第1卷 第2期
1984年4月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 1, No.2
April, 1984

离散时间系统的定常状态估计器

戴 冠 中

（西北工业大学）

摘 要

本文研究线性定常离散时间系统当系统噪声和测量噪声为平稳白噪声序列时，为改进稳态Kalman 滤波器瞬态性能的定常状态估计器的设计方法。文中提出了滤波器瞬态性能的度量方法；提出了两种新的性能函数的定义，从而给出两种瞬态性能得到改善的、适用于短时间运行的定常状态估计器。

一、前 言

文〔1〕中，对于线性定常连续时间系统，当系统噪声和测量噪声为平稳白噪声过程时，研究了改进稳态 Kalman-Bucy 滤波器瞬态性能的定常状态估计器的设计方法。本文将文〔1〕中提出的概念和方法推广到离散时间系统的情况中，以给出既考虑稳态精度要求、又兼顾瞬态性能要求的定常状态估计器的设计方法。新的方法弥补了稳态 Kalman 滤波器存在着的“窄频带”问题的不足[2-4]，很适用于短时间运行的、瞬态性能要求较高的状态估计器。

文〔1〕及本文所提出的方法已进行过具体的计算，将投入实际的应用。

二、稳态Kalman滤波器

被估计的线性定常离散时间系统S由下列差分方程所描述：

$$x_{k+1}=\Phi x_k+\Gamma w_k, \tag{1}$$

$$y_k=Cx_k+v_k, \tag{2}$$

式中 状态$x_k\in R^n$，输出$y_k\in R^m$，系统噪声$w_k\in R^r$，测量噪声$v_k\in R^m$；Φ、Γ、C分别是$n\times n$、$n\times r$、$m\times n$的状态转移阵、噪声输入阵和输出阵。

设{w_k}、{v_k}是零均值的、互不相关的、平稳白噪声序列：

$$Ew_k=0,\quad Ew_kw_l'=Q\delta_{kl}\quad (Q\geq 0), \tag{3}$$

本文于1982年12月18日收到。1983年6月11日收到修改稿。

$$Ev_k=0,\ Ev_kv_l'=R\delta_{kl}\quad (R>0), \tag{4}$$

$$Ew_kv_l'=0. \tag{5}$$

又设初始状态 x_0 是与 $\{w_k\}$、$\{v_k\}$ 均不相关的随机向量

$$Ex_0w_k'=0,\qquad Ex_0v_k'=0. \tag{6}$$

已知其数学期望和方差阵为

$$Ex_0=\bar{x}_0,\ E(x_0-\bar{x}_0)(x_0-\bar{x}_0)'=P_0(P_0\geq 0). \tag{7}$$

为满足滤波器的渐近特性的要求，还设

(Φ, C) 是可测对，$(\Phi, \Gamma G)$ 是可控对，这里，非负定的系统噪声方差阵 Q 分解为 $Q=GG'$。

定常的状态估计器（滤波器）S_E 的方程为

$$z_{k+1}=\Phi z_k+K(y_k-Cz_k), \tag{8}$$

$$\hat{x}_{k+1}=z_{k+1}+F(y_{k+1}-Cz_{k+1}), \tag{9}$$

式中 z_k、z_{k+1} 分别为 x_k、x_{k+1} 的一步预测估值，$\hat{x}_{k+1}$ 为 x_{k+1} 的滤波估值；K、F 为待定的 $n\times m$ 的增益阵（它们之间有确定的关系）。

滤波器的设计归结为确定其增益阵，以满足：1）无偏性；2）最小方差；3）瞬态响应等三方面的要求。

熟知，由（8）和（9）式所给出的滤波器 S_E 具有无偏滤波器的结构；另一方面，上述的要求2）和3）之间却存在着基本矛盾。稳态 Kalman 滤波器的设计，仅考虑性能要求的1）和2）。

滤波器的估计误差为

$$\tilde{z}_{k+1}\triangleq x_{k+1}-z_{k+1}=(\Phi-KC)\tilde{z}_k+\Gamma w_k-Kv_k, \tag{10}$$

$$\tilde{x}_{k+1}\triangleq x_{k+1}-\hat{x}_{k+1}=(I-FC)\tilde{z}_{k+1}-Fv_{k+1}. \tag{11}$$

而估计误差的方差阵为

$$P_{k+1}\triangleq E\tilde{z}_{k+1}\tilde{z}_{k+1}'=(\Phi-KC)P_k(\Phi-KC)'+\Gamma Q\Gamma'+KRK', \tag{12}$$

$$\Sigma_{k+1}\triangleq E\tilde{x}_{k+1}\tilde{x}_{k+1}'=(I-FC)P_{k+1}(I-FC)'+FRF'. \tag{13}$$

现在研究 $k\to\infty$ 的渐近情况。差分方程（12）的解为

$$P_{k+1}=(\Phi-KC)^{k+1}P_0[(\Phi-KC)']^{k+1}+\sum_{l=0}^{k}(\Phi-KC)^l(\Gamma Q\Gamma'+KRK')[(\Phi-KC)']^l. \tag{14}$$

若 $\Phi-KC$ 是稳定阵，则稳态的估计误差方差阵为

$$P \triangleq \lim_{k\to\infty} P_k = \sum_{l=0}^{\infty} (\Phi-KC)^l(\Gamma Q\Gamma'+KRK')[(\Phi-KC)']^l, \tag{15}$$

$$\Sigma \triangleq \lim_{k\to\infty} \Sigma_k = (I-FC)P(I-FC)'+FRF'. \tag{16}$$

引理 1　若 $\Phi-KC$ 是稳定阵，而 $(\Phi,\ \Gamma G)$ 是可控对，则（15）式的 P 收敛，它是下列 Ляпунов 方程的正定解

$$P-(\Phi-KC)P(\Phi-KC)'=\Gamma Q\Gamma'+KRK'. \tag{17}$$

证　若 $\phi-KC$ 是稳定阵，则几何级数（15）收敛。由（15）得

$$P-(\Phi-KC)P(\Phi-KC)'=\sum_{l=0}^{\infty}(\Phi-KC)^l(\Gamma Q\Gamma'+KRK')[(\Phi-KC)']^l$$

$$-\sum_{l=1}^{\infty}(\Phi-KC)^l(\Gamma Q\Gamma'+KRK')[(\Phi-KC)']^l=\Gamma Q\Gamma'+KRK'.$$

故 P 满足方程（17）。

再者，研究系统 $\eta_{k+1}=(\Phi-KC)'\eta_k$，取

$$V(\eta_k)=\eta_k' P\eta_k,$$

则　$\Delta V(\eta_k)=V(\eta_{k+1})-V(\eta_k)=\eta_k'(\Phi-KC)P(\Phi-KC)'\eta_k-\eta_k' P\eta_k$

$$=-\eta_k'(\Gamma Q\Gamma'+KRK')\eta_k\le 0. \tag{18}$$

由于 $\Phi-KC$ 是稳定阵，则据 Ляпунов 稳定性定理[5]：如果对任意非零 $h\in R^n$，沿解轨迹 $\eta_k=[(\Phi-KC)']^k h\ (k=0,\ 1,\ \cdots)$ 的 $\Delta V(\eta_k)\not\equiv 0$，则 $V(\eta_k)$ 是 Ляпунов 函数，而 $P>0$。

现在只要证明（18）式的 $\Delta V(\eta_k)\not\equiv 0$。事实上，如果

$$\Delta V(\eta_k)=-\eta_k'(\Gamma Q\Gamma'+KRK')\eta_k\equiv 0,$$

则

$$\eta_k'\Gamma Q\Gamma'\eta_k\equiv 0,\qquad \eta_k' KRK'\eta_k\equiv 0.$$

由于 $R>0$，故 $K'\eta_k\equiv 0$，亦即 $K=0$。于是，

$$\eta_k'\Gamma Q\Gamma'\eta_k=h'\Phi^k\Gamma G(\Gamma G)'(\Phi')^k h=0,\quad (k=0,\ 1,\ \cdots).$$

从而有

$$h'\left[\sum_{k=0}^{n-1}\Phi^k\Gamma G(\Gamma G)'(\Phi')^k\right]h=0,$$

这与 $(\Phi,\ \Gamma G)$ 是可控对相矛盾。证毕。

有了引理 1 之后，即可得稳态 Kalman 滤波器的主要结果。

定理 1　对于系统 S，若 $(\Phi,\ C)$ 是可测对，$(\Phi,\ \Gamma G)$ 是可控对时，则使下列性能函数

$$J_E = t_r P = t_r \sum_{l=0}^{\infty} (\Phi - KC)^l (\Gamma Q \Gamma' + KRK')[(\Phi - KC)']^l, \tag{19}$$

$$J = t_r \Sigma = t_r[(I - FC)P(I - FC)' + FRF'] \tag{20}$$

为最小的滤波器 S_E 的最佳增益阵为

$$F = PC'(CPC' + R)^{-1}, \quad K = \Phi F, \tag{21}$$

式中　P 是下列 Riccati 代数方程的正定解

$$P = \Phi[P - PC'(CPC' + R)^{-1}CP]\Phi' + \Gamma Q \Gamma'. \tag{22}$$

并且，阵 $\Phi - KC$ 是稳定阵。

证　详见〔4〕。这里我们用不同的方法给出求极值的过程，以揭示本定理与引理 1 之间的关系。

引入 Lagrange 乘数矩阵 $L \in R^{n\times n}$ $(L = L')$，则

$$J_E = t_r P + t_r\{[(\Phi - KC)P(\Phi - KC)' + (\Gamma Q \Gamma' + KRK') - P]L\}$$

极值的一阶必要条件为

1）$\dfrac{\partial J_E}{\partial L} = 0$，即得 Ляпунов 方程（17）。

2）$\dfrac{\partial J_E}{\partial P} = 0$，可得

$$I + (\Phi - KC)'L(\Phi - KC) - L = 0, \tag{23}$$

因为 $\Phi - KC$ 是稳定阵，故 Ляпунов 方程（23）有正定解 L。

3）$\dfrac{\partial J_E}{\partial K} = 0$，可得

$$L[K(CPC' + R) - \Phi PC'] = 0,$$

因为 $L > 0$，故最佳增益阵 $K = \Phi PC'(CPC' + R)^{-1}$，将此结果代入（17）式，即可得（22）式。

再者，由 $\dfrac{\partial J}{\partial F} = \dfrac{\partial}{\partial F} t_r \Sigma = 0$，可得最佳增益阵 $F = PC'(CPC' + R)^{-1}$。证毕。

如所周知，由定理 1 所给出的稳态 Kalman 滤波器 S_E 存在着“窄频带”问题——S_E 是动态滞后较显著的系统，这在对瞬态性能要求较高的情况下，限制了它的应用。

为此，下面我们在既考虑稳态精度（最小方差）的要求、又考虑瞬态性能的要求的情况下来设计滤波器。

三、瞬态性能的度量

为了对定常状态估计器的瞬态响应特性进行评比，必须给出瞬态性能的度量方法。

熟知，线性定常离散时间系统的转移阵的诸特征值越接近原点，系统的瞬态性能就越佳。因此，对于具有转移阵为 Φ 的系统，可以取

$$|\det\Phi| = \left|\prod_{i=1}^{n}\lambda_i(\Phi)\right| \tag{24}$$

作为该系统瞬态性能的一种度量，$|\det\Phi|$ 值越小，瞬态性能则越佳。应当指出，转移阵 Φ 是非奇异的，所以 $|\det\Phi| \neq 0$。

引理 2　$$|\det(\Phi - KC)| < |\det\Phi|, \tag{25}$$

其中 K 由（21）、（22）式所确定。

证　由（21）式，得

$$\det(\Phi - KC) = \det[\Phi - \Phi PC'(CPC' + R)^{-1}C]$$

$$= \det\Phi \det[I - PC'(CPC' + R)^{-1}C]。$$

由矩阵反演公式，可得

$$\det[I - PC'(CPC' + R)^{-1}C] = \det(I + PC'R^{-1}C)^{-1}。$$

因为阵 $C'R^{-1}C \geq 0$，故存在对称阵 $M \geq 0$，使 $C'R^{-1}C = MM' = M^2$，再注意行列式性质，故

$$\det(I + PC'R^{-1}C) = \det(I + PM^2) = \det(I + M'PM)$$ 阵 $M'PM \geq 0$，故 $I + M'PM > 0$，于是

$$\det(I + PC'R^{-1}C)^{-1} = [\det(I + PC'R^{-1}C)]^{-1}$$

$$= [\det(I + M'PM)]^{-1},$$

阵 $I + M'PM$ 的特征值是阵 $M'PM$ 相应的特征值右移 $+1$，而实对称阵 $M'PM$ 的特征值为非负实数，故

$$|\det(I + PC'R^{-1}C)| = |\det(I + M'PM)| > 1。$$

于是本引理得证。

推论　若 $P_2 > P_1 > 0$，则

$$|\det(I + P_2C'R^{-1}C)| > |\det(I + P_1C'R^{-1}C)|。 \tag{26}$$

相应地有

$$|\det(\Phi - K_2C)| < |\det(\Phi - K_1C)|, \tag{27}$$

这里，P_1、K_1 或 P_2、K_2 满足（21）及（22）式。

引理 2 及其推论，可用以估算定常状态估计器的瞬态性能。

四、改进瞬态性能的方法一

我们定义新的性能函数为

$$J_\alpha = t_r P_\alpha = t_r \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{2l+2}(\Phi - KC)^l(\Gamma Q\Gamma' + KRK')[(\Phi - KC)']^l, \tag{28}$$

式中 $\alpha>1$。(28)式可改写为

$$J_\alpha = t_r P_\alpha = t_r \sum_{l=0}^{\infty} [\alpha(\Phi - KC)]^l[\alpha^2\Gamma Q\Gamma' + (\alpha K)R(\alpha K)'][\alpha(\Phi - KC)']^l。 \tag{29}$$

在(29)式中，转移阵已变为 $\alpha\Phi$，而增益阵也变为 αK。

引理 3 $(\alpha\Phi, C)$ 是可测对，当且仅当 (Φ, C) 是可测对；$(\alpha\Phi, \alpha\Gamma G)$ 是可控对，当且仅当 $(\Phi, \Gamma G)$ 是可控对。

证 显然。

于是根据引理 1，若 $\alpha(\Phi - KC)$ 是稳定阵，而 $(\Phi, \Gamma G)$ 是可控对时，(29)式中的 P_α 收敛，它是下列 Ляпунов 方程的正定解

$$P_\alpha - \alpha(\Phi - KC)P_\alpha[\alpha(\Phi - KC)]' = \alpha^2\Gamma Q\Gamma' + (\alpha K)R(\alpha K)'。 \tag{30}$$

再根据定理 1，可得

定理 2 对于系统 S，若 (Φ, C) 是可测对，$(\Phi, \Gamma G)$ 是可控对时，则使性能函数(29)为最小的滤波器 S_α 的最佳增益阵为

$$F_\alpha = P_\alpha C'(CP_\alpha C' + R)^{-1}, \qquad K_\alpha = \Phi F_\alpha, \tag{31}$$

式中 P_α 是下列 Riccati 代数方程的正定解

$$P_\alpha = \alpha^2\{\Phi[P_\alpha - P_\alpha C'(CP_\alpha C' + R)^{-1}CP_\alpha]\Phi' + \Gamma Q\Gamma'\}。 \tag{32}$$

并且，阵 $\alpha(\Phi - K_\alpha C)$ 是稳定阵。

现在对变形的 Kalman 滤波器 S_α 的瞬态性能进行估算，我们有

定理 3 变形的 Kalman 滤波器 $S_\alpha(\alpha>1)$ 的所有特征值都在半径为 $1/\alpha(<1)$ 的圆内；并且，与传统的 Kalman 滤波器 $S_E(\alpha=1)$ 相比较，有

$$|\det(\Phi - K_\alpha C)| < |\det(\Phi - KC)|, \tag{33}$$

式中 K 由(21)、(22)式所确定，K_α 由(31)、(32)式所确定。

证 因为阵 $\alpha(\Phi - K_\alpha C)$ 是稳定阵，故其所有特征值都在单位圆内，从而阵 $\Phi - K_\alpha C$ 的所有特征值都在半径为 $1/\alpha$ 的圆内。

再者，比较(32)和(22)式，注意到 $\alpha>1$，故根据 Riccati 代数方程的性质，可得

$$P_\alpha > P(>0),$$

再由引理 2 的推论，(33)式得证。

五、改进瞬态性能的方法二

我们注意估计误差方差阵(14)式。式中，第一项是初始估计误差方差阵 P_0 所引起的估计误差方差阵的传递，而第二项是系统噪声 $\{w_k\}$ 和测量噪声 $\{v_k\}$ 所产生的估计误差方差阵的积累。滤波器的瞬态性能可以通过第一项的衰减快慢而反映出来。因此，在滤波器的设计中，除了考虑最小方差的要求外，还要兼顾瞬态性能的要求时，必须在性能函数中反映第一项。

为此，我们定义另一新的性能函数为

$$J_\beta = t_r P_\beta = t_r\Big\{\sum_{l=0}^{\infty}(\Phi-KC)^l(\Gamma Q\Gamma'+KRK')[(\Phi-KC)']^l$$

$$+\beta\sum_{l=0}^{\infty}(\Phi-KC)^l P_0[(\Phi-KC)']^l\Big\}, \tag{34}$$

式中 $\beta>0$。上述性能函数中，第一项是由系统噪声和测量噪声所产生的积累的稳态估计误差方差阵，它代表了对滤波器稳态精度的要求；而第二项表示了初始估计误差方差阵所引起的总的积累效应，因此它在一定程度上反映了对滤波器瞬态性能的要求。β 则是滤波器的稳态精度要求与瞬态性能要求之间的权系数。

(34)式可改写为

$$J_\beta = t_r P_\beta = t_r\sum_{l=0}^{\infty}(\Phi-KC)^l(\beta P_0+\Gamma Q\Gamma'+KRK')[(\Phi-KC)']^l, \tag{35}$$

式中 非负定阵 $\beta_0 P_0+\Gamma Q\Gamma'$ 可分解为：$\beta P_0+\Gamma Q\Gamma'=HH'$。

于是有

引理 4 若 $(\Phi, \Gamma G)$ 是可控对，则 (Φ, H) 必是可控对。

证 因为 $(\Phi, \Gamma G)$ 是可控对，所以

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Phi^k\Gamma G(\Gamma G)'(\Phi')^k=\sum_{k=0}^{n-1}\Phi^k\Gamma Q\Gamma'(\Phi')^k>0.$$

又因为 $\beta>0$，$P_0\geq 0$，故

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Phi^k HH'(\Phi')^k=\sum_{k=0}^{n-1}\Phi^k\Gamma Q\Gamma'(\Phi')^k+\beta\sum_{k=0}^{n-1}\Phi^k P_0(\Phi')^k>0,$$

从而 (Φ, H) 是可控对。证毕。

于是根据引理 1，若 $\Phi-KC$ 是稳定阵，而 $(\Phi, \Gamma G)$ 是可控对时，(35) 式中的 P_β 收敛，它是下列 Ляпунов 方程的正定解

$$P_\beta-(\Phi-KC)P_\beta(\Phi-KC)'=\beta P_0+\Gamma Q\Gamma'+KRK'。\tag{36}$$

再根据定理 1，可得

定理 4　对于系统 S，若 (Φ,C) 是可测对，$(\Phi,\Gamma G)$ 是可控对时，则使性能函数（35）为最小的滤波器 S_β 的最佳增益阵为

$$F_\beta=P_\beta C'(CP_\beta C'+R)^{-1},\quad K_\beta=\Phi F_\beta,\tag{37}$$

式中　P_β 是下列 Riccati 代数方程的正定解

$$P_\beta=\Phi[P_\beta-P_\beta C'(CP_\beta C'+R)^{-1}CP_\beta]\Phi'+(\beta P_0+\Gamma Q\Gamma')。\tag{38}$$

并且，阵 $\Phi-K_\beta C$ 是稳定阵。

对于变形的 Kalman 滤波器 S_β 的瞬态性能，则有

定理 5　变形的 Kalman 滤波器 S_β（$\beta>0$）与传统的 Kalman 滤波器 S_E（$\beta=0$）相比较，有

$$|\det(\Phi-K_\beta C)|\leq|\det(\Phi-KC)|,\tag{39}$$

式中　K 由（21）、（22）式所确定，K_β 由（37）、（38）式所确定。

证　比较（38）和（22）式，注意到 $\beta>0$ 和 $P_0\geq 0$，故根据 Riccati 代数方程的性质，可得

$$P_\beta\geq P(>0)。$$

再由引理 2 的推论，（39）式得证。

六、结　　语

本文研究离散时间系统的定常状态估计器的设计方法，按照不同的使用要求，分下列三种情况：

（1）着眼于瞬态性能的瞬态设计，即认为估计误差方差阵（14）式中的第一项为主要矛盾，则滤波器增益阵的选择应考虑如何尽速地衰减初始估计误差方差阵 P_0，这就是状态观测器的设计问题；

（2）着眼于稳态精度的稳态设计，即认为（14）式中的第二项为主要矛盾，而滤波器主要工作在 $k\to\infty$ 的稳态情况，则滤波器增益阵的选择应使性能函数（19）为最小，这就是传统 Kalman 滤波器的设计问题；

（3）既考虑稳态精度又兼顾瞬态性能的稳态与瞬态相结合的设计，可以按本文所提出的两种新的性能函数（28）或（34）来设计变形的 Kalman 滤波器。

参 考 文 献

〔1〕　戴冠中，连续时间系统的定常状态估计器，航空学报，**2**，4（1981），60—69。

〔2〕 Kalman, R. E., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D, **82**, 1 (1960), 35—45.

〔3〕 离散时间系统滤波的数学方法，中国科学院数学研究所概率组，国防工业出版社(1975)。

〔4〕 Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., Optimal Filtering. Prentice-Hall, INC. (1979).

〔5〕 Lasalle, J. P., The Stability of Dynamical Systems, Society for Industrial and Applied Mathematics (1976).

A TIME-INVARIANT STATE ESTIMATOR FOR DISCRETE-TIME SYSTEMS

Dai Guanzhong

(Northwestern Polytechnical University, Xian)

Abstract

This paper presents two modified stationary Kalman filters for discrete-time systems with improved transient performance.

A linear, time-invariant, discrete-time system, whose state is to be estimated, is characterized by equations (1) and (2). The linear, time-invariant state estimator is characterized by equations (8) and (9). The filter should be so designed as to take into account different operating conditions. There are three cases to be considered:

1. When the transient performance is principally emphasized, the problem is that of designing a state observer.

2. When the steady-state accuracy is principally emphasized, the problem is that of designing a classical Kalman filter.

3. When a compromise between the steady-state and the transient performances is sought, two new performance measures (28) and (34) are defined. And thus two modified Kalman filters are obtained as shown in Theorems 2—5.