第9卷第4期
1992年8月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 9, No. 4
Aug., 1992

离散 H^∞ 模型匹配问题共轭化法处理*

张国峰　王广雄
(哈尔滨工业大学控制工程系，150006)

摘要：本文应用文献[2]中离散系统共轭化概念，去掉 $T_2^{-1}(z)$ 必须是反稳定的限制条件，解决了更一般的离散系统 H^∞ 模型匹配问题.

关键词：H^∞ 控制理论；离散系统；共轭化

1 引　言

H^∞ 控制理论近年来得到迅速发展. 1989 年 Kimura 提出共轭化方法处理连续系统 H^∞ 模型匹配问题[1]. 同年 KANG-ZHI LIU 等建立了离散系统共轭化概念[2]. 本文在其基础上解决了更一般情况下的离散系统 H^∞ 模型匹配问题.

2 离散 H^∞ 模型匹配问题

令 $RH^\infty_{m\times r}$ 表示 $m\times r$ 阶，有理的，真的，稳定的传递函数阵集合. $BH^\infty_{m\times r}$ 为 $RH^\infty_{m\times r}$ 的子集合且满足 $\|\cdot\|_\infty<1$. 离散 H^∞ 模型匹配问题阐述如下：给定 $T_1(z)\in RH^\infty_{m\times r}$，$T_2(z)\in RH^\infty_{m\times m}$，$T_2(z)\in RH^\infty_{r\times r}$，找到使集合

$$\Phi=\{\Phi(z)\in BH^\infty_{m\times r}:\Phi(z)=T_1(z)-T_2(z)Q(z)T_3(z),Q(z)\in RH^\infty_{m\times r}\}. \tag{2.1}$$

非空的充要条件，并给出 $\Phi(z)$ 的参数化形式.

假设 1　$T_2^{-1}(z)$，$T_3^{-1}(z)$ 存在且 $T_3^{-1}(z)$ 是反稳定的.

假设 2　$T_2^{-1}(z)$，$T_3^{-1}(z)$ 没有相同的极点.

3 $\Phi(z)$ 的参数化

定义如下符号

$$G(z)=D+C(zI-A)^{-1}B=\left[\begin{array}{c:c}A & B\\ \hdashline C & D\end{array}\right],$$

$$\widetilde{G}(z)=G^T(1/z),\quad G^*(z)=G^T(\bar{z}).$$

定义　如 $(m+r)\times(m+r)$ 阶矩阵 $G(z)$ 满足

$$G^*(z)JG(z)\leqslant J,\quad \forall\ |z|>1,$$

$$G^*(z)JG(z)=J,\quad \forall\ |z|=1.$$

其中
$$J=\begin{bmatrix}I_m & 0\\ 0 & -I_r\end{bmatrix}.$$

则称 $G(z)$ 为 J 无损失矩阵.

假设 3　A 和 A^{-T} 无相同特征值，且 A^{-1} 存在.

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于1990年11月22日收到. 1991年10月14日收到修改稿.

定义 使(3.1)式成立的 $F(z)$ 称为 (A,B) 的共轭化因子.

$$G(z)F(z)=\left[\begin{array}{c|c} A^{-T} & * \\ \hline * & * \end{array}\right]. \tag{3.1}$$

定理 1[2] (A,B) 的 J 无损失共轭化因子存在的充要条件是存在正定对称阵 P 满足 Lyapunov 方程

$$P=APA^{T}-BJB^{T}. \tag{3.2}$$

且 J 无损失共轭化因子为

$$F(z)=\left[\begin{array}{c|c} A^{-T} & P^{-1}BD_0 \\ \hline -JB^{T}A^{-T} & D_0 \end{array}\right]. \tag{3.3}$$

其中

$$J=D_0^{T}(J+B^{T}P^{-1}B)D_0. \tag{3.4}$$

定义

$$G_2(z)=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_3(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -T_2(z) & T_1(z) \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1}, \tag{3.5}$$

$$G_3(z)=\begin{bmatrix} I & T_1(z) \\ 0 & -T_3(z) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} T_2(z) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

$$N_2(z)=G_2(z)F(z),\quad N_3(z)=\widetilde{F}(z)G_3(z). \tag{3.7}$$

定理 2[2] 如 $N_2(z),N_3(z)$ 稳定,则由(2.1)式定义的 Φ 非空,并且

$$\Phi(z)=[f_{11}(z)S(z)+f_{12}(z)][f_{21}(z)S(z)+f_{22}(z)]^{-1},\quad S(z)\in \mathrm{BH}^{\infty}_{m\times r} \tag{3.8}$$

或

$$\Phi(z)=T_1(z)-T_2(z)Q(z)T_3(z).$$

$$Q(z)=[n_{11}(z)S(z)+n_{12}(z)][n_{21}(z)S(z)+n_{22}(z)]^{-1}, \tag{3.9}$$

$$Q(z)=[S(z)n'_{21}(z)+n'_{11}(z)]^{-1}[S(z)n'_{22}(z)+n'_{12}(z)],\quad S(z)\in \mathrm{BH}^{\infty}_{m\times r}. \tag{3.10}$$

其中

$$F(z)=\begin{bmatrix} f_{11}(z) & f_{12}(z) \\ f_{21}(z) & f_{22}(z) \end{bmatrix},\quad N_2(z)=\begin{bmatrix} n_{11}(z) & n_{12}(z) \\ n_{21}(z) & n_{22}(z) \end{bmatrix},\quad N_3(z)=\begin{bmatrix} n'_{11}(z) & n'_{12}(z) \\ n'_{21}(z) & n'_{22}(z) \end{bmatrix}.$$

下面寻找使 $N_2(z),N_3(z)$ 稳定的条件.

设

$$T_i=\left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array}\right],\quad i=1,2,3.$$

定义

$$L_2=B_2D_2^{-1},\quad \hat{A}_2=A_2-B_2D_2^{-1}C_2,$$

$$L_3^{T}=D_3^{-1}C_3,\quad \hat{A}_3=A_3-B_3D_3^{-1}C_3.$$

根据(3.5)式计算 $G_2(z)$,并用(3.11)式 T 阵对 $G_2(z)$ 进行相似变换后得

$$G_2(z)=\left[\begin{array}{cccc|cc} \hat{A}_{2u} & 0 & 0 & 0 & S_{21}L_2 & -S_{21}M_2 \\ 0 & \hat{A}_{2s} & 0 & 0 & S_{22}L_2 & -S_{22}M_2 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & B_3 \\ 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 & -B_1 \\ \hline D_2^{-1}C_2\hat{S}_{21} & D_2^{-1}C_2\hat{S}_{22} & 0 & -D_2^{-1}(C_2R_2+C_1) & -D_2^{-1} & D_2^{-1}D_1 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & D_3 \end{array}\right].$$

在假设 1 中我们去掉了 $T_2^{-1}(z)$ 是反稳定的限制,所以在此需利用 S_2 阵将 $\hat{A}_2$ 化为稳定 $\hat{A}_{2s}$ 和反稳定 $\hat{A}_{2u}$ 两部分,即

$$S_2\hat{A}_2S_2^{-1}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{2u} & 0\\ 0 & \hat{A}_{2s}\end{bmatrix},\quad S_2=\begin{bmatrix}S_{21}\\ S_{22}\end{bmatrix},\quad S_2^{-1}=[\hat{S}_{21}\quad \hat{S}_{22}],$$

$$T=\begin{bmatrix}0 & S_2 & S_2R_2\\ I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

且
$$R_2=\hat{A}_2^{-1}R_2A_1+\hat{A}_2^{-1}L_2C_1,\quad M_2=R_2B_1+L_2D_1,$$

又 $N_3(z)$ 稳定等价于 $\widetilde{N}_3(z)=\widetilde{G}_3(z)F(z)$ 反稳定，计算 $\widetilde{G}_3(z)$ 有

$$\widetilde{G}_3(z)=\left[\begin{array}{ccc:cc}\hat{A}_3^{-T} & 0 & 0 & \hat{A}_3^{-T}M_3 & -\hat{A}_3^{-T}L_3\\ 0 & A_2^{-T} & 0 & A_2^{-T}C_2^{T} & 0\\ 0 & 0 & A_1^{-T} & A_1^{-T}C_1^{T} & 0\\ \hdashline * & * & * & * & *\end{array}\right],$$

$$R_3=A_1R_3\hat{A}_3^{-1}+B_1L_3^{T}\hat{A}_3^{-1},\quad M_3=C_1R_3+D_1L_3^{T}.$$

可见，为使 $N_2(z),N_3(z)$ 稳定，$F(z)$ 应是(3.12)式的 J 无损失共轭化因子.

$$\left(\begin{bmatrix}\hat{A}_{2u} & 0\\ 0 & \hat{A}_3^{-T}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}S_{21}L_2 & -S_{21}M_2\\ \hat{A}_3^{-T}M_3 & -\hat{A}_3^{-T}L_3\end{bmatrix}\right). \tag{3.12}$$

由定理 1，如 Lyapunov 方程(3.13)有正定解 P，则 J 无损失共轭化因子由(3.14)式给出，即

$$P=\begin{bmatrix}\hat{A}_{2u} & 0\\ 0 & \hat{A}_3^{-T}\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}\hat{A}_{2u}^{T} & 0\\ 0 & \hat{A}_3^{-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}S_{21}L_2 & -S_{21}M_2\\ \hat{A}_3^{-T}M_3 & -\hat{A}_3^{-T}L_3\end{bmatrix}J\begin{bmatrix}S_{21}L_2 & -S_{21}M_2\\ \hat{A}_3^{-T}M_3 & -\hat{A}_3^{-T}L_3\end{bmatrix}^{T}, \tag{3.13}$$

$$F(z)=\left[\begin{array}{cc:c}\hat{A}_{2u}^{-T} & 0 & \multirow{2}{*}{$P^{-1}\begin{bmatrix}S_{21}L_2 & -S_{21}M_2\\ \hat{A}_3^{-T}M_3 & -\hat{A}_3^{-T}L_3\end{bmatrix}D_0$}\\ 0 & \hat{A}_3 & \\ \hdashline -L_2^{T}S_{21}^{T}\hat{A}_{2u}^{-T} & -M_3^{T} & \multirow{2}{*}{D_0}\\ -M_2^{T}S_{21}^{T}\hat{A}_{2u}^{-T} & -L_3^{T} & \end{array}\right]. \tag{3.14}$$

设 $P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12}^{T} & P_{22}\end{bmatrix}$ 很容易证得下面结果.

定理 3　方程(3.13)中 P_{12} 满足

$$\hat{S}_{21}P_{12}=R_2R_3. \tag{3.15}$$

定理 4　计算 $N_2(z),N_3(z)$ 结果为

$$N_2(z)=\left[\begin{array}{cccc:c}\hat{A}_{2u}^{-T} & 0 & 0 & 0 & \multirow{4}{*}{$\begin{bmatrix}B_{51} & B_{52}\\ -B_{61} & B_3-B_{62}\\ -R_3B_{61} & -(B_1+R_3B_{62})\\ S_{22}L_2 & -S_{22}M_2\end{bmatrix}D_0$}\\ -B_3M_2^{T}S_{21}^{T}\hat{A}_{2u}^{-T} & A_3 & 0 & 0 & \\ B_1M_2^{T}S_{21}^{T}\hat{A}_{2u}^{-T} & 0 & A_1 & 0 & \\ S_{22}(M_2M_2^{T}-L_2L_2^{T})S_{21}^{T}\hat{A}_{2u}^{T} & 0 & 0 & \hat{A}_{2s} & \\ \hdashline C_{11} & 0 & -D_2^{-1}(C_2R_2+C_1) & D_2^{-1}C_2\hat{S}_{22} & \multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix}-D_2^{-1} & D_2^{-1}D_1\\ 0 & D_3\end{bmatrix}D_0$}\\ C_{12} & C_3 & 0 & 0 & \end{array}\right].$$

其中
$$\begin{bmatrix}C_{11}\\ C_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_2^{-1}(C_2\hat{S}_{21}P_{11}+L_2^{T}S_{21}\hat{A}_{2u}^{-T}-D_1M_2^{T}S_{21}^{T}\hat{A}_{2u}^{-T})\\ -D_3M_2^{T}S_{21}^{T}\hat{A}_{2u}^{-T}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}B_{51} & B_{52}\\ B_{61} & B_{62}\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}S_{21}L_2 & -S_{21}M_2\\ \hat{A}_3^{-T}M_3 & -\hat{A}_3^{-T}L_3\end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

$$N_3(z)=\left[\begin{array}{ccc:cc}\hat{A}_3^{-T} & \hat{A}_3^{-T}M_3C_2 & \hat{A}_3^{-T}M_3C_1 & \hat{A}_3^{-T}M_3D_2 & (\hat{A}_3^{-T}M_3D_1-\hat{A}_3^{-T}L_3-P_{22}B_3)D_3^{-1}\\ 0 & A_2 & 0 & B_2 & 0\\ 0 & 0 & A_1 & 0 & (B_1+R_3B_3)D_3^{-1}\\ \hdashline \begin{matrix}\tilde{C}_{12}\\ \tilde{C}_{22}\end{matrix} & \tilde{D}_0\begin{bmatrix}C_2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tilde{C}_{11}\\ \tilde{C}_{21}\end{bmatrix} & \tilde{D}_0\begin{bmatrix}C_1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tilde{C}_{11}\\ \tilde{C}_{21}\end{bmatrix}R_2 & \multicolumn{2}{c}{\tilde{D}_0\begin{bmatrix}D_2 & D_1D_3^{-1}\\ 0 & -D_3^{-1}\end{bmatrix}}\end{array}\right].$$

其中

$$\begin{bmatrix}\tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12}\\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22}\end{bmatrix}=D_0^T\begin{bmatrix}L_2 & -M_2\\ \hat{A}_3^{-T}M_3 & -\hat{A}_3^{-T}L_3\end{bmatrix}^T P^{-1}\begin{bmatrix}\hat{A}_2 & 0\\ 0 & \hat{A}_3^{-1}\end{bmatrix},\quad \tilde{D}_0=JD_0^{-1}J.$$

证　$N_2(z)$只需根据(3.7)式计算$N_2(z)$，然后用一合适的可逆矩阵进行相似变换，变换运算过程中利用(3.15)，(3.16)式及$[P_{11}\quad P_{12}]P^{-1}=[I\quad 0]$，最后消去不可控及不可观部分即可得证．类似可证$N_3(z)$．

定理 5　Φ是非空的充要条件是方程(3.13)的解P正定．且Φ的参数化形式见(3.8)式，$Q(z)$的参数化见(3.9)或(3.10)式．其中$F(z)$由(3.14)式给出，$N_2(z)$，$N_3(z)$由定理 4 给出．

4　结　　语

本文应用离散系统共轭化概念，去掉了文献[2]中$T_2^{-1}(z)$必须是反稳定的限制条件，讨论了更一般的离散系统 H$^\infty$模型匹配问题．

参 考 文 献

[1] KIMURA. H.. Conjugation, interpolation and model-matching in H$^\infty$. Int. J. control, 1989, 49(1): 267—307

[2] KANG-ZHI LIU(刘康志) and TSUTOMU MITA. Conjugation and H$^\infty$ control of discrete time systems. Int. J. Control, 1989, 50(4): 1435—1460

H$^\infty$ Discrete Model-Matching Problem with Conjugation

ZHANG Guofeng　and　WANG Guangxiong

(Department of Control Engineering, Haerbin Institute of Technology · Haerbin, 150006, PRC)

Abstract: Using the conjugation concept of the discrete-time system the authors propose a method which can eliminate the restriction that $T_2^{-1}(z)$ must be antistable which is required in [2] and can solve more general model-matching problem in discrete-time.

Key words: H$^\infty$ control theory; discrete-time system; conjugation

本文作者简介

张国峰　1963 年生．1984 年和 1987 年于哈尔滨工业大学控制工程系分别获工学学士和工学硕士学位．毕业后留校任教．现任讲师．在职博士生．目前主要研究方向是 H$_\infty$控制理论，计算机控制．

王广雄　1933 年生．教授，博士生导师．1957 年毕业于哈尔滨工业大学研究生班．主要研究方向是控制系统的设计理论，目前从事 H$_\infty$控制理论及其应用的研究．