}_0\| + \int_0^t M(2\beta_1 + 2\beta_2\|K\| + \beta_3\|L\|)\exp(\alpha t)\|\bar{x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

运用 Gronwall 引理得到

$$\|\bar{x}(t)\|\exp(\alpha t) \leqslant M\|\bar{x}_0\|\exp[M(\beta_1 + \beta_2\|K\| + \beta_3\|L\|)t],$$

或

$$\|\bar{x}(t)\| \leqslant M\|\bar{x}_0\|\exp[-\alpha + M(\beta_1 + \beta_2\|K\| + \beta_3\|L\|)]t.$$

而

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &= \|\overline{C}\bar{x} + \Delta\overline{C}(\bar{x})\| \\ &\leqslant \|\overline{C}\|\,\|\bar{x}(t)\| + \|\Delta C(x)\| \\ &\leqslant [\|C\| + \beta_3]M\|\bar{x}_0\|\exp[-\alpha + M(2\beta_1 + 2\beta_2\|K\| + \beta_3\|L\|)]t.\end{aligned}$$

由于 $(\|C\| + \beta_3)M\|\bar{x}_0\|$ 有界,设

$$\alpha > M(2\beta_1 + \beta_2 \| K \| + \beta_3 \| L \|),$$

必有 $t \to +\infty$ 时，$\| y(t) \| \to 0$.

注 不等式(14)只是一充分条件，也就是说：即使(14)式不成立，我们还不能说鲁棒观测器-控制器不存在.

4 数字仿真

例 1 研究下列多变量系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{18}$$

假设这个系统具有下列参数摄动

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0.03\sin 2\pi t \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.04e^{-t} & 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{19}$$

试设计一个鲁棒观测器-控制器使参数摄动的系统(19)稳定.

解 对于本系统，$\beta_1 = 0.03$，$\beta_2 = 0.04$，$\beta_3 = 0$.

我们取 $\overline{A}$ 的特征值为 $-2, -3, -4, -5$，故 $\alpha = 2$. 观测器-控制器的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \\ u = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x_1. \end{cases} \tag{20}$$

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\| \varphi(t) \| \leqslant Me^{-\alpha t} = 3e^{-2t}, \quad t \geqslant 0,$$

$$\| K \| = 3, \quad \| L \| = 4.$$

不等式(14)成立，故(20)式是一个能使系统(19)稳定的鲁棒观测器-控制器. 仿真曲线 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 如图 1 所示($\tilde{x}_0 = [1 \quad -1 \quad -0.3 \quad 0.3]^T$).

例 2 试设计一个鲁棒观测器-控制器使下列系统稳定

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} f_1 \sqrt{|x_1 x_2|} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_2 \sin u \\ 0 \end{bmatrix}, \\ y = [0 \quad 1] x. \end{cases} \tag{21}$$

解 该系统 $\beta_1 = f_1$，$\beta_2 = f_2$，$\beta_3 = 0$. 取 $\overline{A}$ 的特征值为 $-1, -2, -3, -4$，故 $\alpha = 1$. 观测器-控制器的动态方程为($f_1 \leqslant f_{10}$，$f_2 \leqslant f_{20}$)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ u = [-2 \quad -1] x_1. \end{cases} \tag{22}$$

$$L=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix},\quad K=[2\quad 1].$$

经检验不等式(14)成立,故(22)式是一个能使系统(21)稳定的鲁棒观测器-控制器.仿真曲线$y(t)$如图2所示($\bar{x}_0=[1\ \ -1\ \ -0.3\ \ 0.3]^T,f_1=0.1,f_2=0.03$),如图3所示$\bar{x}_0=[1\ \ -1\ \ -0.3\ \ 0.3]^T,f_1=0.2,f_2=0.05$).

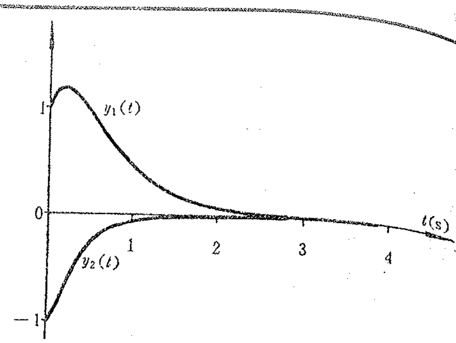

图 1 例1仿真曲线$y_1(t)$和$y_2(t)$

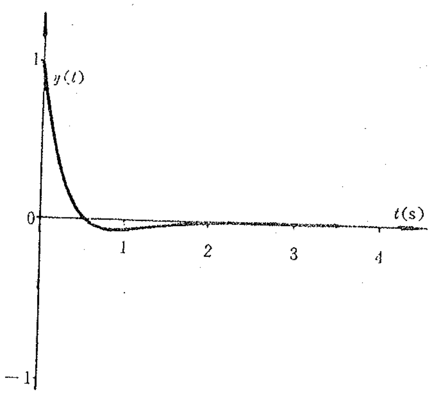

图 2 例2仿真曲线$y(t)$($f_1=0.2,f_2=0.03$)

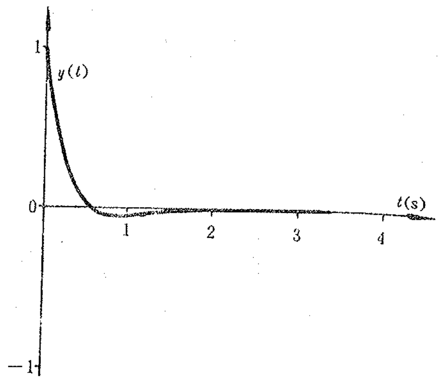

图 3 例2仿真曲线$y(t)$($f_1=0.2,f_2=0.05$)

5 结束语

本文介绍了多变量系统参数摄动下,鲁棒观测器-控制器的设计方法.并运用Gronwall引理导出了带观测器-控制器闭环系统的鲁棒稳定条件,这为选择观测器-控制器的参数满足鲁棒稳定要求,大大地简化了设计工作.

参考文献

[1] Chen, B. S. and Wong, C. C.. Robust Linear Controller Design: Time Domain Approach. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32(2):161—164

[2] 韩京清等.线性系统理论代数基础.沈阳:辽宁科学技术出版社,1985

[3] Hille, E.. Lecture on Ordinary Differential Equations. London: Addison-Wesley, 1969

[4] Kreyszig, E.. Introductory Function Analysis with Applications. New York: Wiley, 1978

The Design of Robust Observer-Controller

DING Feng and XIE Xinmin

(Department of Automation, Tsinghua University • Beijing, 100084, PRC)

Abstract: In this paper, the design method of robust observer-controller for multivariable systems with nonlinear time-varying parameter perturbations is introduced, and the robust stable condition of the closed-loop systems with observer-controller are derived.

Key words: miltivariable system; observer; controller; robustness

本文作者简介

丁　锋　1963年生. 1984年于湖北工学院毕业后在湖北制药厂从事电力系统试验及继电保护工作. 1988年在清华大学自动化系攻读硕士研究生. 1990年获硕士学位并继续攻读博士学位. 研究兴趣为系统辨识, 线性系统和自适应控制. 目前的主攻方向为时变系统辨识与适应控制及其应用.

谢新民　1934年生. 1956年南京工学院毕业. 1958年清华大学研究生毕业. 现任清华大学自动化系副教授. 从事教学、科研和指导研究生工作. 研究兴趣为过程控制, 系统辨识和自适应控制. 目前研究领域为自适应控制理论在化工, 电站和冶金工业中的应用.

评《应用实分析基础》

现代科学技术日新月异、飞速发展，各学科本身对数学提出了越来越高的要求. 确实，可以毫不夸张地说，数学在系统与控制科学的发展中过去、现在和将来起着关键的作用，这样就要求研究人员具有坚实的数学基础，尤其应具有抽象思维能力和逻辑推理能力. 50、60年代工科院校的高等数学显然已远远适应不了这种需要.

正是为了适应时代的这种需要，周鸿兴教授作了成功的尝试，他编著的《应用实分析基础》一书，以一般工科院校高等数学教材中的初等微积分为基础，从应用的角度以严格的逻辑推理方法叙述实分析的基础理论，从而在使读者的初等微积分知识得到理论上的提高和深化的同时，得到现代数学思想和技巧的基本训练. 这里所说的实分析指多元微积分与实变函数论，无疑这是数学基础中最基本的内容之一. 对于从事现代工程技术、科学研究，特别是从事系统与控制理论研究的人员，这些知识都是必不可少的.

全书共分五章. 第一章在建立严格的实数理论的基础上叙述 n 维欧几里得空间 R^n. 为了使读者从更高的观点理解空间 R^n，作者引入了更一般的无穷维线性空间、距离空间和赋范线性空间概念，并据此介绍 R^n 中的点集拓扑理论，包括点列极限、集合紧性等基本内容. 熟悉这种简洁的抽象表述对于掌握数学的本质至关重要.

第二章介绍 R^n 到 R^m 的函数（也称映射）的连续性和可微性，在引入高阶偏导数之后给出了函数的泰勒展开公式.

第三章涉及与应用密切相关的微分学中的一些问题，包括函数序列的收敛，函数空间 $C(\Omega)$，反函数与隐函数定理以及函数的极值问题. 有关 $C(\Omega)$ 中集合的紧性的 Ascoli-Arzela 定理在无穷维系统的研究中是极为重要的，并且有着广泛的应用. 反函数和隐函数定理在非线性分析中则起着基本重要的作用. 本章后两节讨论一般极值的充分必要条件以及拉格朗日乘子法，特别对于应用中大量出现的凸函数的极值问题作了相当透彻的分析.

第四章讲 Riemann 积分，采用 Darboux 和的方法叙述区间上一元及多元函数的积分理论后，进一步讨论了 Jordan 可测集上 Riemann 积分，并概述了有界变差函数及 Riemann-Stieltjes 积分.

最后一章即第五章介绍 Lebesgue 积分. 作者采用了比较直观的内外测度相等的方法定义可测集，采用 Lebesgue 和的方法定义 Lebesgue 积分，强调 Lebesgue 积分有着 Riemann 积分所没有的一些重要性质. 应用中经常遇到的函数序列平方收敛以及平方可积函数空间等也在本章作了介绍. 应该指出的是，本章的内容是现代分析的基本组成部分，熟悉和掌握 Lebesgue 积分理论对于从事理论研究、理解近代文献资料是必不可少的.

全书深入浅出，文笔流畅. 为了帮助读者巩固所学的知识，每节后都附有适量的习题. 因此本书非常适宜用作高等院校系统与控制科学有关专业的数学教学用书，同时也可作为相近专业师生以及工程技术人员的数学参考书.

（冯德兴）