第1卷第2期
1984年4月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol.1, No.2
April, 1984

无穷维线性系统参数最佳估计的谱表示

陈亚陵

（厦门大学）

摘要

本文对无穷维线性系统参数的最佳估计表达式中的可辨识算子进行谱分解，应用有界算子极分解方法导出参数最佳估计的谱表示式，并把上述方法推广到具有正交控制作用的多输入系统。

引言

在文献〔1〕中已导出无穷维线性系统参数最佳估计所满足的正规方程，本文首先对紧致自伴随可辨识算子进行谱分解，然后应用有界线性算子的极分解方法，导出参数最佳估计的谱表示式；最后把上述谱表示方法进一步拓广到具有正交控制作用的多输入无穷维系统，得到相应的参数估计的谱表示式。

（一）

假设具有测量方程的无穷维线性系统描述为

$$x(t)=T_t x_0+\int_0^t T_{t-s}Bu(s)ds, \quad t\in(0, T),$$
$$z(t)=Mx(t)+e(t), \qquad t>0. \tag{1.1}$$

其中 $x\in H$，H 是 Hilbert 空间，T_t（$t\geq 0$）是 H 上的强连续半群，具有无穷小母元 A，A 是闭稠定算子。$u\in L_2(0, T)$，$M\in L(H; K)$，即有界线性算子，K 是有限维 Hilbert 空间，$e\in L_2(0, T; K)$是测量误差。只要 $Bu\in L_2(0, T; H)$，（1.1）式中的积分是 Bochner 意义下的积分。在文献〔1〕中考虑了线性系统（1.1）参数 $B\in H$ 的辨识问题，曾定义算子 $\phi(t)$ 和 W 分别为

$$\phi(t)B=\int_0^t T_{t-s}u(s)Bds, \quad t>0 \tag{1.2}$$

本文于1982年11月24日收到。1983年8月16日收到修改稿。

和

$$WB=\int_0^T M\phi(t)Bdt,\ \ T>0, \tag{1.3}$$

其中　$\phi(t)\in L(H)$，$W\in L(H;\ K)$，当最小化泛函 $J(B)=\int_0^T \|z(t)-Mx(t)\|_K^2 dt$ 时，求得参数 B 的最佳估计 $\hat{B}$ 满足正规方程

$$W^*W\hat{B}=W^*y_e\ , \tag{1.4}$$

其中　W^*W 称为可辨识算子，定义为

$$W^*WB=\int_0^T \phi^*(t)M^*M\phi(t)Bdt,\ \ T>0 \tag{1.5}$$

和

$$y_e=z(t)-MT_tx_0。$$

并且当线性系统（1.1）是可辨识时，W^*W 是一个正算子。

现在考察正规方程（1.4）的谱表示问题。因为有界线性算子 W 具有 $\dim W(H)<\infty$，所以它是 Hilbert 空间 H 上的一个紧致算子。由于 W^* 是有界线性算子，所以 W^*W 必然是紧致的。当系统是可辨识时，有界线性算子 W^*W 是自伴随紧致正算子。设 W^*W 的特征值为 λ_1，$\lambda_2,\cdots$，其中 λ_i 都是正实数，ϕ_i 表示对应的特征向量，则有谱表达式

$$W^*Wh=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(h,\ \phi_j)_H\phi_j,\ \ h\in H \tag{1.6}$$

在 H 中收敛。

其次，应用有界线性算子极分解方法来表示 W^*。由于 $G\equiv W^*W$ 是自伴随正算子，$G\in L(H)$，所谓算子 G 的正平方根 R，是指满足 $G=R^2$，其中 R 是自伴随正算子。由于 G 的紧致性，能够应用谱表示方式定义 R 如下：

$$Rh=\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}(h,\ \phi_i)_H\phi_i,\ \ h\in H。 \tag{1.7}$$

显然 R 是自伴随正算子。现在，按下面的方法来定义算子 U：在 R 的值域上对于 $h\in H$，有 $URh=Wh$；在 R 的零空间上对所有使 $z=Rh=0$，有 $Uz=0$。则得到算子 W 的极分解为 $W=UR$，其中 U 是线性有界算子且具有 $(URh,\ URh)=(Rh,\ Rh)$，即 U 在 R 的值域上是等距算子。

根据上面算子 W 的极分解，有

$$\begin{aligned}(h,\ W^*g)&=(Wh,\ g)=(URh,\ g)\\&=(h,\ RU^*g),\ \ h\in H,\end{aligned}$$

则得 $W^*=RU^*$。由上面的谱分解和这里的极分解表示，那么参数 B 的最佳估计 $\hat{B}$ 所满足的方程（1.4）能写为

$$
\begin{aligned}
W^*W\hat{B} &= \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(\hat{B},\ \phi_j)\phi_j \\
&= W^*y_e \\
&= RU^*y_e \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_j}\,(U^*y_e,\ \phi_j)\phi_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_j}\,(y_e,\ U\phi_j)\phi_j,
\end{aligned}
$$

即

$$\sum_{j=1}^{\infty}\{\lambda_j(\hat{B},\ \phi_j)-\sqrt{\lambda_j}\,(y_e,\ U\phi_j)\}\phi_j=0.$$

由于 $\{\phi_j\}$ 的标准正交性，则

$$\lambda_j(\hat{B},\ \phi_j)=\sqrt{\lambda_j}\,(y_e,\ U\phi_j),\quad j=1,\ 2,\cdots$$

和 $\lambda_j>0$，所以

$$
\begin{aligned}
(\hat{B},\phi_j) &= \frac{\sqrt{\lambda_j}}{\lambda_j}(y_e,\ U\phi_j)_K \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(y_e,U\phi_j)_K,\quad j=1,\ 2,\cdots.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

现在设 $\{\phi_k\}$ 是 H 的标准正交序列，那么，对于 $\hat{B}\in H$，在 H 中有依范数收敛的表示式：

$$\hat{B}=\sum_{j=1}^{\infty}(\hat{B},\ \phi_j)\phi_i,\tag{1.9}$$

其中 $(\hat{B},\ \phi_j)$ 为 Fourier 系数。根据（1.8）式，则（1.9）式变为

$$\hat{B}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}(y_e,\ U\phi_j)_K\phi_j,\tag{1.10}$$

在 H 中收敛。

下面把参数估计 $\hat{B}$ 的表示式（1.10）进一步明确化。根据 U 的定义，U 在 R 的零空间上具有性质：$Uz=0$，对所有使 $z=Rx=0$ 的 z 成立（在 R 的零空间上），而 U 在 R 的值域上是个等距有界算子，即 $(URx,\ URx)=(Rx,\ Rx)$。现在让标准正交特征向量列 $\{\phi_i\}$ 的一个子列表示 R 的零空间的基，其它用来表示 R 值域空间。令 $e_n=U\phi_n$，如果 ϕ_n 属于 R 的零空间，则 $e_n=0$；如果 $\{\phi_n\}$ 属于 R 的值域空间，则有

$$
\begin{aligned}
(e_n,\ e_m) &= (U\phi_n,\ U\phi_m) \\
&= (\phi_n,\ \phi_m) \\
&= \begin{cases} 0 & n\neq m \\ 1 & n=m. \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以，现在只考虑属于 R 值域空间的那些 $\{e_n\}_{n=1,2,\cdots,l}$，它们是观测空间 K 的标准正交序列。这时（1.10）式进一步表示为

$$
\hat{B}=\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(y_e,\ e_j)_K\phi_j. \tag{1.11}
$$

把上述推导结果归结为下面定理：

定理 1　假设

（1）可辨识线性系统（1.1）在最小化泛函 $J(B)=\int_0^T\|z(t)-Mx(t)\|^2dt$ 意义下推得参数 B 的最佳估计 $\hat{B}$ 满足正规方程 $W^*W\hat{B}=W^*y_e$，其中 $W^*W>0$ 为系统的可辨识算子。

（2）W 的极分解为 $W=UR$，其中 R 是由（1.7）式定义的 W^*W 的平方根算子，U 是在 R 的值域上定义的等距有界算子，则最佳估计 $\hat{B}$ 能够表示为 $\hat{B}=\sum\limits_{j=1}^{l}\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(y_e,\ e_j)_K\phi_j$，其中 $\{\lambda_j\}_{j=1,2,\cdots}$ 为 W^*W 的正特征值，$\{\phi_j\}_{j=1,2,\cdots}$ 为对应的特征向量，$e_j=U\phi_j$，$\{e_j\}_{j=1,2,\cdots,l}$ 是有限维观测空间 K 的标准正交序列。

（二）

在文献〔1〕中考虑了单输入控制作用的无穷维线性系统参数的辨识，下面将把它推广到具有 m 个输入控制作用的情况。

设系统为

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m}b_iu_i(t),\quad t\in(0,\ T), \\
&x(0)=x_0,\quad x_0\in H,
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

其中 H 为 Hilbert 空间，A 是闭线性算子，具有在 H 中稠密定义域 $G(A)$ 且是强连续半群 $T_t\ (t\geq 0)$ 的无穷小母元。$u_i\in L_2(0,T)$，参数 $b_i\in H$，$i=1,2,\cdots,m$。线性系统（2.1）的温和解定义为

$$x(t)=T_tx_0+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t T_{t-s}b_iu_i(s)ds,\quad t>0.$$

只要 $b_iu_i\in L_2(0,T;H)$，其 Bochner 积分有意义。为讨论参数 b_i，$i=1,2,\cdots,m$ 的可辨识问题，必须考虑具有测量方程的线性系统

$$x(t)=T_tx_0+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t T_{t-s}u_i(s)b_ids,\quad t\in(0,T),\qquad (2.2)$$

$$z(t)=\mathrm{M}x(t)+e(t),\qquad t>0,$$

其中 观测空间 K 是有限维 Hilbert 空间，$\mathrm{M}\in L(H;K)$，$e\in L_2(0,T;K)$。类似于（1.2）式，线性系统能够写为 $x(t)=T_tx_0+\sum_{i=1}^{m}\phi_i(t)b_i$，$i=1,2,\cdots,m$，其中 $\phi_i(t)\in L(H)$。引入类似于一维控制作用的系统参数可辨识定义：

定义 2.1 如果线性系统（2.2）满足 $\mathrm{M}\phi_i(t)b_i=0,t\in(0,T)$，意味着 $b_i=0,i=1,2,\cdots,m$，则称线性系统（2.2）参数 b_i 在时刻 T 可辨识。就是说线性系统(2.2)参数 b_i 在时间间隔$[0,T]$上能由一组已知的输入 u_i 和测量 z 唯一确定。由于

$$Mx(t)=\mathrm{M}T_tx_0+\sum_{i=1}^{m}M\phi_i(t)b_i,\quad 令$$

$$y(t)=Mx(t)-MT_tx_0$$

$$=\sum_{i=1}^{m}M\phi_i(t)b_i.\qquad (2.3)$$

那么，在$[0,T]$上由 $M\phi_ib_i$ 辨识参数 b_i 的问题，实际上等价于在$[0,T]$上由 $y(t)$ 确定 b_i。现在从这个等价关系出发，求参数 b_i 在时刻 T 的可辨识条件。由于 $z\in L_2(0,T;K)$，则 $y\in L_2(0,T;K)$，因此

$$\|y\|^2_{L_2(0,T;K)}=\int_0^T\|y(t)\|^2_Kdt=\int_0^T\Big\|\sum_{i=1}^{m}M\phi_i(t)b_i\Big\|^2_Kdt$$

$$=\int_0^T\Big(\sum_{i=1}^{m}M\phi_i(t)b_i,\ \sum_{j=1}^{m}M\phi_j(t)b_j\Big)dt$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \int_0^T (M\phi_i(t)b_i,\ M\phi_j(t)b_j)dt.$$

类似（1.3）式的定义，上式能写为

$$\| y \|^2_{L_2(0,T;K)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (W_ib_i,\ W_jb_j). \tag{2.4}$$

设

$$(W_ih_i, W_jh_j) = 0,\ \ h_i, h_j \in H, i, j = 1, 2, \cdots, m,\ \ i \neq j. \tag{2.5}$$

称条件（2.5）为正交控制作用．则（2.4）式化为

$$\| y \|^2_{L_2(0,T;K)} = \sum_{i=1}^{m} (W_i^*W_ib_i, b_i),$$

其中

$$W_i^*W_ib_i = \int_0^T \phi_i^*(t)M^*M\phi_i(t)b_idt,\ \ i = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.6}$$

称$W_i^*W_i$为相应于b_i的可辨识算子．于是，满足正交控制作用的线性系统参数b_i在时刻T能唯一确定的充要条件为可辨识算子$W_i^*W_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, m$．就是说，对任何的$b_i \in H$，（$W_i^*W_ib_i, b_i$）≥ 0和（$W_i^*W_ib_i,\ b_i$）$= 0$意味着$b_i = 0$．归结为下面定理：

定理 2　设无穷维线性系统（2.2）满足正交控制作用条件（2.5），则参数b_i，$i = 1, 2, \cdots, m$，在时刻T可辨识的充要条件是$W_i^*W_i$为正算子，$i = 1, 2, \cdots, m$．

（三）

为求出参数b_i（$i = 1, 2, \cdots, m$）的最佳估计值，类似于〔1〕，考虑最小化泛函

$$J(b_1, b_2, \cdots, b_n) = \int_0^T \| z(t) - Mx(t) \|^2_K dt$$

$$= \int_0^T \| z(t) - MT_tx_0 - \sum_{i=1}^{m} M\phi_i(t)b_i \|^2_K dt$$

$$= \int_0^T \| y_e - \sum_{i=1}^{m} M\phi_i(t)b_i \|^2_K dt,$$

其中

$$y_e = z(t) - MT_tx_0, \tag{3.1}$$

由于M和$\phi_i(t)$是连续线性算子，泛函$J(b_1,\cdots,b_m)$是可微和凸的。泛函J有极小值的必要条件为其Fréchet导数

$dJ(b_1,\cdots,b_m)h=0$，对任何的$h\in H$成立。下面计算

$$J(b_1+h_1,b_2,\cdots,b_m)-J(b_1,b_2,\cdots,b_m)$$

$$=\int_0^T\Big(y_e-\sum_{i=2}^m M\phi_i(t)b_i-M\phi_1(t)(b_1+h_1),y_e-\sum_{j=2}^m M\phi_j(t)b_i$$

$$-M\phi_1(t)(b_1+h_1)\Big)_K dt-\int_0^T\Big(y_e-\sum_{i=1}^m M\phi_i(t)b_i,\ y_e-\sum_{j=1}^m M\phi_j(t)b_j\Big)_K dt$$

$$=\int_0^T\Big(y_e-\sum_{i=1}^m M\phi_i(t)b_i-M\phi_1(t)h_1,y_e-\sum_{j=1}^m M\phi_j(t)b_j-M\phi_1(t)h_1\Big)_K dt$$

$$-\int_0^T\Big(y_e-\sum_{i=1}^m M\phi_i(t)b_i,\ y_e-\sum_{j=1}^m M\phi_j(t)b_j\Big)_K dt$$

$$=2\int_0^T\Big(\sum_{i=1}^m M\phi_i(t)b_i-y_e,M\phi_1(t)h_1\Big)_K bt+\int_0^T(M\phi_1(t)h_1,M\phi_1(t)h_1)_K dt$$

$$=2\int_0^T\Big(\sum_{i=1}^m M\phi_i(t)b_i-y_e,\ M\phi_1(t)h_1)_K dt+0(\|h_1\|)。$$

类似地可计算出

$$J(b_1,b_2,\cdots,b_k+h_k,b_{k+1},\cdots,b_m)-J(b_1,b_2,\cdots,b_k,b_{k+1},\cdots,b_m)$$

$$=2\int_0^T\Big(\sum_{i=1}^m M\phi_i(t)b_i-y_e,M\phi_k(t)h_k\Big)_K dt+0(\|h_k\|),\quad h_k\in H,\quad k=1,2,\cdots,m。$$

从而必须是

$$\int_0^T\Big(\sum_{i=1}^m M\phi_i(t)\hat{b}_i-y_e,\ M\phi_k(t)h_k\Big)_K dt=0,\quad k=1,2,\cdots,m。$$

类似于（2.6）式的定义，上式能化为

$$\sum_{i=1}^m(W_k^*W_i\hat{b}_i,h_k)=(W_k^*y_e,\ h_k),\quad k=1,2,\cdots,m。\qquad (3.2)$$

因为假设系统满足正交控制作用（2.5）式，所以上式进一步简化为

$$(W_i^* W_i \hat{b}_i,\ h_i) = (W_i^* y_e,\ h_i),\ h_i \in H, i=1,2,\cdots,m.$$

上式须对所有的 $h_i \in H$ 成立，故最小解应满足

$$W_i^* W_i \hat{b}_i = W_i^* y_e,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{3.3}$$

这就是多输入系统（2.2）基于正交控制作用条件下，参数 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的最佳估计 $\hat{b}_i(i=1,2,\cdots,m)$所要满足的正规方程。

（四）

现在求最佳估计 $\hat{b}_i(i=1,2,\cdots,m)$的谱表示形式。由于 $W_i^*W_i$ 是紧致自伴随算子，设它们的非零特征值为$\{\lambda_k^{(i)}\}i=1,2,\cdots,m,k=1,2,\cdots$，而$\{\phi_k^{(i)}\}$表示对应的特征向量，则其谱分解为

$$W_i^* W_i \hat{b}_i = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(i)} (\hat{b}_i,\ \phi_k^{(i)})\ \phi_k^{(i)},\ i=1,2,\cdots,m. \tag{4.1}$$

类似于（1.7）式，用谱表示方法定义 $W_i^* W_i$ 的平方根算子 R_i 为

$$R_i x = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k^{(i)}}\ (x,\ \phi_k^{(i)})\ \phi_k^{(i)} \tag{4.2}$$

和 U_i 的定义为 R_i 的值域上满足 $U_i R_i x = W_i x$；在 R_i 的零空间上对所有使 $z=R_i h=0$，有 $U_i z=0$，则得 W_i的极分解 $W_i=U_i R_i$，其中 U_i 具有

$$(U_i R_i x,\ U_i R_i x) = (R_i x,\ R_i x),\ i=1,2,\cdots,m.$$

应用谱表示（4.1）式和（4.2）式，则（3.3）式能写为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(i)} (\hat{b}_i,\ \phi_k^{(i)})\ \phi_k^{(i)} = R_i U_i^* y_e = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k^{(i)}}\ (U_i^* y_e, \phi_k^{(i)})\ \phi_k^{(i)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k^{(i)}}\ (y_e, U_i \phi_k^{(i)})\ \phi_k^{(i)}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda_k^{(i)} (\hat{b}_i,\ \phi_k^{(i)}) - \sqrt{\lambda_k^{(i)}}\ (y_e, U_i \phi_k^{(i)}) \right\} \phi_k^{(i)} = 0,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{4.3}$$

由于{ $\phi_k^{(i)}$ }对每个i而言是正交特征向量序列，所以根据（4.3）式，有

$$\lambda_k^{(i)}\ (\hat{b}_i,\phi_k^{(i)})=\sqrt{\lambda_k^{(i)}}\ (y_e,\ U_i\phi_k^{(i)}),\ i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots$$

$$(\hat{b}_i,\ \phi_k^{(i)})=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k^{(i)}}}(y_e,U_i\phi_k^{(i)}),\ i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots.$$

因为对于$\hat{b}_i\in H$，有表示式

$$\hat{b}_i=\sum_{k=1}^{\infty}(\hat{b}_i,\ \phi_k^{(i)})\ \phi_k^{(i)}\quad i=1,2,\cdots,m$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k^{(i)}}}(y_e,U_i\phi_k^{(i)})\ \phi_k^{(i)},\ i=1,2,\cdots,m \tag{4.4}$$

在H中收敛。综上述，有下面结论：

定理 3 假设

（1）系统（2.2）满足正交控制作用条件（2.5）；

（2）可辨识系统（2.2）在最小化$J(b_1,\cdots,b_m)=\int_0^T\|z(t)-\mathrm{M}x(t)\|_K^2dt$意义下推得参数$\hat{b}_i$满足正规方程$W_i^*W_i\hat{b}_i=W_i^*y_e,\ i=1,2,\cdots,m$；

（3）W_i的极分解为$W_i=U_iR_i$；

（4）{ $\lambda_k^{(i)}$ }$i=1,\ 2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots$是$W_i^*W_i$的正特征值，{ $\phi_k^{(i)}$ }是对应的特征向量。则最佳估计$\hat{b}_i$的谱表示为

$$\hat{b}_i=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k^{(i)}}}(y_e,U_i\phi_k^{(i)})\ \phi_k^{(i)},\ i=1,2,\cdots,m. \tag{4.5}$$

类似前面的讨论，把{ $\phi_k^{(i)}$ }分为两部分，一部分属于R_i的零空间；另一部分属于R_i的值域空间，我们仅考虑属于R_i的值域空间，则有

$$(e_n^{(i)},\ e_m^{(i)})=(U_i\phi_n^{(i)},\ U_i\phi_m^{(i)})=(\phi_n^{(i)},\ \phi_m^{(i)})=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}.$$

$\{e_n^{(i)}\}_{i=1,2,\cdots,m;\ n=1,2,\cdots,l,}$对每一个$i$而言仍然是观测空间$k$中的标准正交序列，因此有

推论　在定理3的条件下，应用算子极分解定义中的算子 U_i 在 R_i 值域上的等距性质，则(4.3)式能写为

$$\hat{b}_i=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k^{(i)}}}(y_e,\ e_k^{(i)})\ \phi_k^{(i)},\quad i=1,2,\cdots,m.$$

显然，用极分解方法于最佳控制的谱表示，能够得到类似的结果。

参 考 文 献

〔1〕陈亚陵，无穷维线性系统的辨识及其收敛性，厦门大学学报(自然科学版)，**20**，2(1981)，135—145.

〔2〕Astrom, K. J. and Eykhoff, P., System Identification-A Survey, Automatica, 7(1971), 123—162.

〔3〕Balakrishnan, A. V., Applied Functional Analysis, Springer-Verlag (1976).

〔4〕Curtain, R. F. and Pritchard, A. J., Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press (1977).

THE SPECTRAL REPRESENTATIONS FOR PARAMETRIC ESTIMATION OF INFINITE DIMENSIONAL LINEAR SYSTEMS

Chen Yaling

(Xiamen University)

Abstract

This paper considers the spectral representations of the estimate of unknown paramenters for continuous linear systems whose input-output dynamics are described by infinite dimensional linear equations in terms of a mild solution of a differential equation

$$x(t)=T_t x_0+\int_0^t T_{t-s} Bu(s)\,ds, \quad t\in(0,\ T)$$

and observation equation

$$z(t)=Mx(t)+e(t), \qquad t>0$$

where $T_t\ (t\geq 0)$ is a strongly continuous semigroup on a Hilbert space H, $B\in H$, $u\in L_2(0,T)$, $M\in L(H; K)$ and error $e\in L_2(0,T; K)$ where the observation space K is a finite dimensional Hilbert space. Suppose $\phi(t)B=\int_0^t T_{t-s}u(s)$ Bds and $W^*WB=\int_0^T\phi^*(t)M^*M\phi(t)$ Bdt. We can define a positive square root of W^*W, $W^*W=R^2$. We then have the following theorem.

Theorem: (1) Let the optimal estimate $\hat{B}$ of the parameter B satisfy $W^*W\hat{B}=W^*y_e$, where $y_e=z(t)-MT_t x_0$. (2) Suppose that $W=UR$, the polar decomposition of the operator W. Then

$$\hat{B}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(y_e, U\phi_i)}{\sqrt{\lambda_i}}\phi_i.$$

Finally, We generalize the above work to systems of multi-dimensional control action.