第9卷第4期
1992年8月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 4
Aug., 1992

基于ARMAX模型的新型广义预测控制

金元郁
(抚顺石油学院自动化所, 113001)

摘要: 本文中提出了基于ARMAX模型的新型广义预测控制, 揭示了其控制策略与模型算法控制(MAC)之间的内在联系.

关键词: 丢番方程; 预测模型; 广义预测控制

1 引　言

80年代, Clarke等人采用CARIMA模型, 从丢番(Diophantine)方程出发, 推导出广义预测控制算法[1]. 作者通过新的途径, 改进了其算法[2]. 袁震东老师采用ARMAX模型, 也用丢番方程, 提出了广义预测控制[3]. 本文中把文[2]的结论及算法直接推广到ARMAX模型的预测控制算法中, 并且揭示了本文提出的算法与模型算法控制(MAC)之间的内在联系.

2 预测模型

本文中提出的预测模型只给出结论, 其证明可参照文[2]进行.

被控对象的ARMAX模型可以表示成

$$y(t+1)=\sum_{i=1}^{n}A_{1,i}y(t+1-i)+\sum_{i=0}^{m}B_{1,i}u(t-d-i)+\sum_{i=0}^{r}C_{1,i}e(t+1-i). \tag{2.1}$$

其中 $y(\cdot)$、$u(\cdot)$和 $e(\cdot)$分别表示输出、输入和白噪声, d 为时滞系数, $d+1$ 为时滞.

由式(2.1)确定的 t 时刻的 k 步最小方差输出预测值 $y(t+k/t)$, $k=1,2,3,\cdots$, 可用以下的统一形式表示

$$\begin{aligned}y(t+k/t)=&\sum_{i=1}^{n}A_{k,i}y(t+1-i)+\sum_{i=1}^{m}B_{k,i}u(t-d-i)\\&+\sum_{i=1}^{r}C_{k,i}e(t+1-i)+\sum_{i=0}^{k-1}B_{k-i,0}u(t-d+i).\end{aligned} \tag{2.2}$$

$k=1$ 时, 式(2.2)直接由式(2.1)得出. 当 $k>1$ 时, 式(2.2)中的未知参数由以下的递推算式(2.3)或(2.4)得出

$$A_{k,i}=A_{1,i+k-1}+\sum_{j=1}^{k_1}A_{1,j}A_{k-j,i},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$B_{k,i}=B_{1,i+k-1}+\sum_{j=1}^{k_1}A_{1,j}B_{k-j,i},\quad i=0,1,\cdots,m,$$

本文于1990年11月20日收到. 1991年9月17日收到修改稿.

$$C_{k,i}=C_{1,i+k-1}+\sum_{j=1}^{k_1}A_{1,j}C_{k-j,i},\quad i=0,1,\cdots,r. \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
&k_1=\min\{k-1,n\},\\
&A_{k,i}=A_{k-1,i+1}+A_{k-1,1}A_{1,i},\quad i=1,2,\cdots,n,\\
&B_{k,i}=B_{k-1,i+1}+A_{k-1,1}B_{1,i},\quad i=0,1,\cdots,m,\\
&C_{k,i}=C_{k-1,i+1}+A_{k-1,1}C_{1,i},\quad i=0,1,\cdots,r.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

3 目标函数、参考轨迹与控制算法

在 t 时刻及 t 时刻后的输入恒等于 $u(t-1)$ 的条件下，在 t 时刻由式(2.2)预测到的 $t+k$ 时刻的输出定义为 $y_m(t+k)$，则有

$$\begin{aligned}
y_m(t+k)=&\sum_{i=1}^{n}A_{k,i}y(t+1-i)+\sum_{i=1}^{m}B_{k,i}u(t-d-i)\\
&+\sum_{i=1}^{r}C_{k,i}e(t+1-i)+\sum_{i=0}^{k-1}B_{k-i,0}u(t-d+i/t).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中

$$u(t+i/t)\triangleq\begin{cases}u(t-1), & \text{当 } i\geqslant 0 \text{ 时},\\ u(t+i), & \text{当 } i<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

这样，$y_m(t+k)$完全由已知信息确定. 比较式(2.2)和式(3.1)得

$$y(t+k/t)=y_m(t+k),\quad \text{当 } k<d+1 \text{ 时}. \tag{3.2}$$

$$y(t+k/t)=y_m(t+k)+\sum_{i=d}^{k-1}B_{k-i,0}\Delta u(t-d+i),\quad \text{当 } k\geqslant d+1 \text{ 时}. \tag{3.3}$$

其中

$$\Delta u(t+i)\triangleq u(t+i)-u(t-1),\quad i=0,1,2,\cdots.$$

从式(3.2)和式(3.3)中可知：t 时刻的输入对于 $y(t+1),y(t+2),\cdots,y(t+d)$无控制能力，只有对于 $y(t+d+1),y(t+d+2),\cdots,y(t+p)\cdots$有控制能力(定义 p 为预测长度，此时应满足 $p>d+1$).

式(3.3)得

$$y=y_m+G\tilde{u}. \tag{3.4}$$

其中

$$\begin{aligned}
&y=(y(t+d+1/t)\quad y(t+d+2/t)\ \cdots\ y(t+p/t))^{\mathrm T},\\
&y_m=(y_m(t+d+1)\quad y_m(t+d+2)\ \cdots\ y_m(t+p))^{\mathrm T},\\
&\tilde{u}=(\Delta u(t)\quad \Delta u(t+1)\ \cdots\ \Delta u(t+p-d-1))^{\mathrm T},
\end{aligned}$$

$$G=\begin{bmatrix}B_{1,0} & 0 & \cdots & 0\\ B_{2,0} & B_{1,0} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ B_{p-d,0} & B_{p-d-1,0} & \cdots & B_{1,0}\end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

另外，设定参考轨迹为

$$y_r(t+d)=y_m(t+d)\quad 或\quad y_r(t+d)=y(t),$$

$$y_r(t+d+j)=\alpha y_r(t+d+j-1)+(1-\alpha)s,\quad j=1,2,\cdots,p-d,$$
$$y_r=(y_r(t+d+1)\quad y_r(t+d+2)\cdots y_r(t+p))^{\mathrm{T}}. \tag{3.6}$$
其中 α 为柔化系数，s 为设定值，y_r 为参考轨迹向量.

极小化性能指标

$$J=\min\{(y_r-y)^{\mathrm{T}}(y_r-y)+\beta^2\tilde{u}^{\mathrm{T}}\tilde{u}\}. \tag{3.7}$$
其中 β^2 为加权项，则由最小二乘法得

$$\tilde{u}=(G^{\mathrm{T}}G+\beta^2I)^{-1}G^{\mathrm{T}}(y_r-y_m). \tag{3.8}$$
又设 g^{T} 为 $(G^{\mathrm{T}}G+\beta^2I)^{-1}G^{\mathrm{T}}$ 的前 1 行组成的矩阵，则 t 时刻的输入(控制)，由下式得出

$$u(t)=u(t-1)+g^{\mathrm{T}}(y_r-y_m). \tag{3.9}$$
式(3.1)中的 $y_m(t+k)$ 也可以由以下的算式得出(证明略，可参照文[2]证明).

$$y_m(t+k)=\sum_{j=1}^{n}A_{1,j}y_m(t+k-j)+\sum_{j=0}^{m}B_{1,j}u(t+k-1-d-j/t)$$
$$+\sum_{j=0}^{r}C_{1,j}e(t+k-j/t),\quad k=1,2,\cdots,p. \tag{3.10}$$
其中

$$u(t+i/t)\triangleq\begin{cases}u(t-1), & 当\ i\geqslant 0\ 时,\\ u(t+i), & 当\ i<0\ 时,\end{cases}$$
$$e(t+i/t)\triangleq\begin{cases}0, & 当\ i>0\ 时,\\ e(t+i), & 当\ i\leqslant 0\ 时,\end{cases}$$
$$y_m(t+i)\triangleq y(t+i),\quad 当\ i\leqslant 0\ 时.$$

前面提出的控制算法可总结如下：

第 1 步：若搞自适应控制，则在线辨识式(2.1)中的未知参数，否则省略这一步.

第 2 步：由式(3.10)递推计算 $y_m(t+k)$，$k=1,2,\cdots,p$.

第 3 步：计算参考轨迹.

第 4 步：式(2.3)第 2 式中令 $i=0$，则有

$$B_{k,0}=B_{1,k-1}+\sum_{j=1}^{k_1}A_{1,j}B_{k-j,0},\quad k=2,3,\cdots,p-d. \tag{3.11}$$
其中 $k_1=\min\{k-1,n\}$；$B_{1,k-1}=0$，当 $k-1>m$ 时. 由式(3.11)计算 $B_{k,0}$，也可以用式(2.4)的前两个算式计算 $B_{k,0}$.

第 5 步：由式(3.9)计算 $u(t)$，返回到第 1 步.

4 与模型算法控制(MAC)的关系

为了揭示本文中提出的控制算法同 MAC 之间的关系，首先扼要地叙述 MAC[4].

设脉冲响应模型为

$$y(t)=\sum_{j=0}^{N}h(j+1)u(t-j-1), \tag{4.1}$$
则在假设 t 时刻及以后的输入(控制)恒等于 $u(t-1)$ 的条件下，在 t 时刻得出的输出预测值为

$$y_{im}=\begin{bmatrix} y_{im}(t+1)\\ y_{im}(t+2)\\ \vdots \\ y_{im}(t+p)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} u(t-1) & u(t-1) & u(t-2) & u(t-3) & \cdots & u(t-N+1)\\ u(t-1) & u(t-1) & u(t-1) & u(t-2) & \cdots & u(t-N+2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(t-1) & u(t-1) & u(t-1) & u(t-1) & \cdots & u(t-N+p)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h(1)\\ h(2)\\ \vdots \\ h(N)\end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

t 时刻的输入(控制)为

$$u(t)=u(t-1)+h^{\mathrm{T}}(y_r-y_{im}). \quad (4.3)$$

其中 h^{T} 为 $(H^{\mathrm{T}}H+\beta^2I)^{-1}H^{\mathrm{T}}$ 的第 1 行元素组成的行向量

$$H=\begin{bmatrix} h(1) & 0 & \cdots & 0\\ h(2) & h(1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ h(p) & h(p-1) & \cdots & h(1)\end{bmatrix},$$

β^2 及 y_r 的定义与本文第 2 节的定义相同.

由于 MAC 不易采用自适应策略，在实际控制时，根据 t 时刻测量到的实际输出值及模型的预测值之差来调整 y_{im} 值. 此法可应用于本文中提出的控制算法中，但由于本文中提出的控制算法，容易引入自适应控制算法，一般不必采用此法. 为了便于比较，式(4.3)中仍采用原来的 y_{im}. 叙述完 MAC.

时滞系数 $d=0$，且无噪声时，式(2.1)可表示为

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}A_{1,i}y(t-i)+\sum_{i=0}^{m}B_{1,i}u(t-1-i). \quad (4.4)$$

式(4.4)可以表示成如下的脉冲响应模型

$$y(t)=\sum_{j=0}^{\infty}h(j+1)u(t-j-1). \quad (4.5)$$

命题 1　式(4.5)中的脉冲响应序列 $h(i)$ 同式(3.5)中的矩阵元素 $B_{i,0}$ 相等，即 $h(i)=B_{i,0}$.

证　由式(4.4)得

$$y(t+k)=\sum_{i=1}^{n}A_{1,i}y(t+k-i)+\sum_{i=0}^{m}B_{1,i}u(t+k-i-1),\quad k=1,2,\cdots. \quad (4.6)$$

类似于用式(4.5)表示式(4.4)，式(4.6)可以表示成

$$y(t+k)=\sum_{j=0}^{\infty}h(j+1)u(t+k-j-1)$$

$$=\sum_{j=k}^{\infty}h(j+1)u(t+k-j-1)+\sum_{j=0}^{k-1}h(j+1)u(t+k-j-1). \quad (4.7)$$

设 $j=k-i-1$，则有

$$\sum_{j=0}^{k-1}h(j+1)u(t+k-j-1)=\sum_{i=0}^{k-1}h(k-i)u(t+i).$$

上式代入到式(4.7)得

$$y(t+k)=\sum_{j=k}^{\infty}h(j+1)u(t+k-j-1)+\sum_{i=0}^{k-1}h(k-i)u(t+i). \tag{4.8}$$

另外，由式(2.2)，得无噪声且 $d=0$ 时的预测输出值为

$$y(t+k)=\sum_{i=1}^{n}A_{k,i}y(t+1-i)+\sum_{i=1}^{m}B_{k,i}u(t-i)+\sum_{i=0}^{k-1}B_{k-i,0}u(t+i). \tag{4.9}$$

利用式(4.5)，式(4.9)可表示成

$$y(t+k)=\sum_{i=1}^{n}A_{k,i}\sum_{j=0}^{\infty}h(j+1)u(t-i-j)$$
$$+\sum_{i=1}^{m}B_{k,i}u(t-i)+\sum_{i=0}^{k-1}B_{k-i,0}u(t+i). \tag{4.10}$$

注意到式(4.8)等号右侧的第一项和式(4.10)等号右侧的前两项是 $u(t-1)$, $u(t-2)$, $u(t-3)$, …的线性组合，式(4.8)和式(4.10)的最后一项是 $u(t)$, $u(t+1)$, …, $u(t+k+1)$的线性组合. 而且，当 $k\geqslant t$ 时，$u(k)$具有取值的随意性，所以比较其系数得 $h(i)=B_{i,0}$. 证毕.

命题 2 如果在本文中提出的控制算法和 MAC 中，分别采用模型(4.4)和(4.5)，则它们的控制结果完全相同.

证 y_m 和 y_{im}都是在 t 时刻及 t 时刻后的输入值恒等于 $u(t-1)$的条件下，在 t 时刻由模型得到的预测值向量，若 MAC 中用无穷多的脉冲响应序列表示 ARMAX 模型，则 y_m 和 y_{im}相同. 另外由命题 1 可知矩阵 H 和 G 相同. 由此得式(3.9)和式(4.3)相同，故得证.

作者认为命题 2 是一个重要结论. 这是因为

1° 基于脉冲响应(或阶跃响应)模型的预测控制(MAC、DMC 等)具有容易获得模型，算法简单，理论分析相对容易等优点. 尽管目前其理论分析还落后于实际应用，但还是取得了不少结果[5]. 但其模型只能表示被控对象是稳定的系统[6]，是近似的、浪费的模型[7]，作者已提出节省模型的方法[8,9].

2° 基于参数(非脉冲响应模型)的预测控制(其中较完善的是 Clarke 的 GPC)，“由于优化的启发性和算法的复杂性，对于这一算法的理论分析研究十分困难”[10]. 然而，这种算法所采用的模型是节省的，而模型的节省问题或者截短(Truncation)的问题在实际控制中是非常重要的. 另外，这种模型可以表示不稳定或带有积分作用的被控对象[7].

3° 揭示不同算法之间的内在联系，对于理论分析和实际应用都带来方便. 比如，在 MAC 中已经取得的稳定性和鲁棒性等方面的结论[6]，原则上都适用于本文中提出的控制算法.

5 结　语

仿真结果进一步表明：本文中提出的算法具有编程序容易，所占计算机内存小，当预测长度、模型的阶次等条件改变时程序的改动量极小，控制质量好，鲁棒性强等优点. 因篇幅所限，本文中略去了仿真结果.

参 考 文 献

[1] Clarke, D. W., et al. Generalized Predictive Control —Part 1. The Basic Algorithm, Automatica, 1987, 23(2):137—148

[2] 金元郁,顾兴源.改进的广义预测控制算法.信息与控制,1990,19(2):8—14

[3] 袁震东.基于ARMAX模型的广义预测控制.控制理论与应用,1988,5(2):12—17

[4] De Keyser, R. M. C., et al. A Comparative Study of Self-Adaptive Long-Range Predictive Control Methods. Automatica, 1988, 24(2):149—163

[5] Rouhani, R. and Mehra, R. K.. Model Algorithmic Control(MAC). Basic Theoretical Properties, Automatica, 1982, 18(4):401—414

[6] Bruijn, P. M., et al. Model Algorithmic Control Using Impulse Response Models, Journal A, 1984, 25(2):69—74

[7] Clarke, D. W.. Generalized Predictive Control: A Robust Self-Tuning Algorithm. ACC, 1987, 990—995

[8] 金元郁,顾兴源.一种脉冲响应模型的辨识方法及其在DMC中的应用.化工自动化及仪表,1990,17(5):21—25

[9] 金元郁,庄兴稼,顾兴源.改进的MAC在电加热器控制中的应用.炼油化工自动化,1990,115(5):28—31

[10] 席裕庚等.广义预测控制若干问题研究.第三届过程控制会议论文集,北京:清华大学,1989,1—8

A New Type of Generalized Predictive Control Based on ARMAX Model

JIN Yuanyu

(Research Centre of Automation Fushun Petroleum Institute • Fushun, 113001, PRC)

Abstract: In this paper, a new type of generalized predictive control based on ARMAX model is proposed. The internal relations between the control strategy and Model Algorithmic Control(MAC) are revealed.

Key words: diophantine equation; predictive model; generalized predictive control

本文作者简介

金元郁　1949年生.1982年在沈阳工业大学自动控制系获学士学位.1985年在哈尔滨工业大学自动控制系获硕士学位.1992年在东北工学院自动控制系获博士学位,现在抚顺石油学院自动化所工作,研究方向是预测控制.目前主要承担石油化工总公司所属企业的一些科研项目.