第1卷 第2期
1984年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 1, No. 2
April, 1984

# 分布参数控制系统的镇定问题

王 康 宁

（中国科学院系统科学研究所）

**摘　　要**

本文讨论了具有两个观测器的弹性振动系统的镇定问题和具有两个反馈信号的带控制器的弹性振动系统的镇定问题。带两个观测器的弹性振动闭环系统较具有一个观测器的弹性振动闭环系统有更好的稳定性能。具有两个反馈信号的带控制器的弹性振动闭环系统较具有一个反馈信号的带控制器的弹性振动闭环系统有更好的稳定性能。

## 一、具有两个观测器的弹性振动系统的镇定问题

考察在Hilbert空间 $H$ 中的用2阶发展方程描述的控制系统

$$\frac{d^2y}{dt^2}+Ay=b_1u_1(t)+b_2u_2(t), \tag{1.1}$$

$$y(0)=y_0, \qquad \dot{y}(0)=y_1, \tag{1.2}$$

在方程（1.1）中，$A$ 是空间 $H$ 中的自伴正定算子，$b_i\in H(i=1,2)$ 是非零元，$\dot{y}=\frac{d}{dt}y(t)$ 表示在空间 $H$ 中取值的矢值函数的导数，$u_i(t)(i=1,2)$ 是控制量数值函数。

设 $g_i\in H(i=1,2)$ 是非零元，$P_i(i=1,2)$ 是空间 $H$ 中的线性算子。

考虑反馈控制律：

$$u_i(t)=-\langle P_i\frac{dy}{dt},\ g_i\rangle,\ (i=1,2). \tag{1.3}$$

定义算子：

$$G_iy=\langle P_iy,\ g_i\rangle b_i,\ (i=1,2),\ \forall y\in D(P_i).$$

用反馈控制（1.3）代入系统（1.1）后得闭环系统：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+G_1\frac{dy}{dt}+G_2\frac{dy}{dt}+Ay=0. \tag{1.4}$$

本文于1982年12月21日收到。

相应于方程（1.4）的本征方程，考虑二次本征值问题

$$Ay+\lambda G_1 y+\lambda G_2 y+\lambda^2 y=0. \tag{1.5}$$

令

$$A_0=\begin{pmatrix} 0 & A^{\frac{1}{2}} \\ -A^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix},\quad T_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -G_1 \end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -G_2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varphi}=\begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}}y \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

如果 $y\neq 0$，$(\lambda,y)$是方程（1.5）的解，则（$\lambda,\boldsymbol{\varphi}$)满足方程：

$$(A_0+T_1+T_2)\boldsymbol{\varphi}=\lambda\boldsymbol{\varphi}. \tag{1.6}$$

反之，$\boldsymbol{\varphi}=\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$，如果（$\lambda,\boldsymbol{\varphi}$)是算子 $A_0+T_1+T_2$的本征值和相应本征元，令

$\varphi_2'=\varphi_2/\lambda$，$=\boldsymbol{\varphi}\begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}}\ \varphi_2' \\ \lambda\ \varphi_2' \end{pmatrix}$，则$(\lambda,\varphi_2')$ 是方程（1.5）的解.

这就是说，二次本征值问题（1.5）与线性本征值问题（1.6）有相同的本征值.
令

$$\mathbf{P}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{g}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -b_2 \end{pmatrix},\quad A_1=A_0+T_1.$$

**引理 1** 设算子 $A_1$ 在空间 $H\times H$ 中仅有纯点谱的线性算子，$D(A^{\frac{1}{2}})\subseteq D(P_1)\cap D(P_2)$，$\lambda\overline{\in}\sigma_p(A_1)$，则 $\lambda\in\sigma_p(A_1+T_2)$必须且只须$\lambda$是方程

$$\langle \mathbf{P}R(\lambda;A_1)\mathbf{b}_2,\ \mathbf{g}_2\rangle=1 \tag{1.7}$$

的根。而且 $\boldsymbol{\psi}=R(\lambda;A_1)\mathbf{b}_2$ 是算子 $A_1+T_2$ 的属于本征值 $\lambda$ 的本征元.

证　设 $\lambda\in\sigma_p(A_1+T_2)$，$\boldsymbol{\psi}$是算子 $A_1+T_2$ 的相应于 $\lambda$ 的本征元，即是

$$A_1\boldsymbol{\psi}+T_2\boldsymbol{\psi}=\lambda\boldsymbol{\psi}. \tag{1.8}$$

但是

$$T_2\boldsymbol{\psi}=\begin{pmatrix} 0 \\ -\langle P_2\psi_2,g_2\rangle b_2 \end{pmatrix}=\langle \mathbf{P}_2\boldsymbol{\psi},\ \mathbf{g}_2\rangle \mathbf{b}_2,$$

由假设 $\lambda\overline{\in}\sigma_p(A_1)\Longleftrightarrow\lambda\in\rho(A_1)$，由（1.8）式得到

$$\boldsymbol{\psi}=\langle \mathbf{P}_2\boldsymbol{\psi},g_2\rangle R(\lambda;A_1)\mathbf{b}_2. \tag{1.9}$$

把（1.9）式的 $\boldsymbol{\psi}$ 的右端表达式代入右端的内积中 $\boldsymbol{\psi}$ 得到

$$\boldsymbol{\psi}=\langle \mathbf{P}_2\boldsymbol{\psi},\mathbf{g}_2\rangle\langle \mathbf{P}_2R(\lambda;A_1)\mathbf{b}_2,\mathbf{g}_2\rangle R(\lambda;A_1)\mathbf{b}_2=\langle \mathbf{P}_2R(\lambda;A_1)\mathbf{b}_2,\mathbf{g}_2\rangle\boldsymbol{\psi},$$

因为本征元 $\boldsymbol{\psi}\neq 0$，因此 $\lambda$ 是方程（1.7）的根，

反之，如果 $\lambda$ 是方程（1.7）的根，要证明 $\lambda$ 是算子 $A_1+T_2$ 的本征值，$\psi=R(\lambda;A_1)\mathbf{b}_2$ 是相应的本征元。事实上，

$$
\begin{aligned}
(A_1+T_2)\psi&=A_1\psi+T_2\psi=A_1R(\lambda;A_1)\mathbf{b}_2+T_2R(\lambda;A_1)\mathbf{b}_2\\
&=\lambda R(\lambda;A_1)\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_2+\langle \mathbf{P}R(\lambda;A_1)\mathbf{b}_2,\mathbf{g}_2\rangle\mathbf{b}_2\\
&=\lambda R(\lambda;A_1)\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_2=\lambda R(\lambda;A_1)\mathbf{b}_2=\lambda\psi.
\end{aligned}
$$

故 $\lambda\in\sigma_p(A_1+T_2)$。证毕。

$(A)$　假设 $A$ 是 $H$ 中的自伴正定离散算子，$A$ 的每一本征值是单重的。以 $\{\varphi_n\}_1^\infty$ 表示 $A$ 的本征元全体，并且在 $H$ 中形成规格化直交基。

$(B)$　假设 $P_1$ 和 $P_2$ 是 $H$ 中的闭稠定线性算子，$D(A^{\frac{1}{2}})\subset D(P_1)\cap D(P_2)$。

现在假定算子 $A$ 和 $P_1$ 满足条件$(A)$和$(B)$，再设 $g_1\in D(P_1^*)$ 或者 $b_1\in D(A^{1/2})$。令 $b_n^1=\langle\varphi_n,\ b_1\rangle$，$g_n^1=\langle p_1\varphi_n,g_1\rangle$。设 $\overline{b}_n^1\ g_n^1>0(n=1,2,\cdots)$，依〔1〕中的定理2的推论1，算子 $A_1=A_0+T_1$ 的每一本征值具有负实部。

按上述条件 $\overline{b_n^1}\ g_n^1>0(n=1,2,\cdots)$ 选定 $b_1$ 和 $g_1$ 之后，算子 $T_1$ 就已确定。$A_0$ 是离散算子，因此 $A_1=A_0+T_1$ 也是离散算子。让 $\{k_n\}_1^\infty$ 是算子 $A_1$ 的本征值全体，$\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_1^\infty$ 是相应本征元全体。由上面所述 $R_ek_n<0(n=1,2,\cdots)$。让 $\{\psi_n\}_1^\infty$ 是算子 $A_1^*$ 的相应于本征值 $\{\overline{k_n}\}_1^\infty$ 的本征元的全体，使得

$$
\langle\boldsymbol{\varphi}_i,\ \psi_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}.
$$

**引理 2**　如果算子 $A$ 和 $P_1$、$P_2$ 满足条件$(A)$和$(B)$。令 $g_n^2=\langle\mathbf{P}_2\boldsymbol{\varphi}_n,\ \mathbf{g}_2\rangle$，$b_n^2=\langle\psi_n,\mathbf{b}_2\rangle(n=1,2,\cdots)$。设 $g_n^2\neq0$，$b_n^2\neq0$，则 $\sigma_p(A_1)\cap\sigma_p(A_1+T_2)=\phi$（空集）

当　$g_2\in D(P_2^*)$，$P_2^*g_2=b_2$ 时，如果 $\sigma_p(A_1)\cap\sigma_p(A_1+T_2)=\phi$，则 $b_n^2=\ g_n^2\neq0$（$n=1,2,\cdots$）。

证　反设，如果有某一个 $k_n\in\sigma_p(A_1)\cap\sigma_p(A_1+T_2)$，那末仅有两种可能情况：

（1）　$(k_n,\varphi_n)$是算子 $A_1$ 的本征值和相应的本征元，也是算子 $A_1+T_2$ 的本征值和相应的本征元。

（2）　$(\overline{k_n},\psi_n)$是算子 $A_\lambda^*$ 的本征值和相应本征元，存在 $\mathbf{u}_n\in D(A_1)$ 使得 $(k_n,\mathbf{u}_n)$是算子 $A_1+T_2$ 的本征值和相应本征元。

第（1）种情形是

$$A_1\varphi_n=k_n\varphi_n,\quad A_1\varphi_n+T_2\varphi_n=k_n\varphi_n,$$

于是 $T_2\varphi_n=0$。即是 $\langle \mathbf{P}_2\varphi_n,\ \mathbf{g}_2\rangle=0$。这与定理的假设 $g_n^2\neq 0$ 矛盾。

第（2）种情形是

$$A_1^*\psi_n=\bar{k}_n\psi_n, \tag{1.10}$$

$$A_1\mathbf{u}_n+T_2\mathbf{u}_n=k_n\mathbf{u}_n, \tag{1.11}$$

用 $\mathbf{u}_n$ 对（1.10）式两端取内积得

$$\langle \mathbf{u}_n,\ A_1^*\psi_n\rangle=k_n\langle \mathbf{u}_n,\ \psi_n\rangle, \tag{1.12}$$

用 $\psi_n$ 对（1.11）式两端取内积得

$$\langle A_1\mathbf{u}_n,\ \psi_n\rangle+\langle T_2\mathbf{u}_n,\ \psi_n\rangle=k_n\langle \mathbf{u}_n,\ \psi_n\rangle. \tag{1.13}$$

从（1.12）和（1.13）式得

$$\langle T_2\mathbf{u}_n,\ \psi_n^2\rangle=0.$$

即是 $\langle P_2u_n^2,\ g_2\rangle\langle b_2,\ \psi_n^2\rangle=0$。由定理的条件 $b_n^2\neq 0$，因此 $\langle P_2u_n^2,\ g_2\rangle=0$。

这里 $\mathbf{u}_n=\begin{pmatrix} u_n^1\\ u_n^2\end{pmatrix}$。于是

$$T_2\mathbf{u}_n=\begin{pmatrix} 0\\ -\langle P_2u_n^2,\ g_2\rangle b_2\end{pmatrix}=0,$$

所以从（1.11）式得

$$A_1\mathbf{u}_n=k_n\mathbf{u}_n.$$

依[1]中的定理1，$A_1$ 的每一本征子空间是1维的。故 $\mathbf{u}_n=\varphi_n$。这归结为第（1）种情形，从而也得出矛盾。故 $\sigma_p(A_1)\cap\sigma_p(A_1+T_2)=\phi$。证毕。

令

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix},\quad \mathbf{g}_1=\begin{pmatrix} 0\\ g_1\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_1=\begin{pmatrix} 0\\ -b_1\end{pmatrix},$$

$$g_n^1=\langle \mathbf{P}_1\varphi_n,\ \mathbf{g}_1\rangle,\ b_n^1=\langle \psi_n,\ \mathbf{b}_1\rangle\ (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

**定理 1** 假设算子 $A$、$P_1$ 和 $P_2$ 满足条件（$A$）和（$B$），$g_i\in D(P_i^*)$ 或 $b_i\in D(A^{\frac{1}{2}})$（$i=1,\ 2$），$\bar{l}_n^i\,g_n^i<0$（$i=1,\ 2;\ n=1,\ 2,\ \cdots$），则每一 $\lambda\in\sigma_p(A_0+T_1+T_2)$ 具有负实部。并且存在至少一个 $\lambda\in\sigma_p(A_1+T_1+T_2)$，对某一个 $n_0\geq 1$ 使得 $R_e\lambda<R_e k_{n_0}$。

证　由定理的条件和前面的叙述知，算子 $A_1=A_0+T_1$ 的每一本征值 $k_n$（$n=1,\ 2,\ \cdots$）具有负实部。

任一 $\lambda\in\sigma_p(A_1+T_2)$，由引理2，$\lambda\bar{\in}\sigma_p(A_1)$，因为 $A_1$ 仅有纯点谱，因此 $\lambda\in$

$\rho(A_1)$。由引理1，$\lambda$是方程（1.7）的根。方程（1.7）可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{b}_n^2\ g_n^2}{\lambda-k_n}=1. \tag{1.14}$$

从方程（1.14）得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{b}_n^2\ g_n^2}{|\lambda-k_n|^2}(\bar{\lambda}-\bar{k}_n)=1. \tag{1.15}$$

令

$$\lambda=\lambda_1+i\lambda_2,\qquad k_n=k_n^1+ik_n^2.$$

则
$$\bar{\lambda}-\bar{k}_n=(\lambda_1-k_n^1)-i(\lambda_2-k_n^2).$$

因此从方程（1.15）得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{b}_n^2\ g_n^2}{|\lambda-k_n|^2}(\lambda_1-k_n^1)=1. \tag{1.16}$$

因为算子 $A_1=A_0+T_1$ 的每一本征值 $k_n$ 都具有负实部，$k_n^1=R_e k_n<0$（$n=1,2,\cdots$），由假设 $\bar{b}_n^2\ g_n^2<0$（$n=1,2,\cdots$），因此从方程（1.16）得到

$$\lambda_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{b}_n^2\ g_n^2}{|\lambda-k_n|^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{b}_n^2\ g_n^2\ k_n^1}{|\lambda-k_n|^2}>0.$$

故　$\lambda_1=R_e\lambda<0$。

再从方程（1.16）得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\bar{b}_n^2\ g_n^2}{|\lambda-k_n|^2}(k_n^1-\lambda_1)=1>0.$$

但是，$-\bar{b}_n^2\ g_n^2>0$（$n=1,2,\cdots$），因此存在至少一个 $n_0\geq1$ 使得 $k_{n_0}^1>\lambda_1$。证毕。

## 二、具有两个反馈信号的带控制器的弹性振动系统的镇定问题

设 $A$ 是Hilbert 空间 $H$ 中的自伴正定算子，$F$ 是 $n\times n$ 阶定常矩阵，$b$ 和 $g_i(i=1,$

2，3）是$H$中的非零元，$\mathbf{g}$和$\mathbf{k}_i$（$i=1,2,3$）是$n$维欧氏空间$\mathbf{R}^n$中的非零向量。考虑在$H$中的2阶发展方程和$\mathbf{R}^n$中的$n$阶方程的耦合方程所描述的闭环系统：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+Ay+\langle \mathbf{z},\ \mathbf{g}\rangle b=0,$$

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}=F\mathbf{z}+\mathbf{k}_1\left\langle\frac{d^2y}{dt^2},\ g_1\right\rangle+\mathbf{k}_2\left\langle P_2\frac{dy}{dt},\ g_2\right\rangle \tag{2.1}$$

$$+\mathbf{k}_3\langle P_3y,\ g_3\rangle, \tag{2.2}$$

$$y|_{t=0}=y_0,\qquad \dot{y}|_{t=0}=y_1,\qquad \mathbf{z}|_{t=0}=\mathbf{z}_0. \tag{2.3}$$

这里$H$和$\mathbf{R}^n$中的内积均用符号〈·，·〉表示不致发生混淆，$y(t)$是在$H$中取值的矢值函数，$\dot{y}$和$\ddot{y}$表示矢值函数$y(t)$的1阶和2阶导数，$\mathbf{z}(t)$表示在$\mathbf{R}^n$中取值的向量函数，$P_2$和$P_3$是$H$中的线性算子。

定义算子：

$$G_iy=\langle P_iy,\ g_i\rangle\mathbf{k}_i,\ y\in D(P_i),\ (i=2,\ 3),$$

$$G_1y=\langle y,\ g_1\rangle\mathbf{k}_1,\ y\in H.$$

那末方程（2.1）—（2.2）可写为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+Ay+\langle\mathbf{z},\ \mathbf{g}\rangle b=0, \tag{2.4}$$

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}=F\mathbf{z}+G_1\frac{d^2y}{dt^2}+G_2\frac{dy}{dt}+G_3y. \tag{2.5}$$

令

$$A_0=\begin{pmatrix}0 & A^{\frac{1}{2}}\\ -A^{\frac{1}{2}} & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{\frac{1}{2}}y\\ \dot{y}\end{pmatrix},$$

$$G\mathbf{z}=\langle\mathbf{z},\ \mathbf{g}\rangle\mathbf{b},\qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\ b\end{pmatrix},$$

$$G_4\mathbf{v}=G_1v_2,\qquad G_5\mathbf{v}=G_3A^{-\frac{1}{2}}v_1+G_2v_2,$$

$$A_1=\begin{pmatrix}A_0 & -G\\ G_5 & F\end{pmatrix},\qquad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}A_0 & -G\\ G_4A_0+G_5 & F-G_4G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_0 & 0\\ 0 & F\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}0 & -G\\ G_4A_0+G_5 & -G_4G\end{pmatrix}.$$

从而方程（2.4）—（2.5）可写为

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt}=A_2\mathbf{w}.$$

令

$$G_{20}=(G_3A^{-\frac{1}{2}}\quad 0),\qquad G_{02}=(0\quad G_2),$$

$$G_{20}\mathbf{v}=G_3A^{-\frac{1}{2}}v_1,\qquad G_{02}\mathbf{v}=G_2v_2.$$

于是

$$G_5=G_{20}+G_{02}.$$

当系统只有角速度和角度反馈而没有线加速度信号反馈时，$G_4=0$。于是

$$T=\begin{pmatrix}0 & -G\\ G_5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -G\\ G_{20} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ G_{02} & 0\end{pmatrix}=T_1+T_2,$$

这里

$$T_1=\begin{pmatrix}0 & -G\\ G_{20} & 0\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ G_{02} & 0\end{pmatrix}.$$

因此在 $G_4=0$ 时，

$$A_2=A+T=A+T_1+T_2=A_1+T_2,$$

这里 $A_1=A+T_1$ 。

让 $\theta\in H\times H$ 表示零元。$\begin{pmatrix}\theta\\ \mathbf{k}_2\end{pmatrix}=\mathbf{w}_0\in H\times H\times\mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{g}_2=\begin{pmatrix}0\\ g_2\\ 0\end{pmatrix}\in H\times H\times\mathbf{R}^n,\quad \mathbf{P}_2\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\ P_2v_2\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \mathbf{P}_2 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \mathbf{P}_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{P}_2\mathbf{v}\end{pmatrix},$$

那末

$$T_2\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ G_{02} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ G_{02}\mathbf{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \langle P_2v_2,g_2\rangle\mathbf{k}_2\end{pmatrix}$$
$$=\langle\mathbf{P}\mathbf{w},\ \mathbf{g}_2\rangle\mathbf{w}_0.$$

类似于引理 1 可以证明：

**引理 3** 设算子 $A_1$ 在空间 $H\times H\times\mathbf{R}^n$ 中仅有纯点谱的线性算子，$D(\mathbf{P})\supseteq D(A_1)$，$\lambda\overline{\in}\sigma_p(A_1)$，则 $\lambda\in\sigma_p(A_1+T_2)$ 必须且只须 $\lambda$ 是方程

$$\langle\mathbf{P}R(\lambda;\ A_1)\mathbf{w}_0,\ \mathbf{g}_2\rangle=1 \tag{2.6}$$

的根。而且 $R(\lambda;\ A_1)\mathbf{w}_0$ 是算子 $A_1+T_2$ 属于本征值 $\lambda$ 的本征元。

设算子 $A_1$ 的本征值全体是 $\{k_n\}_1^\infty$，相应的本征元全体是 $\{\mathbf{w}_n\}_1^\infty$，$\mathbf{w}_n=\begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \mathbf{Z}_n \end{pmatrix}$ （$n=1, 2, \cdots$）。算子 $A_1$ 的伴随算子 $A_1^*$ 的本征元全体用 $\{\mathbf{u}_n\}_1^\infty$ 表示，$\mathbf{u}_n=\begin{pmatrix} \Psi_n \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix}$ （$n=1, 2, \cdots$），$\Psi_n\in H\times H$，$\mathbf{y}_n\in\mathbf{R}^n$，并且使得

$$\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{u}_m\rangle=\delta_{nm}=\begin{cases} 1, & (n=m) \\ 0, & (n\neq m) \end{cases}.$$

**引理 4** 设 $D(\mathbf{P})\supseteq D(A_1)$。令 $g_n^2=\langle P_2v_n^2, g_2\rangle$，$b_n=\langle \mathbf{y}_n, \mathbf{k}_2\rangle$ ($n=1,2,\cdots$)，如果 $g_n^2\neq 0$，$b_n=0$ ($n=1,2,\cdots$)，则 $\sigma_p(A_1)\cap\sigma_p(A_1+T_2)=\phi$。

证 反设 $\sigma_p(A_1)\cap\sigma_p(A_1+T_2)\neq\phi$，则存在 $k_n\in\sigma_p(A_1)\cap\sigma_p(A_1+T_2)$。于是仅有两种可能情形：

（1）$(k_n, \mathbf{w}_n)$ 是算子 $A_1$ 的本征值和相应的本征元，也是算子 $A_1+T_2$ 的本征值和相应的本征元。

（2）存在 $\mathbf{w}^*\in D(A_1)$，$\mathbf{w}^*\neq 0$ 使得 $(k_n, \mathbf{w}^*)$ 是算子 $A_1+T_2$ 的本征值和相应的本征元。

对第（1）种情形是

$$A_1\mathbf{w}_n=k_n\mathbf{w}_n, \qquad A_1\mathbf{w}_n+T_2\mathbf{w}_n=k_n\mathbf{w}_n.$$

两式相减得到

$$T_2\mathbf{w}_n=0.$$

因此

$$G_{02}\mathbf{v}_n=G_2v_n^2=\langle P_2v_n^2, g_2\rangle\mathbf{k}_2=0.$$

但是 $\mathbf{k}_2\neq 0$，故 $\langle P_2v_n^2, g_2\rangle=0$，这与引理的假设矛盾。

对第（2）种情形是

$$A_1\mathbf{w}^*+T_2\mathbf{w}^*=k_n\mathbf{w}^*, \tag{2.7}$$

$$A_1^*\mathbf{u}_n=k_n\mathbf{u}_n, \tag{2.8}$$

用 $\mathbf{u}_n$ 对（2.7）式两端取内积得到

$$\langle A_1\mathbf{w}^*, \mathbf{u}_n\rangle+\langle T_2\mathbf{w}^*, \mathbf{u}_n\rangle=k_n\langle \mathbf{w}^*, \mathbf{u}_n\rangle \tag{2.9}$$

用 $\mathbf{w}^*$ 对（2.8）式两端取内积得到

$$\langle A_1\mathbf{w}^*, \mathbf{u}_n\rangle=\langle \mathbf{w}^*, A_1^*\mathbf{u}_n\rangle=k_n\langle \mathbf{w}^*, \mathbf{u}_n\rangle, \tag{2.10}$$

（2.9）与（2.10）两式相减得到

$$\langle T_2\mathbf{w}^*, \mathbf{u}_n\rangle=0. \tag{2.11}$$

但是

$$T_2 w^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G_{02} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ G_{02}\, v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ G_2 v_2^* \end{pmatrix},$$

这里 $w^* = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ z^* \end{pmatrix}$.

于是

$$0 = \langle T_2 w^*,\ u_n \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \langle P_2 v_2^*,\ g_2 \rangle \langle k_2, y_n \rangle \end{pmatrix}.$$

由假设 $\langle k_2,\ y_n \rangle \neq 0$，因此 $\langle P_2 v_2^*,\ g_2 \rangle = 0$，从而 $T_2 w^* = 0$。从（2.7）式得

$$A_1 w^* = k_n w^*.$$

依〔2〕中的定理 1，$A+T_1$ 的每一本征子空间是 1 维的。因此 $w^* = w_n$。从而 $\langle P_2 v_n^2,\ g_2 \rangle = 0$。这与引理的假设矛盾。

**定理 2**　设算子 $A$ 和 $P_3$ 满足条件 $(A)$ 和 $(B)$，矩阵 $F$ 的每一本征值是单重的，并且是负实数·元 $b$、$g_3$ 和向量 g、$k_3$ 满足〔2〕中的定理 6 的条件。在引理 4 中的 $g_n^2$ 和 $b_n$ 满足条件 $\overline{b}_n g_n^2 < 0$（$n=1,2,\cdots$）。则每一 $\lambda \in \sigma_p(A_1+T_2)$ 具有负实部。并且存在至少一个 $\lambda \in \sigma_p(A_1+T_2)$，对某一个 $n_0 \geq 1$ 使得 $R_e\lambda < R_e k_{n_0}$。

证　依定理的假设和〔2〕中的定理 6 得，每一个 $k_n \in \sigma_p(A_1)$ 具有负实部。$A$ 是离散算子，因此 $A_1 = A+T_1$ 仅有纯点谱。任一 $\lambda \in \sigma_p(A_1+T_2)$，由引理 4，$\lambda \notin \sigma_p(A_1)$。由引理 3，$\lambda$ 是方程（2.6）的根。方程（2.6）可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle k_2,\ y_n \rangle \langle P_2 v_n^2,\ g_2 \rangle}{\lambda - k_n} = 1,$$

或者等价地写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{b}_n\, g_n^2}{|\lambda - k_n|^2} (\overline{\lambda} - \overline{k}_n) = 1. \tag{2.12}$$

令　$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$，　$k_n = k_n^1 + i\, k_n^2$。

于是

$$\overline{\lambda} - \overline{k}_n = (\lambda_1 - k_n^1) - i(\lambda_2 - k_n^2),$$

从方程（2.12）得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{b}_n\, g_n^2}{|\lambda - k_n|^2} (\lambda_1 - k_n^1) = 1, \tag{2.13}$$

因此

$$\lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{b}_n g_n^2}{|\lambda - k_n|^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{b}_n g_n^2 \ k_n^1}{|\lambda - k_n|^2} > 0.$$

由假设 $\overline{b}_n g_n^2 < 0$ ( $n = 1,2,\cdots$ )，故 $\lambda_1 = R_e\lambda < 0$。

方程(2.13)可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\overline{b}_n g_n^2}{|\lambda - k_n|^2} ( k_n^1 - \lambda^1 ) = 1 > 0,$$

由于 $-\overline{b}_n g_n^2 > 0$ ( $n = 1,2,\cdots$ )，因此存在至少一个 $n_0 \geq 1$，使得 $k_n^1 - \lambda^1 > 0$，故 $R_e\lambda = \lambda_1 < k_{n_0}^1 = R_e k n_0$ . 证毕。

## 三、结果的分析

在定理1中，$k_n^1$ 是开环系统与第一个观测器得到的信号反馈闭合后的闭环系统算子 $A_0 + T_1$ 的本征值的实部。$\lambda_1$ 是闭环系统加上第二观测器测得的信号反馈后的闭环系统算子 $A_0 + T_1 + T_2$ 的本征的实部。在定理1的条件下，$k_{n_0}^1 > \lambda_1$，$R_e\lambda = \lambda_1 < 0$，$R_e k n_0 = k_{n_0}^1 < 0$。这就是说，加上第二个观测器后，闭环系统的稳定性至少在一个子空间上得到改善。

同理，从定理2我们知道，当系统(2.1)—(2.2)具有角速度和角度两个信号同时作为反馈信号时，闭环系统比单个信号反馈输入时的闭环系统的稳定性至少在一个子空间上得到改善。

对于系统(2.1)—(2.2)具有角速度、角度和线加速度3个信号同时作为反馈输入时，闭环系统比单个信号或两个信号输入时的闭环系统的稳定性得到改善。

## 参考文献

〔1〕 王康宁、关肇直，弹性振动的镇定问题(Ⅰ)，中国科学，4(1974)，335—350。

〔2〕 王康宁、关肇直，弹性振动的镇定问题(Ⅲ)，中国科学，2(1976)，134—148。

〔3〕 孙顺华，完全可控线性系统的谱分布，数学学报，3(1978)，193—204。

# ON THE STABILIZATION OF THE DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

Wang Kangning

( Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing )

**Abstract**

In this paper, we discuss the stabilization of the linear oscillator with two observers and the linear oscillator with one controller and two observers in Hilbert space. The closed loop oscillator with two observers has better stability than with only one. The closed loop oscillator with one controller and two feedback signals fed to it has better stability than with only one.