

HANKEL 矩阵的奇异值分析和 系统结构及实现的数值算法

张志涌

(福州大学)

摘 要

本文通过奇异分解分析了系统结构的定量性质和在数字计算机上计算结构参数及实现时所遇到的数值问题,并指出了结构定量性质和数值稳定性间的关系.本文给出了由 HANKEL 矩阵奇异值分解所得的几个典型最小实现,提出了一个借助奇异值分解由 HANKEL 矩阵直接计算结构参数的可靠的数值算法.

一、引 言

卡尔曼最小实现理论对线性系统的结构描述准确清晰.但是迄今一些求取结构参数和最小实现的计算方法,尽管在其算例上成功,然而真的按此编成程序使用,问题却不少.比方在程序作用下居然会从最小实现中分离出不可控或(和)不可观部分;在相似变换作用下,实现的可控或(和)可观子空间维数的数值结果会发生变化等等.究其原因,在于系统结构的不连续性.绝对的零仅存在于理论字面上,而任何小的数值扰动都可引起结构的突变.可是,无论何种数值算法都不能求得问题本身的准确解,而最多只能求得与原问题绝对准确解靠近的受扰动后的近似解,这就要求算法本身稳定.

奇异值分解是近几年才迅速发展起来的数值计算工具,人们公认它是研究向量间线性相关定量性质及判断矩阵秩最有效的手段^{[1][2]}.

HANKEL 矩阵与系统输入输出性质、传递矩阵及状态实现的关系密切,相互转换方便.

本文试图通过 HANKEL 矩阵的奇异值分析,求取最小实现并直接分析实现的结构.

二、HANKEL 矩阵的奇异值分析

据卡尔曼最小实现知,无限马尔可夫序列有限维实现存在的充要条件是存在一个整

本文于1982年12月21日收到.1983年5月11日收到修改稿.

数 r , 使得 $M_r, M_{r+1}, \dots$ 都可由 $M_0, M_1, \dots, M_{r-1}$ 线性表出。

如果记

$$H_r = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 & \cdots & M_{r-1} \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{r-1} & M_r & \cdots & M_{2r-2} \end{pmatrix}_{rp \times rq} \quad (r \geq r_0), \quad (1)$$

在此, p 是输出向量 y 的维数, q 是输入向量 u 的维数, 可实现指数 $r_0 = \min_{V^T} \{\text{rank}(H)\}$

$= \text{rank}(H_{r+i}) = n, i = 1, 2, \dots\}$, n 是最小实现的维数。

对 H_r 施行奇异值分解, 可得

$$H_r = U_H \Sigma_H V_H^T,$$

式中 $U_H = [U_1 \cdots U_{rp}]_{rp \times rp}$ 是左奇异向量正交阵, $V_H = [V_1 \cdots V_{rq}]_{rq \times rq}$ 是右奇异向量正交阵,

$$\Sigma_H = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_{rq} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_{rq}) \text{ 是奇异值阵。}$$

当然, 在 Σ_H 的记述中假定了 $p \geq q$ 。若 $p < q$, Σ_H 的表述形式将稍有不同, 但不影响结论的一般性。

由矩阵理论知, H_r 的秩等于非零奇异值的数目, 因此又可以记

$$H_r = U \Sigma V^T = \sigma_1 (U_1 V_1^T) + \cdots + \sigma_n (U_n V_n^T), \quad (2)$$

式中 $U = [U_1 \cdots U_n]_{rp \times n}$, $V = [V_1 \cdots V_n]_{rq \times n}$, $\Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$, 且 $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$ 。

秩 1 矩阵 $(U_i V_i^T)$ 有以下性质:

$$\begin{cases} \text{rank}(U_i V_i^T) = 1, \\ \| (U_i V_i^T) \|_2 = 1, \\ \| (U_i V_i^T) (U_j V_j^T)^T \|_2 = 0, & i \neq j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \\ \| H_r (U_i V_i^T)^T \|_2 = \sigma_i. \end{cases}$$

若引入 $\hat{\sigma}_i = \sigma_i / \sigma_1$ 作为标准化奇异值, 那末显然有 $0 < \hat{\sigma}_i \leq 1$ 。 $\hat{\sigma}_i$ 清楚地表示了分量 $(U_i V_i^T)$ 在 H_r 中所起作用的大小。当 $\hat{\sigma}_i = 1 (\forall i)$ 时, 分量 $(U_i V_i^T)$ 在 H_r 中所起的作用都相

同,在这种情况下,亦有可能找到各状态分量的可控性程度和可观性程度都相同的一个最小实现,于是称这样的 H_r 具有求取最小实现的最良好的条件。反之,当各标准化奇异值的数值相差悬殊, $\sigma_n \rightarrow 0$ 时, $(U_n V_n^T)$ 在 H_r 中的作用变得愈来愈弱,这时不可能找到各状态分量的可控性程度和可观性程度同时都很好的最小实现。于是称这样的 H_r 具有求取最小实现的坏条件。当 $\sigma_n = 0$ 时, $(U_n V_n^T)$ 的影响完全消失,最小实现的维数由 n 降为 $(n-1)$ 。

因此,通过 HANKEL 矩阵的奇异值分析,不但可以知道最小实现的定性结构,而且预示了最小实现所在空间的扭曲情况以及可能向低维退化的最短距离。这将在下节进一步阐述。在此还要指出:对于一般的最小实现来说,在它相应的可控性矩阵(或可观性矩阵)进行奇异值分解后,虽然可以看出可控子空间(或可观子空间)的退化程度,但是由于这些子空间依赖于状态基的选取,所以并不能指示整个状态空间的退化程度。文[3]对此说明较为详细,本文不再赘述。

在稳定的数值算法作用下,机器有限字长的扰动,使算得的奇异值是对 H_r 受扰动 E 作用后的 $H_r' = H_r + E$ 是精确的。由于奇异值本身有可能最好的条件数,因此,可以根据奇异值引出如下数值秩的概念。

若矩阵 H_r 在奇异值分解的数值算法作用下得 $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n > \varepsilon \geq \sigma_{n+1} \geq \dots \geq \sigma_{rq}$, 那末称 H_r 数值秩为 n 。值 ε 是一个与矩阵元素精度及机器浮点运算精度有关的“零阈值”,本文取

$$\varepsilon = \max \{ \Delta / \sigma_1, (rp \times rq) \times \beta^{-t} \},$$

式中 Δ 是矩阵元素的绝对精度, rp 和 rq 分别是 H_r 的行数和列数, β 是机器浮点运算的基, t 是浮点表示尾数所占的单元数。

数值秩远不象理论秩那样对矩阵元素的扰动极为敏感,因此在数值分析上是真正实用的。此外,由于数值秩是根据奇异值定义的,所以它也不会象其他求秩方法(如高斯消去法)那样容易失误。

三、最小实现的求取及结构的直接确定

卡尔曼早就给出了一个由 HANKEL 矩阵求最小实现的算法^[4],可表述如下:

$$\begin{cases} A = E_{n_r}^T P(\sigma H_r) Q E_{r_q}^n, \\ B = E_{n_r}^T P H_r E_{r_q}^n, \\ C = E_p^T H_r Q E_{r_q}^n, \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\sigma H_r = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \cdots M_r \\ M_2 & M_3 \cdots M_{r+1} \\ \vdots & \vdots \\ M_r & M_{r+1} \cdots M_{2r-1} \end{bmatrix}_{rp \times rq}, \quad E_m^l = \begin{cases} [I_{m \times m} : 0] & m < l \\ I_{m \times m} & m = l \\ \begin{bmatrix} I_{l \times l} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & m > l \end{cases},$$

P, Q 是非异矩阵, 且满足

$$PH_r Q = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{rp \times rq} = E_{rp}^n E_{rq}^n.$$

P, Q 取得不同, 最小实现的基底就不同, 相应的可控子空间及可观子空间的几何性质也不同. 有的可能较好, 有的可能极差, 有的甚差可能发生可控子空间及可观子空间都接近退化. 遗憾的是, 目前大多数教科书上所给的由 HANKEL 矩阵求最小实现的算法, 都不能克服这种盲目性. 而通过 HANKEL 矩阵的奇异值分析所得的最小实现, 可以保证实现的可控子空间及可观子空间具有良好的几何性质或满足事先指定的要求.

据 $H_r = P^{-1} E_{rp}^n E_{rq}^n Q^{-1} = U \Sigma V^T$, 令 $E_{rp}^n P = \Sigma_1^{-1} U^T$, $Q E_{rq}^n = V \Sigma_2^{-1}$, 且 $\Sigma_1 \Sigma_2 = \Sigma$, 于是由式 (3) 可得

$$\begin{cases} A = \Sigma_1^{-1} U^T (\sigma H_r) V \Sigma_2^{-1}, \\ B = \Sigma_2 V^T E_{rq}^n, \\ C = E_{rp}^n U \Sigma_1. \end{cases} \quad (4)$$

相应 Σ_1, Σ_2 的不同取值, 可以得以下四种典型的最小实现.

(1) 令 $\Sigma_1 = I, \Sigma_2 = \Sigma$, 得第一种最小实现^[5].

由文献可知, $A^i = U^T K^i U$, ($i=1, 2, \dots$), K 是如下 ($rp \times rp$) 矩阵

$$K = \begin{bmatrix} 0 & I_p & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & I_p \\ (a_r I_p) & (a_{r-1} I_p) & \cdots & (a_1 I_p) \end{bmatrix},$$

$a_1, \dots, a_r$ 是式 $M_{r+j} = \sum_{i=1}^r a_i M_{r+j-i}$ 的系数.

因此, 所得最小实现的可观性矩阵可表述为

$$O_r = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{rp}^n U \\ E_{rp}^n K U \\ \vdots \\ E_{rp}^n K^{r-1} U \end{bmatrix} = I_{rp} U = U,$$

可控性矩阵 $B_r = \Sigma V^T$. 这表明, 该实现的可观子空间是最良好的 (即其所有奇异值相等), 此时可控子空间的退化程度则完全反映了最小实现时状态空间的退化情况。

又可以记 $B_r = U^T H$, 左乘正交向量组成的阵不改变列向量间的几何关系。这意味着 H 阵列向量间的独立性关系完全反映了可控性矩阵 B_r 的列向量间的关系。因此, 可以根据不同指定次序对 H 列向量所进行的独立性检验, 直接求得不同指定类型的可控性指数。

(2) 若 $\Sigma_1 = \Sigma$, $\Sigma_2 = I$, 得第二种最小实现。

这时 $B_r = V^T$, $O_r = U\Sigma = HV$, 最小实现是否接近降维, 完全由可观性矩阵是否接近亏秩反映出来。指定类型的可观性指数可以直接从 HANKEL 矩阵的行向量的独立性检验求得。

(3) 令 $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma^{-\frac{1}{2}}$.

此时相应的 $B_r = \Sigma^{-\frac{1}{2}} V^T$, $O_r = U\Sigma^{-\frac{1}{2}}$. 这个实现是所有实现中, 可控、可观两子空间同时退化最少的最小实现。

(4) 令 $\Sigma_1 = \text{diag}[\eta_1, \dots, \eta_n]$, $\Sigma_2 = \text{diag}[\rho_1, \dots, \rho_n]$, 且 $\eta_1 \geq \dots \geq \eta_n > 0$, $0 < \rho_1 \leq \dots \leq \rho_n$, $\rho_1/\rho_n \ll \sigma_n$.

据 $\Sigma_1 \Sigma_2 = \Sigma$, 可得 $\eta_n/\eta_1 = (\sigma_n/\sigma_1)(\rho_1/\rho_n)$, 于是 $\rho_1/\rho_n \ll \sigma_n$, $\eta_n/\eta_1 \ll \sigma_n$. 这意味着该实现的可控、可观子空间会同时严重退化, 所得实现矩阵元素的大小相差悬殊, 这是最不希望的坏实现。

显而易见, 对于类似的坏实现, 如果可控性指数或可观性指数是借助 B_r 或 O_r 获得的, 那误判就难以避免。此时, 结构分析的一条可靠的途径是通过 H 进行。

四、算法步骤

根据以上的分析, 本节将给出由 HANKEL 阵求最小实现及结构参数的具体步骤。在此, 求取可控性指数的列向量独立性检验是按自左至右的原则进行的, 求得的实现是第一种最小实现。

(1) 置 r 为某大于 q 的整数; $N \leftarrow 0$.

(2)

$$H \leftarrow \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \dots & M_{r-1} \\ M_1 & M_2 & \dots & M_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{r-1} & M_r & \dots & M_{2r-2} \end{bmatrix}, \mu(i) \leftarrow 0, \sigma(i) \leftarrow 0 \quad (i = 1, \dots, rq).$$

(3) 对 H 调用奇异值分解子程序; 若 $\sigma_i/\sigma_1 > \varepsilon$, 则 $\sigma(i) \leftarrow \sigma_i$, $k \leftarrow i$ ($i = 1, \dots, rq$), 同时在数组 U 及 V 中存放相应的左奇异向量及右奇异向量。

(4) 若 $k \neq N$, 则 $N \leftarrow k$, $r = r + 1$, 转第 (2) 步; 若 $k = N$, 则 $W \leftarrow [h_1 \dots h_q](h_1, \dots, h_q \text{ 是 } H \text{ 的第 } 1, \dots, \text{第 } q \text{ 列}), \mu(i) \leftarrow 1 \quad (i = 1, \dots, q), j \leftarrow q$.

(5) 若 $j=N$, 则转第 (7) 步; 若 $j \neq N$, 则 $j \leftarrow j+1$, $W \leftarrow [W : h_j]$.

(6) 对 W 调用奇异值分解子程序; 若 $\sigma_j/\sigma_1 > \varepsilon$, 则 $mu(j) \leftarrow 1$, 转第 (5) 步; 若 $\sigma_j/\sigma_1 \leq \varepsilon$, 转第 (5) 步.

$$(7) \quad H \leftarrow \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \cdots & M_r \\ M_2 & M_3 & \cdots & M_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_r & M_{r+1} & \cdots & M_{2r-1} \end{bmatrix}, \text{ 并完成矩阵运算 } A \leftarrow U^T * H * V.$$

$$(8) \quad \begin{aligned} A(i, j) &\leftarrow A(i, j)/\text{sigma}(j) & (i=1, \dots, N, j=1, \dots, N), \\ B(i, j) &\leftarrow \text{sigma}(i) * V(j, i) & (i=1, \dots, N, j=1, \dots, q), \\ C(i, j) &\leftarrow U(i, j) & (i=1, \dots, p, j=1, \dots, N). \end{aligned}$$

(9) 计算终止. 在 N 变元得到的是最小实现维数; mu 数组贮存着关于 H 阵自左至右选取独立列的信息; sigma 数组的前 n 个元中存有大于“零阈值” ε 的奇异值 (按非增的顺序), 它也提供了第一种实现可控子空间退化程度的信息; 数组 A, B, C 存有第一种最小实现的计算结果; 数组 U 存有该实现的可观性矩阵.

五、数值算例

例 1 已知马尔可夫序列

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -0.64 & 0.6 \\ 0.16 & 0.16 \end{bmatrix}, \\ M_3 &= \begin{bmatrix} -0.512 & 0.504 \\ 0.064 & 0.064 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} -0.4096 & 0.408 \\ 0.0256 & 0.0256 \end{bmatrix}, \\ M_5 &= \begin{bmatrix} -0.32768 & 0.32736 \\ 0.01024 & 0.01024 \end{bmatrix}, \quad M_6 = \begin{bmatrix} -0.262144 & 0.26208 \\ 0.004096 & 0.004096 \end{bmatrix} \dots \end{aligned}$$

因为 $\text{rank}(H_2) = \text{rank}(H_3) = 3$, 可知最小实现维数为 3, 可实现指数 $r_0 = 2$.

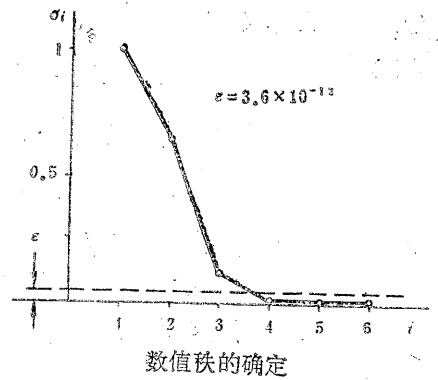
对 H_3 进行奇异值分解所得的标准化奇异值如表 1 所列. 下图示意说明了 H_3 数值秩的确定.

令 $\Sigma_1 = I$, $\Sigma_2 = \text{diag}[2.564, 1.679, 0.3018]$, 则得

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.8154 & -0.3312 & 0.7093 \\ -0.0895 & 0.4552 & -0.1012 \\ -0.0618 & 0.1010 & 0.1294 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1.651 & -0.3503 \\ 0.6990 & 1.323 \\ 0.1415 & -0.1768 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} -0.6413 & -0.0687 & 0.7559 \\ 0.2229 & 0.8502 & 0.2664 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

表 1

i	σ_i
1	1
2	0.6548
3	0.1177
4	0.3882×10^{-12}
5	0.0734×10^{-12}
6	0.0172×10^{-12}



由此实现求得的 Luenberger 可观标准型如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.000 & 0 \\ -0.16 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.000 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1.000 & 0.0000 \\ -0.8000 & 0.6000 \\ 1.000 & 1.000 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.000 \end{bmatrix}.$$

对 H_3 的行向量按自上至下次序进行独立性判断的打印结果表明, 第 1、第 2、第 3 行是线性独立的, 因而可观性指数 $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$. 显然这是正确的.

当令 $\Sigma_1 = \text{diag}[10, 1, 0.0001], \Sigma_2 = \text{diag}[0.2564, 1.679, 3018]$, 则得如下实现

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0.8154 & -0.0331 & 0.0000 \\ -0.8954 & 0.4552 & 0.0000 \\ -6180 & 1009 & 0.1294 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0.1651 & -0.0350 \\ 0.6990 & 1.323 \\ 1415 & -1768 \end{bmatrix},$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} -6.413 & -0.0687 & 0.0001 \\ 2.229 & 0.8502 & 0.0000 \end{bmatrix}.$$

该实现矩阵元素值相差悬殊. 状态分量 x_3 几乎不可观, 但是相应的可控性却很强.

该例是以 1×10^{-12} 的相对精度, 进行浮点运算而得. 相应 H_3 的 $\epsilon = (6 \times 6) \times 10^{-12} = 3.6 \times 10^{-12}$.

例 2 已知实现

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -450 \\ 1 & 0 & 0 & -705 \\ 0 & 1 & 0 & -293 \\ 0 & 0 & 1 & -39 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 30.01 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据 B , O 及 H 进行结构分析的数值结果如表 2 所列。运算是以 0.6×10^{-7} 的相对精度进行的, 相应这些矩阵的零阈值 $\epsilon = 16 \times 0.6 \times 10^{-7} = 0.96 \times 10^{-6}$.

表 2

分析依据	结 果	σ_4	可控性指数	可观性指数
可控性矩阵 B_4		0.0279×10^{-6}	3	/
可观性矩阵 O_4		0.0329×10^{-6}	/	3
HANKEL 矩阵 H_4		17.2×10^{-6}	4	4

结果表明, 由于基底的原因, 可控及可观子空间同时退化, 据 B 及 O 计算结构指数都产生了错误。而由 HANKEL 阵的奇异值分析表明, H_4 在 $(U_4 V_4^T)$ 上的投影尽管很小, 但还比 ϵ 大得多。假如对 H 采用本文所提的第三种实现, 那末可以得到几何性质比原来好得多的可控及可观子空间, 此时相应 B 及 O 的 $\sigma_4 = \sqrt{17.2 \times 10^{-6}} = 0.0316$.

在以上计算中的奇异值分解是采用适于微型机的简短型程序实现的。

六、结 束 语

与系统内部状态无关的 HANKEL 矩阵和奇异值分解的结合, 使得求取最小实现及分析结构更直接更可靠。这种方法不但适用马尔可夫序列完全精确的情况, 而且还适用于马尔可夫序列是不精确的测量值或估计值的更一般情况。

参 考 文 献

- [1] Forsythe, G. H., Malcolm, M. A. and Moler, C. B., Computer Methods for Mathematical Computation, Prentice Hall (1977).
- [2] Klema, V. C. and Laub, A. J., Singular Value Decomposition and its Applications, IEEE Trans., AC-25,2 (1980), 164—176.
- [3] Zhang Zhiyong, Yuan Tianxin and Zhang Zhongjun, Identification of Linear Multivariable Systems by Using SVD, Proceedings First IASTED International Symposium on Applied Control and Identification, Denmark, June, 1(1983), 9. 11—9.15.

- [4] Kalman, R. E., Falb, P. L. and Arbib, M. A., Topics in Mathematical System Theory, Mcgram-Hill Book Company (1969).
- [5] Hajdasinski, A. K., Linear Multivariable Systems—Preliminary Problems in Mathematical Description, Modelling and Identification, TH-Report 80-E-106, Eindhoven, April (1980).

SINGULAR VALUE ANALYSIS OF THE HANKEL MATRIX AND NUMERICAL ALGORITHMS FOR THE COMPUTATION OF SYSTEM STRUCTURE AND REALIZATION

Zhang Zhiyong

(Fuzhou University)

Abstract

This paper analyses, by using singular value decomposition (SVD), the quantitative properties of the system structure and the numerical problems that are encountered when the structure parameters and realization are calculated on digital computers. The relation between the quantitative properties and the numerical stability is discussed. Several typical minimal realizations by SVD of the HANKEL matrix are proposed, and a numerical reliable algorithm for the calculation of the system structure parameters directly from the HANKEL matrix is presented.