

在连续过程的离散最优控制中 采样周期和加权系数的选择

孙增圻

B. Qvarnström

(清华大学)

(Chalmers University of Technology, Sweden)

摘 要

本文提出了在连续过程的离散最优控制中选择采样周期和加权系数的一个方法。这个选择基于：1) 线性的时间离散控制器；2) 控制变量的范围受到限制；3) 根据对系统的实际要求给定输出量的初始偏移。系统的性能则采用时间连续的二次型输出偏移损失函数以及类似的控制损失函数来表示。对不同的采样周期，利用标准的LQ方法来计算控制器，并通过选择控制损失项的加权系数，以使得对于给定的初始偏移，允许的控制范围得到充分利用。最后的采样周期则是权衡了偏移损失和控制损失的一个折衷选择。本文介绍的方法尤其适用于需要尽可能长的采样周期的情况。

一、引 言

在所有计算机参与的控制系统中，如何确定输出控制信号的时间间隔以及从对象获取信号的时间间隔，这是必然会遇到的问题。通常，人们采用较短的采样间隔以使得计算机或多或少实现一个近似的时间连续控制器。本文将探讨采用长采样间隔而不至于造成控制性能的严重损失的可能性。

首先，必须弄清采样间隔的含义。计算机从对象获取信号的时间间隔与输出的控制信号的时间间隔并不一定总是相等的。在不少应用中，有理由采用较短的获取信号的时间间隔而选择较长的送出信号的时间间隔。在这种情况下，控制器将包含一个前置滤波器，它将从对象获取的频率较高的采样信号转换成与送出的控制信号频率相同的信号。由于前置滤波器的问题已不是本文讨论的范围，这里将假定从对象获取信号以及计算机送出信号具有相同的时间间隔，并统一称之为“采样周期”。

关于采样周期的选择，很多文献都讨论过。最常见的是基于频带的要求以及香农(Shannon)采样定理。按照这个采样定理，并考虑一定的富裕量，通常建议采样速度

本文于1982年12月24日收到，1983年5月29日收到修改稿。

至少五倍于香农极限频率。而在其它的情况下,采样周期的选择则是考虑对系统的多种要求的一个折衷。例如,文献[1]着眼于跟踪效应,抗干扰性及灵敏度等方面来选择采样周期。文献[2]和[3]则从不同的角度考察了最优采样数据调节器的性能,并据此提出了对选择采样周期的建议。

文献[2][3]所给出的选择采样周期的方法是基于同样的二次型损失函数,即加权系数保持常数而不随采样周期而改变。实际上很多情况下,对不同的采样周期有理由选择不同的加权系数,以使得设计出的控制器更加符合实际的要求。

本文将讨论时间连续的单输入—单输出过程和时间离散的控制。这个控制器将使得时间连续的损失函数极小。这里假定控制量的范围受到控制,并预先给定初始的输出偏移。输出偏移将代表最大的设定点的阶跃变化或最严重的干扰。在本文中,对不同的采样周期,将选取不同的加权系数以使控制量不超过它的限制范围。

二、问 题

给定一个线性的、时间连续的、单输入—单输出的受控过程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (2.2)$$

其中 系数矩阵的维数分别为 $A(n,n)$, $B(n,1)$ 和 $C(1,n)$ 。或者给定过程的传递函数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}. \quad (2.3)$$

现在需要计算一个线性的、时间离散控制器

$$u(k) = -Lx(k), \quad (2.4)$$

并使

$$u(t) = u(k) \quad kT_0 \leq t < (k+1)T_0, \quad (2.5)$$

其中 T_0 是采样周期, L 是最优控制器, 它将使二次型时间连续损失函数

$$J = \int_0^\infty (y^2 + p u^2) dt \quad (2.6)$$

极小。因此, 这个最优控制器 L 将取决于采样周期 T_0 以及加权系数 p 的选择, 即

$$L = L(T_0, p). \quad (2.7)$$

这里假定控制量的范围受到限制, 即

$$|u(t)| \leq u_0, \quad (2.8)$$

其中 u_0 是一个给定的常值, 同时还假定输出量的初始偏移为

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0, \quad (2.9)$$

其中 y_0 反映了设定点的最大的阶跃变化或最严重的过程干扰。

问题 1

在损失函数表达式 (2.6) 中选择加权系数 p 以使得给定条件 (2.8) 和 (2.9) 满足。显然, p 将随着不同的采样周期 T_0 而改变。因此, 也就是要决定

$$p = p(T_0). \quad (2.10)$$

问题 2

在综合考虑偏移损失 J_y 和控制损失 J_u 的基础上选择采样周期 T_0 。偏移损失和控制损失分别定义为

$$J_y = \int_0^{\infty} y^2 dt, \quad (2.11)$$

$$J_u = \int_0^{\infty} u^2 dt. \quad (2.12)$$

当给定 $x(0)$ 时, 由于 $p(T_0)$ 和 $L(T_0, p(T_0))$ 都将取决于 T_0 , 因此 J_y 和 J_u 也将只是 T_0 的函数。综合考虑 J_y 和 J_u 的选择, 可以用公式表示为

$$\begin{cases} \min_{T_0} J_y(T_0), \\ J_u(T) \leq J_{u0}, \end{cases} \quad (2.13)$$

或

$$\min_{T_0} [J_y(T_0) + q J_u(T_0)], \quad (2.14)$$

其中 J_{u0} 是一个给定的控制损失的极限值, q 也是一个给定的系数, 它代表了在 J_y 和 J_u 之间的恰当的折衷。

问题 3

找出一个简单的步骤来选择采样周期 T_0 , 这个选择将与在问题2中当给定一定的 J_{u0} 或 q 时所得结果一致。

三、加权系数的选择

1. $T_0 = 0$ 的情形

首先考虑 $T_0 = 0$, 即控制器也是时间连续的情形。

定理 3.1

给定受控过程的传递函数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3.1)$$

以及初始条件如 (2.9) 所示。如果它的最优控制器使得损失函数

$$J = \int_0^{\infty} (y^2 + p u^2) dt \quad (3.2)$$

极小, 那末控制变量在 $t=0$ 的数值 $u(0)$ 将满足下面的关系式

$$p^{-1} = \frac{u^2(0)}{y^2(0)} - \frac{2u(0)}{Ky(0)}, \quad (3.3)$$

其中

$$K = G(0) = \frac{b_n}{a_n} \quad (3.4)$$

是过程的静态放大倍数。

证(见附录 A)。

既然最优控制器所产生的控制变量 u 总是力图使对象的输出偏移减少直至回到零, 因此, 通常有*

$$\frac{u(0)}{Ky(0)} < 0. \quad (3.5)$$

于是等式 (3.3) 可以改写为

$$p = \frac{1}{\frac{u^2(0)}{y^2(0)} + 2 \left| \frac{u(0)}{Ky(0)} \right|} = \frac{K^2}{\frac{K^2 u^2(0)}{y^2(0)} + 2 \left| \frac{Ku(0)}{y(0)} \right|}. \quad (3.6)$$

通常, 为了消除初始偏移 $y(0) = y_0$, 在 $t=0$ 时控制变量将具有最大的数值, 即

$$|u(t)|_{\max} = u(0). \quad (3.7)$$

于是, 当控制变量受到限制如 (2.8) 所示时, 根据式 (3.6) 和 (3.7), 加权系数 p 应选为

$$p = \frac{K^2}{m(m+2)}, \quad (3.8)$$

其中

$$m = \left| \frac{Ku_0}{y_0} \right|. \quad (3.9)$$

在式 (3.9) 中, y_0 是最大的输出初始偏移, u_0 是控制量的限制范围, K 是对象的静态放大倍数。于是 m 可看成是量纲的相对控制限。

公式 (3.8) 表明, 加权系数 p 的选择只取决于控制变量的相对控制限及过程的静态放大倍数, 而与过程的动特性无关。

如果对象 $G(s)$ 包含有积分环节, 意味着在式 (3.1) 中 $a_n = 0$ 即 $K = b_n/a_n \rightarrow \infty$ 。于是公式 (3.8) 可简化为

$$p = \frac{y_0^2}{u_0^2}. \quad (3.10)$$

公式 (3.10) 表明, 在受控过程包含积分环节的情况下, 加权系数 p 的选择仅仅取决于

*式 (3.5) 成立的条件尚需进一步研究, 但可以指出, 当 $G(s)$ 是稳定且最小相位时, 则式 (3.5) 总成立。

控制限及给定的输出初始偏移。

2. $T_0 \neq 0$ 的情形

当 $T_0 \neq 0$ 时, 加权系数 p 必须进行 调整以满足式 (2.8) 和 (2.9) 的要求。作者曾计算了许多例子, 结果表明加权系数 p 将随着采样周期 T_0 的增加而减少。图 3.1 显示了其中的两例。

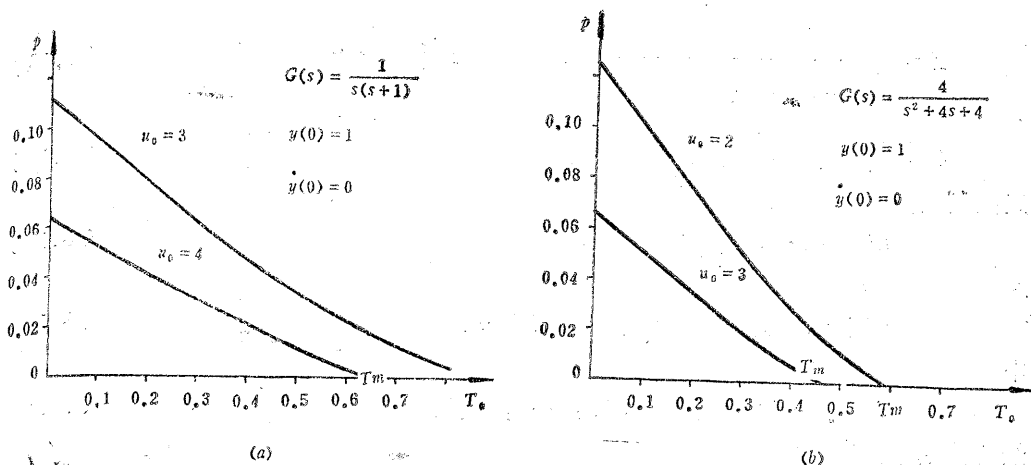


图 3.1 加权系数 p 随不同采样周期时的选择—— u_0 和 y_0 固定

从图 3.1 可以看出, 曲线 $p(T_0)$ 很接近直线, 因而 它可以用下面的公式来近似地表示,

$$p(T_0) = p(0) \left(1 - \frac{T_0}{T_m}\right) \left(1 - 0.3 \sin \frac{T_0}{2T_m} \pi\right), \quad 0 \leq T_0 \leq T_m. \quad (3.11)$$

式中 $p(0)$ 是加权系数在 $T_0 = 0$ 时的选择, 它可以利用公式 (3.8) 或 (3.10) 进行计算。 T_0 是在控制系统中实际使用的采样周期。 T_m 是一种参考采样周期, 当使用这个采样周期并保持 u_0 和 y_0 固定时, 加权系数 $p(T_m)$ 可选为零, 如图 3.1 所示。从公式 (3.11) 可以看出, 当 T_0 给定时, 为了计算 $p(T_0)$, T_m 是一个重要参数。

3. 计算 T_m

由于 T_m 与过程的参数、控制限 u_0 以及给定的初始偏移 y_0 等许多因素有关, 因此直接计算 T_m 是比较困难的。然而, T_m 可以利用间接的方法来近似地确定。基本想法是, 由于 $p(T_0)$ 接近一条直线, 如图 3.1 所示。而 $p(0)$ 能按照公式 (3.8) 或 (3.10) 准确地进行计算, 如果 $p(T_0)$ 的斜率也能够计算出来, 则 T_m 便可近似地确定。下面给出一个计算 $p(T_0)$ 斜率的重要定理。

定理 3.2 给定受控过程

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, \quad (3.12)$$

它的状态空间表达式的能控标准形可以表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B u, \quad (3.13)$$

$$y = C\mathbf{x}, \quad (3.14)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & I_{n-1} & \\ \hline & -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$C = (b_n \ b_{n-1} \ \cdots \ b_1). \quad (3.16)$$

假定控制器是离散的, 即

$$u(k) = -L(T_0) \mathbf{x}(k). \quad (3.17)$$

并且

$$u(t) = u(k), \quad kT_0 \leq t < (k+1)T_0, \quad (3.18)$$

其中

$$L(T_0) = (L_1(T_0) \ L_2(T_0) \ \cdots \ L_n(T_0)) \quad (3.19)$$

是最优控制器, 它使损失函数

$$J = \int_0^\infty (y^2 + p(T_0)u^2) dt \quad (3.20)$$

极小。其中 $p(T_0)$ 的选择是使得, 当 T_0 改变时, 给定的输出偏移 (如式 (2.9) 所示) 及 $u(0)$ 保持常数。

那末

$$\left. \frac{\partial p}{\partial T_0} \right|_{T_0=0} = -\frac{p^2(0)}{b_n^2} (L_1(0) + a_n)^2 L_n(0), \quad (3.21)$$

其中

$$p(0) = \frac{K^2}{m(m+2)}, \quad (3.22)$$

$$K = \frac{b_n}{a_n}, \quad (3.23)$$

$$m = \left| \frac{K u(0)}{y(0)} \right|. \quad (3.24)$$

如果受控过程包含有积分环节, 则

$$\left. \frac{\partial p}{\partial T_0} \right|_{T_0=0} = -p(0)L_m(0), \quad (3.25)$$

其中

$$p(0) = \frac{u^2(0)}{y^2(0)}. \quad (3.26)$$

证 (见附录 B)

根据定理 3.2, 参考采样周期 T_m 可以很容易地被近似地确定. 由于 $p(T_0)$ 不是真正的直线, 如图 3.1 所示. 基于许多计算实例, 对于不包含有积分环节的受控过程

$$T_m \approx -(1.1-1.5)p(0) \left(\left. \frac{\partial p}{\partial T_0} \right|_{T_0=0} \right)^{-1}, \quad (3.27)$$

根据式 (3.21), (3.27) 可进一步写为

$$T_m = (1.1-1.5) \frac{b_n^2}{p(0)(L_1(0) + a_n)^2 L_n(0)}. \quad (3.28)$$

对于包含有积分环节的过程

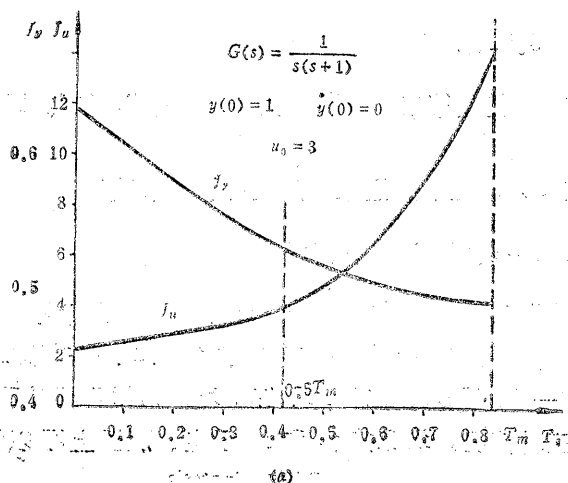
$$T_m = -(1.3-1.7)p(0) \left(\left. \frac{\partial p}{\partial T_0} \right|_{T_0=0} \right)^{-1}. \quad (3.29)$$

根据式 (3.25)

$$T_m = (1.3-1.7) \frac{1}{L_n(0)}. \quad (3.30)$$

四、采样周期的选择

利用上节给出的公式, 当给定某一采样周期 T_0 时, 可以计算出相应的加权系数 $p(T_0)$, 然后计算出使连续的损失函数 (2.6) 极小的离散控制器 $L(T_0, p(T_0))$ [4], 最后, 进一步计算出 (2.11) 和 (2.12) 所示的偏移损失 $J_y(T_0)$ 及 $J_u(T_0)$ [5]. 按照上面的步骤, 可以研究不同的采样周期对损失函数的影响. 作者曾按此计算了许多例子, 图 4.1 显示了其中的两个.



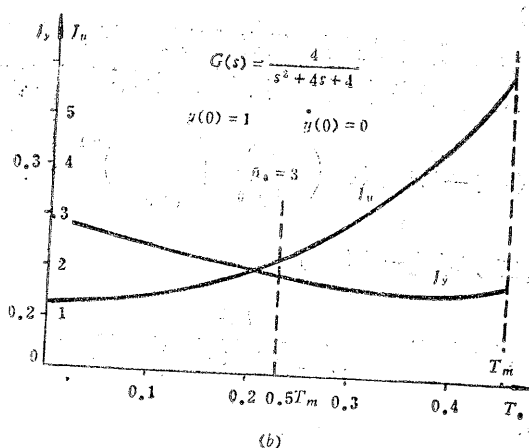


图 4.1 采样周期对损失函数的影响—— u_0 和 y_0 固定

由图 4.1 可以看出, 在一定范围内, 偏移损失 J_y 随着 T_0 的增加而减少, 控制损失随 T_0 的增加而增加。而实际系统则要求 J_y 和 J_u 都尽可能小。因此, 采样周期只能在 J_y 和 J_u 之间取一个折衷的选择, 利用公式 (2.13) 或 (2.14), 当给定控制损失限制 J_u 或加权参数 q 时, 可以定量地选出这个折衷的采样周期。

利用象图 4.1 那样的曲线及公式 (2.13) 或 (2.14) 来选取采样周期的方法比较直观。而且它能依靠适当地给定 J_u 或 q 而合理地选择采样周期。然而, 这个方法比较复杂, 它的计算工作量很大。而且, 有时要求事先给定参数 J_u 或 q 有一定困难。

仔细观察图 4.1, 可以进一步看出, 在 T_0 超过一定数值后, $J_y(T_0)$ 将下降得很缓慢, 甚至回升 (见图 4.1(b))。另一方面当 T_0 于大一定数值后, $J_u(T_0)$ 将增加非常迅速。通过对许多象图 4.1 那样曲线的分析, 可以看出

$$T_0 = (0.4 - 0.6) T_m,$$

是权衡了 $J_y(T_0)$ 和 $J_u(T_0)$ 后的一个较好的选择。于是建议采样周期选为

$$T \approx 0.5 T_m,$$

(4.2)

如图 4.1 所示。其中 T_m 就是第三节中所定义的参考采样周期。因而它能够利用上节讨论的方法来计算。

根据公式 (3.11), 相应于所选采样周期的加权系数为

$$p(T_0 = 0.5 T_m) \approx 0.4 p(0).$$

(4.3)

利用公式 (4.2) 来选取采样周期的方法虽然是近似的, 但它不需要太多的计算工作量, 因而它要比上面介绍的依靠公式 (2.13) 或 (2.14) 来求取 T_0 的方法简单实用。

对前面引入的第一个例子, 我们计算了三个不同采样周期时系统的动态响应, 如图 4.2 所示。对所有这三种情况, 均保持 $\dot{y}_0$ 和 u_0 固定。从图上可以看出, 图 4.2(b) ($T_0 \approx 0.5 T_m$) 显示了比其它两种情况都要好的动态响应。

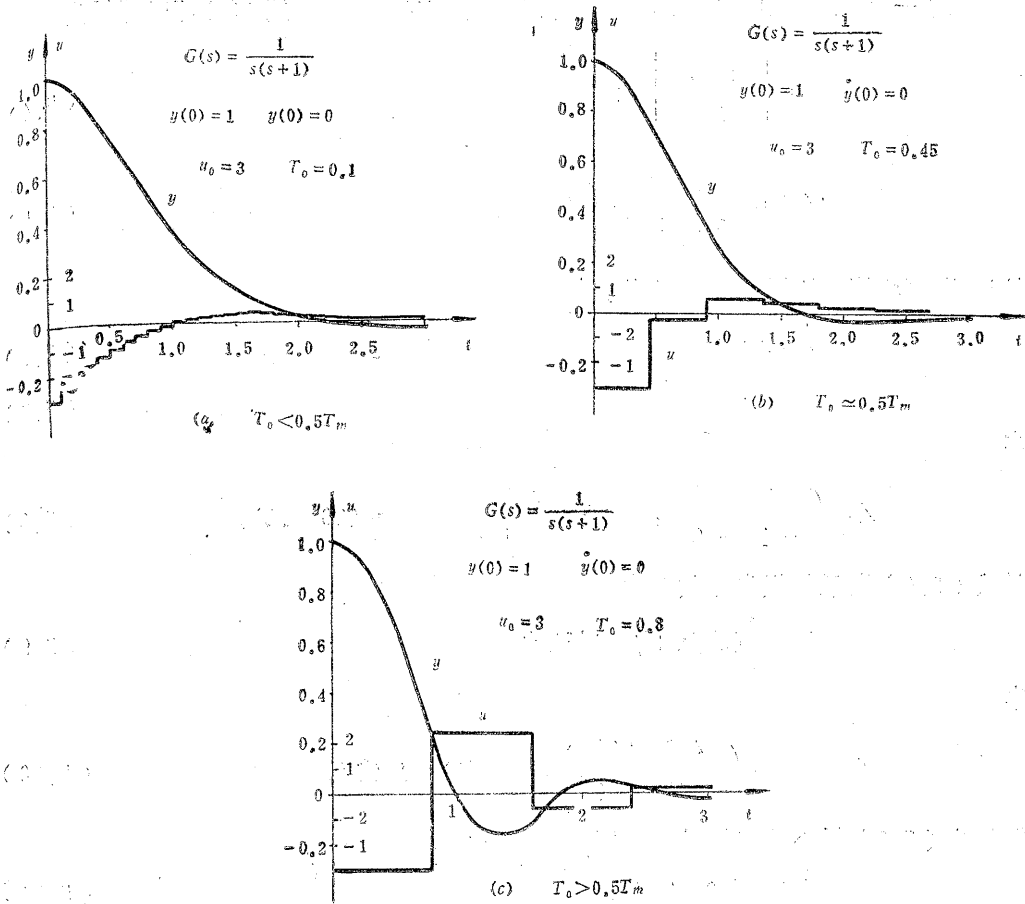


图 4.2 不同采样周期选择时系统的动态响应

五、举 例

给定受控过程

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{s^2 + 2s + 4} \quad (5.1)$$

和最大的输出初始偏移

$$y(0) = y_0 = 1, \quad \dot{y}(0) = 0. \quad (5.2)$$

假定控制变量的幅度受到的限制为

$$|u(t)| \leq u_0 = 0.6, \quad (5.3)$$

要求采用离散的控制器的, 以使得如式 (2.6) 所示的连续损失函数极小。问题是选择采样周期 T_0 及损失函数中的加权系数 p , 使设计出的离散最优控制器能够满足给定条件 (5.2) 和 (5.3), 同时要求给出尽可能好的动态响应 (意即在权衡 $J_y(T_0)$ 和 $J_u(T_0)$ 的

基础上取得尽可能好的折衷)。

根据公式 (3.8) 和 (3.9), 零采样周期情况下的加权系统 $p(0)$ 可以算得为

$$m = \left| \frac{K u_0}{y_0} \right| = 3, \quad (5.4)$$

$$p(0) = \frac{K^2}{m(m+2)} = 1.667. \quad (5.5)$$

受控过程 $G(s)$ 的能控标准形可以表示为

$$\dot{x} = A x + B u, \quad (5.6)$$

$$y = C x, \quad (5.7)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (20 \quad 10). \quad (5.8)$$

于是式 (2.6) 所示的损失函数变为

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + p(0) u^2) dt, \quad (5.9)$$

其中

$$Q = C^T C = \begin{pmatrix} 400 & 200 \\ 200 & 100 \end{pmatrix}, \quad p(0) = 1.667. \quad (5.10)$$

计算使式 (5.9) 极小的连续最优控制器, 结果为

$$L(0) = (12 \quad 7.4). \quad (5.11)$$

根据公式 (3.28), 可以近似地计算出参考采样周期 T_m 为

$$T_m \approx 1.3 \frac{b_n^2}{p[L_1(0) + a_n]^2 L_n(0)} = 0.165. \quad (5.12)$$

根据公式 (4.2) 和 (4.3), 可以选择采样周期和加权系数为

$$T_0 = 0.5 T_m = 0.0825, \quad (5.13)$$

$$p = 0.4 p(0) = 0.667. \quad (5.14)$$

基于这个选择, 可以计算出时间离散控制器 $L^{[4]}$ 。根据给定的初始条件 (5.2), 通过计算机仿真可以得到该系统的动态响应如图 5.1 所示。

从图上看, 上面得到的采样周期和加权系数的选择给出了很好的动态响应, 而且实际控制量的最大值

$$|u(t)|_{\max} = 0.61,$$

非常接近预先给定的控制限 (见式 (5.31))。

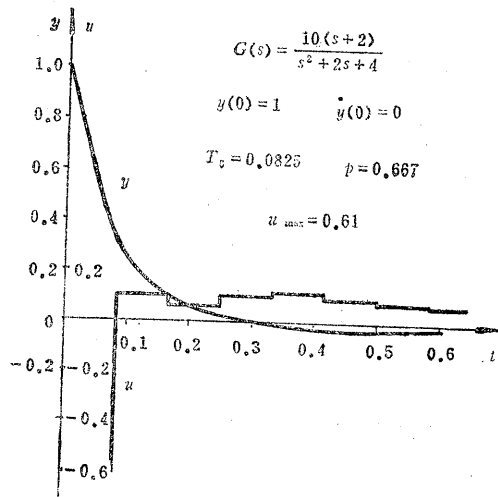


图 5.1 举例系统的动态响应

六、结 束 语

本文给出的结果对于设计时间离散控制器是十分有用的。如果

- 受控过程是单输入、单输出型。
- 要求满意的时间连续的动态响应。
- 控制量的范围受到限制。
- 要求尽可能长的采样周期。

通常，在二次型损失函数中选择加权系数使其满足一定的实际要求是比较困难的。本文中所讨论的实际要求是指控制量的幅度受到限制及给定输出的初始偏移。本文导出了简单而又严格的公式来计算 $p(0)$ 。有趣的是， $p(0)$ 的选择与受控过程的动态特性无关。同时导出了在 $T_c = 0$ 时的导数 $\partial p / \partial T_c$ 。它与 $p(0)$ 一起能够近似地确定出选用不同采样周期时的加权系数 $p(T_c)$ 。于是本文在一定条件下，建立了二次型损失函数中加权系数的选择与对系统的实际要求之间的联系。

在文献中通常认为，系统性能总是随着采样周期的减小变好。本文的结果表明，当控制范围受到限制时，偏移损失随着采样周期增加而减少，控制损失随着采样周期增加而增加。因此，权衡这两种损失，适当的长采样周期甚至可以给出比短采样周期更好的系统性能。

本文提出的依靠权衡偏移损失和控制损失来选择采样周期的办法，在一定程度上可以适用于多输入—多输出的控制系统。作者曾成功地将这个方法应用于一个喷气式运输机的纵向飞行控制^[6]。

附录A 定理 3.1 证明

式 (3.1) 所表示的受控过程 $G(s)$ 可以用能控标准形的状态方程来表示如下:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (A.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (A.2)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (A.3)$$

$$\mathbf{C} = (b_n \ b_{n-1} \ \cdots \ b_1). \quad (A.4)$$

根据式 (A.2) 和 (A.4), 式 (3.2) 所示的损失函数可以表示为

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + p u^2) dt, \quad (A.5)$$

其中

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \begin{pmatrix} b_n^2 & \cdots & b_n b_2 \\ \vdots & & \\ b_1 b_n & \cdots & b_1^2 \end{pmatrix}. \quad (A.6)$$

根据线性系统最优控制的条件^[7]

$$u = -\mathbf{L}\mathbf{x}, \quad (A.7)$$

$$\mathbf{L} = p^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \quad (A.8)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{S} - p^{-1} \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{S} + \mathbf{Q} = 0 \quad (\text{这里 } p \text{ 是标量}). \quad (A.9)$$

根据 (A.7)

$$u(0) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(0). \quad (A.10)$$

参考 (A.1) — (A.4), $\mathbf{y}$ 可以表示成

$$\begin{aligned} y &= b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + \cdots + b_1 x_n \\ &= b_n x_1 + b_{n-1} \dot{x}_1 + \cdots + b_1 x_1^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (A.11)$$

从给定的初始条件 (2.9) 以及式 (A.11), 可以导出

$$x_1(0) = \frac{y(0)}{b_n}, \quad x_2(0) = \cdots = x_n(0) = 0. \quad (A.12)$$

将式 (A.12) 代入 (A.10) 可以得到

$$u(0) = -\frac{L_1 y(0)}{b_n}, \quad (A.13)$$

其中 L_1 是 L 矩阵 ($1 \times n$) 的第一个元素。

$$\text{令 } S_i = (s_{1i} \ s_{2i} \ \cdots \ s_{ni})^T, \quad (A.14)$$

$$A_i = (a_{1i} \ a_{2i} \ \cdots \ a_{ni})^T. \quad (A.15)$$

于是有

$$S = (S_1 \ S_2 \ \cdots \ S_n) = S^T, \quad (A.16)$$

$$A = (A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n). \quad (A.17)$$

从式 (A.8)、(A.16) 和 (A.3) 可以推得

$$L_1 = p^{-1} B^T S_1 = p^{-1} s_{n1}. \quad (A.18)$$

将 (A.16) 和 (A.17) 代入 (A.9), 并比较矩阵方程两边左上角的元素, 可以得到

$$S_1^T A_1 + A_1^T S_1 - p^{-1} S_1^T B B^T S_1 + b_n^2 = 0. \quad (A.19)$$

参考式 (A.3), (A.19) 可化简为

$$-2s_{n1} a_n - p^{-1} s_{n1}^2 + b_n^2 = 0. \quad (A.20)$$

从 (A.18) 和 (A.13) 可以推得

$$s_{n1} = p L_1 = - \frac{p b_n u(0)}{y(0)}. \quad (A.21)$$

式 (A.21) 代入 (A.20) 可得

$$p^{-1} = \frac{u^2(0)}{y^2(0)} - \frac{2u(0)}{K y(0)}, \quad (A.22)$$

其中

$$K = \frac{b_n}{a_n} = G(0). \quad (A.23)$$

证毕。

附录 B 定理 3.2 证明

最优控制器 $L(T_0, p)$ 可以用台劳级数展开为

$$L(T_0, p) = L(0, p) + \left. \frac{\partial L}{\partial T_0} \right|_{T_0=0} T_0 + \cdots. \quad (B.1)$$

考虑 $T_0 \rightarrow 0$ 的极限情况, 式 (B.1) 可以简化为

$$L(T_0, p) = L(0, p) + \left. \frac{\partial L}{\partial T_0} \right|_{T_0=0} T_0. \quad (B.2)$$

利用文献[3]给出的结果

$$\left. \frac{\partial L}{\partial T_0} \right|_{T_0=0} = \frac{1}{2} L(0, p) (A - BL(0, p)), \quad (B.3)$$

从式 (B.2)、(B.3) 以及 (3.15) 和 (3.19) 可以推得

$$L(T_0, p) = L(0, p) + \frac{T_0}{2} \left[L_1(0, p) \cdots L_n(0, p) \right] \begin{pmatrix} 0 & | & \\ \vdots & | & I_{n-1} \\ 0 & | & \\ \hline -a_n - L_1(0, p) & \cdots & -a_1 - L_n(0, p) \end{pmatrix}. \quad (B.4)$$

即

$$L_1(T_0, p) = L_1(0, p) - \frac{T_0}{2} L_n(0, p) (a_n + L_1(0, p)). \quad (B.5)$$

根据 (A.13)

$$L_1(T_0, p) = -\frac{b_n u(0)}{y(0)}. \quad (B.6)$$

由于假定 $u(0)$ 和 $y(0)$ 是常数, 因而

$$L_1(T_0, p) = L_1(T_0, p(T_0)) = L_1(T_0) \quad (B.7)$$

也是常数, 而不随 T_0 而改变. 即

$$\frac{dL_1(T_0)}{dT_0} = 0. \quad (B.8)$$

对方程 (B.5) 两边在 $T_0 = 0$ 时, 求关于 T_0 的导数, 可得

$$0 = -\frac{1}{2} L_n(0, p(0)) [a_n + L_1(0, p(0))] + \frac{\partial L_1(0, p)}{\partial p} \bigg|_{p=p(0)} \cdot \frac{\partial p}{\partial T_0} \bigg|_{T_0=0}. \quad (B.9)$$

即

$$\frac{\partial p}{\partial T_0} \bigg|_{T_0=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_1(0, p)}{\partial p} \bigg|_{p=p(0)} \right)^{-1} L_n(0, p(0)) [a_n + L_1(0, p(0))]. \quad (B.10)$$

根据 (A.18) 和 (A.20)

$$L_1^2(0, p) + 2a_n L_1(0, p) - \frac{b_n^2}{p} = 0. \quad (B.11)$$

求方程 (B.11) 关于 p 在 $p = p(0)$ 的导数

$$\frac{\partial L_1(0, p)}{\partial p} \bigg|_{p=p(0)} = -\frac{b_n^2}{2p^2(0) [L_1(0, p(0)) + a_n]}. \quad (B.12)$$

将 (B.12) 代入 (B.10) 可得

$$\frac{\partial p}{\partial T_0} \bigg|_{T_0=0} = -\frac{p^2(0)}{b_n^2} [L_1(0, p(0)) + a_n]^2 L_n(0, p(0)), \quad (B.13)$$

其中 (根据 (3.8)、(3.9) 和 (3.4))

$$p(0) = \frac{K^2}{m(m+2)}, \quad (B.14)$$

$$m = \left| \frac{K u(0)}{y(0)} \right|, \quad (B.15)$$

$$K = \frac{b_n}{a_n}. \quad (B.16)$$

当受控过程包含积分环节时, 必然有

$$a_n = 0. \quad (B.17)$$

将 (B.17) 代入 (B.13), 以及根据 (B.11) 可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{\partial T_0} \right|_{T_0=0} &= - \frac{p^2(0)}{b_n^2} L_1^2(0, p(0)) L_n(0, p(0)) \\ &= - p(0) L_n(0, p(0)), \end{aligned} \quad (B.18)$$

其中 (根据 (3.10))

$$p(0) = \frac{u^2(0)}{y^2(0)}. \quad (B.19)$$

证毕.

参 考 文 献

- [1] Franklin, G. F. and Powell, J. D., Digital Control of Dynamic Systems. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts Chap. 10 (1980).
- [2] Levis, A. H. et al. On the Behaviour of Optimal Linear Sampled-Data Regulators. Int. J. Control, 13, 2 (1971) 343-361.
- [3] Melzer, S. M. and Kuo, B. C., Sampling Period Sensitivity of the Optimal Sampled-Data Linear Regulator. Automatica 7 (1971), 367-370.
- [4] Sun Zengqi et al., Algorithms for the Design of Optimal Control of Time-Continuous processes Using Long Control and Sampling Intervals. Ph. D. thesis, Chalmers University of Technology, Sweden (1981).
- [5] Sun Zengqi, Computation of Loss Function Derivatives with Respect to Feedback Coefficients and Control System Application. Ph. D. thesis, Chalmers University of Technology, Sweden (1981).

- [6] Sun Zengqi and Qvarnström, B., Aircraft Longitudinal Control by Long Sampling Interval Controllers. Ph.D. thesis, Chalmers University of Technology, Sweden. (1981).
- [7] Bryson, A.E. and Ho, Y.C., Applied Optimal Control. Blaisdell, Waltham, Mass (1969), 152.

ON THE SELECTION OF SAMPLING PERIODS AND WEIGHTING COEFFICIENTS IN TIME- DISCRETE OPTIMAL CONTROL OF TIME-CONTINUOUS PROCESSES

Sun Zengqi

(Qingha University, Beijing)

B. Qvarnström

(Chalmers University of Technology, Sweden)

Abstract

A procedure for the selection of sampling periods and weighting coefficients for the time-discrete optimal control of a time-continuous process is presented. The basis of the selection is, 1) a linear time-discrete controller; 2) a limited range of the control variable; 3) an initial deviation which is given in accordance with the practical requirement to the control system. The performance index of the system is expressed in a time-continuous, quadratic, deviation loss function and a similar control-loss function. Controllers parameters are computed by standard LQ-methods for different sampling periods. The control weighting coefficient in the loss function is chosen so that full use of the control range is obtained, given the initial deviation. The final sampling periods and controller parameters are selected as a compromise between the deviation loss and the control loss. The procedure is especially useful when the longest possible sampling period is required.