

简明高效频率响应算法及应用

吴重光 沈承林

(北京化工学院)

摘 要

本文提出了运用奥奈法则计算频率响应的算法。求 P_m 及 K_g 运用了 $1/3$ 因子步长衰减逼近法。在多变量频率响应计算中, 采用图论技术在复数域运用 Mason 公式, 得到严格求解大规模网络各支路均为高阶且含有纯滞后情况的实用程序。

一、引 言

频率响应法是应用相当广泛的动态分析方法。尤其近年来由英国 H. H. Rosenbrock 教授所提倡的多变量频域设计方法^[1]引起各方人士的关注及应用。

为了利用电子计算机分析规模大、变量多的复杂化工动态过程, 我们首先遇到的困难是没有功能较强、效率较高的算法及相应软件。因此, 自 1976 年以来进行了算法及软件研究与开发。目前, 在频域分析方面基本上具备了一套比较完整的算法及软件。本文仅选择几个主要算法及部分程序加以介绍, 并简要说明软件的应用情况。

二、运用奥奈法则求频率响应

无论求取 SISO 系统还是 MIMO 系统的频率响应都涉及 $G(j\omega)$ 的计算问题。由 $G(s)$ 求取 $G(j\omega)$ 的数值算法, 一般公认并采用美国 E. E. Mitchell 和 C. F. Olsen (1975) 发表的算法及程序^{[2][3]}。实践表明, 运用奥奈法则解决频率响应计算比 Mitchell 法更为有效。为了简化问题, 仅对传递矩阵 $G(s)$ 中一个元素 $G_{ij}(s)$ 进行讨论。 $G_{ij}(s)$ 可表达为式 (1) 所示之高阶含有纯滞后的标准形式。

$$G_{ij}(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \cdot e^{-\tau s}$$

($n \geq m$)

(1)

式 (1) 中, $a_0, a_1, \dots, a_n$ 为传递函数分母 s 域多项式系数; $b_1, b_2, \dots, b_m$ 为传递函数

分子 s 域多项式系数, τ 为纯滞后时间。

求 $G_{ij}(j\omega)$ 的关键是解决 $s = j\omega$ 代入式 (1) 分子及分母 s 域多项式的快速且通用算法问题。本方法与 Mitchell 法都基于二次因子 $(s^2 + \omega_1^2)$ 综合除法, 原理如下。

令 s 域多项式, 即式 (1) 分子或分母为式 (2)。

$$P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n. \quad (2)$$

对欲计算的某一频率值 ω_1 用二次因子 $(s^2 + \omega_1^2)$ 遍除式 (2) 得:

$$P(s) = (s^2 + \omega_1^2)(b_0 s^{n-2} + b_1 s^{n-3} + \dots + b_{n-3} s + b_{n-2}) + b_{n-1} s + b_n. \quad (3)$$

当 $s = j\omega_1$ 时,

$$(s^2 + \omega_1^2) \Big|_{s=j\omega_1} = (-\omega_1^2 + \omega_1^2) = 0.$$

所以, $P(j\omega_1) = b_n + j b_{n-1} \omega_1. \quad (4)$

求式 (3) 运用奥奈法则较简便, (在文献[5]中提到) 法则如下:

欲求得式 (3) 中 b_{n-1} 和 b_n , 必须先求出 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-2}$. 其计算过程恰是一个规律性很强的递推格式, 见式 (5)。

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_1 \\ b_2 &= a_2 - \omega_1^2 b_0 \\ b_3 &= a_3 - \omega_1^2 b_1 \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= a_{n-1} - \omega_1^2 b_{n-3} \\ b_n &= a_n - \omega_1^2 b_{n-2}. \end{aligned} \quad (5)$$

将式 (5) 归纳为式 (6):

$$b_i = a_i - \omega_1^2 b_{i-2}, \quad (6)$$

其中 $0 \leq i \leq n$ 且当 $(i-2) < 0$ 时

$$b_{i-2} = 0.$$

式 (6) 是我们的程序所采用的计算方法。

本方法与 Mitchell 方法相比主要优点是:

- 计算同一个 $P(s)$ 少两次循环。
- 每个循环体中少执行一个条件语句、一次乘法运算、一次加法运算及一次赋值。
- 子程序的结果直接是复数的实部及虚部。
- 程序简明直观, 容易理解。

显然, 系统规模越大节省计算量的优点越突出。

三、求 P_m 及 K_o 快速逼近算法

增益裕量 K_o 及相位裕量 P_m 是频率响应重要指标。经实用考核后, 我们将 [4] 中求

幅值、相角值表与求 K_g 、 P_m 分立的程序改为同时进行, 节省了一半机时。另外改进两次逼近算法为快速衰减逼近法, 比文献 [4]、[6] 的方法速度快、精度高。计算步骤是:

(1) 当计算频率响应值表的某一步, 幅值比 R 小于 1 时进入本程序。

(2) 将当前的频率步长 D 衰减三分之一。采取“退”频的方式计算 ($\omega_1 = \omega_1 - D$) 直到 R 大于 1。

(3) 将 (2) 之步长再衰减三分之一, 以“进”频的方式 ($\omega_1 = \omega_1 + D$) 直到 R 小于 1。

(4) 比较 $|R-1| \leq 10^{-4}$ 否, 成立转 (5), 不成立转 (2)。

(5) 求出 $P_m = 180^\circ + \theta$, θ 为相位差, ω (幅穿频率) $= \omega_1$ 。

以上程序示意框图见图 1。求 K_g 的思路与 P_m 相同。衰减因子采用 1/3 接近一维寻优的 0.618 法, 比 1/2, 1/4, 1/5, ..., 1/100 等因子逼近速度均快。

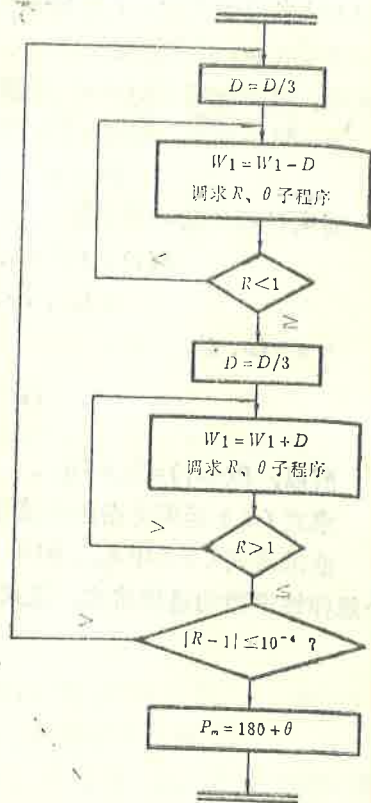


图 1 求 $P_m(K_g)$ 示意框图

四、运用图论技术求取多变量频率响应

图论技术程序化, 为求取多变量复杂网络的频率响应打开了新的途径。主要优点是:

(1) 较好地解决了多环含有纯滞后系统频率响应的通用算法问题; (2) 统一了单变量及多变量频率响应程序; (3) 可以直接向计算机输入信号流程图或方框图, 并自动求出 Nyquist 阵列。为直观地进行多变量频域设计提供了方便条件, (4) 为小机器处理大规模系统提供了可能性。由于本文着重论述频率响应法, 有关图论程序不作全面介绍详见文献 [8]。

所谓图论技术程序化, 简言之, 就是运用电子计算机自动辨识信号流程图或方框图网络中的回路及前向通路, 并自动代入 MASON 公式得到任意指定通道的传输。这种传输既可以是传递函数形式, 也可以是复数 $A + jB$ 形式。

运用图论技术求取多变量复杂网络频率响应有两种方法:

方法一: 对于一个用信号流程图表达的多变量系统, 首先运用图论程序处理, 得到各指定通道传输 $G_{ij}(s)$, 并自动规格化为式 (7) 之形式。然后将式 (7) 作为单通道频率

响应程序的输入，逐一求出多变量 Nyquist 阵列中的各子 Nyquist 图。本方法只要把图论程序与频率响应程序简单地衔接起来即可。

$$G_{ij}(s) = \frac{\sum_{i=1}^m b_i s^{m-i}}{\sum_{j=1}^n a_j s^{n-j}} \quad (n \geq m) \tag{7}$$

方法二：主要特点是将复杂网络中每一支路传输都视为高阶并含有纯滞后项即式（1）之形式。因此，允许直接把方框图输入计算机。

算法简述：对任一频率 ω 取值，首先令 $s = j\omega$ 应用奥奈法则代入各支路，可求出一系列对应各支路复数传输 $X + jY$ 。将这些传输存入一个两列的矩阵之中。调用图论程序开拓出的回路及前向通路结构信息，将矩阵中各复数支路传输代入回路和前向通路，求得前向通路及回路复数传输。最后，在复数域运用 MASON 公式，计算出指定输入节点到输出节点的总复数传输，设为 $A + jB$ 。则该频率值下的幅值、相角由式（8）、

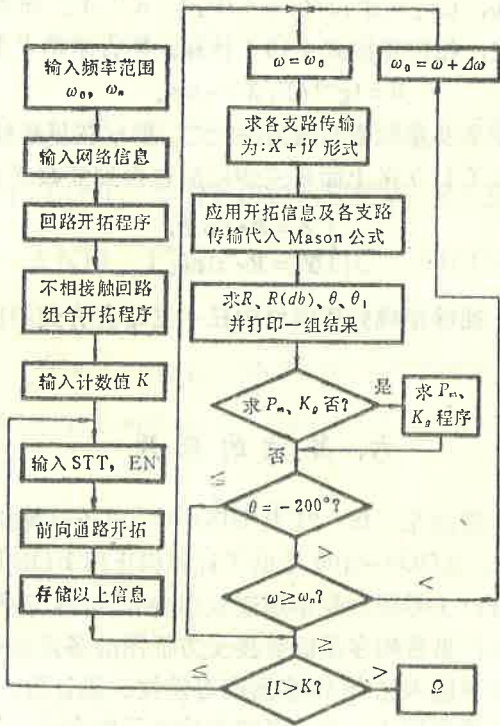


图 2 多变量频率响应程序方法示意框图

(9) 求得.

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (8)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}(B/A) \quad (9)$$

频率 ω 每增加一个步长重复以上步骤, 直到无限频率值, 可求得对应 ω 变化的 R 、 θ 值表. 方法二把图论程序及频率响应程序穿插配合组成一个程序, 程序结构见图 2.

如果将方法二再配合图论程序并应用分割及多级分割技术, 为小型机求解大规模网络频率响应提供了可能性. 方法比较简单, 因为图论程序可以在网络中求得任一节点到另一节点的传输, 如式 (7) 所示. 且方法二之程序能够接受各支路均为高阶的信号流程图. 所以, 只要先用图论程序合并原始流图为简单高阶支路流图, 再运用方法二求频率响应. 这样, 方法二程序中图论部分占用容量较少, 机器的主要容量可用来存储各支路传递函数的系数. 求解更大的网络系统, 还可以交替使用图论程序及方法二程序, 即所谓多级分割的方法.

五、纯滞后的处理方法

与时域分析及根域分析相比较, 频域分析处理纯滞后最简便. 因为将 $s = j\omega$ 代入 $e^{-\tau s}$ 项后幅值比恒为 1、相位差为 $-\tau\omega$. 所以求式 (1) 的频率响应分三步进行. 第一步运用奥奈法则分别求出分子及分母 s 域多项式的复数形式, 设为 $(X_1 + jY_1)$ 及 $(X_2 + jY_2)$. 第二步作复数除法, $(X_1 + jY_1)/(X_2 + jY_2) = X + jY$. 并按公式 (8) 求出幅值比 R . 第三步保持 R 原值, 相位差按式 (10) 计算. 即告求得 R 及 θ .

$$\theta = \text{tg}^{-1}(Y/X) - \omega\tau \quad (10)$$

另外, 图论技术求取多变量频率响应方法之二, 要求在复数域运用 MASON 公式. 支路纯滞后还应通过公式 (11) 在上面第三步以后包含到复数 $X + jY$ 中去.

$$\begin{cases} X = R \cdot \cos\theta, \\ Y = R \cdot \sin\theta. \end{cases} \quad (11)$$

这种算法通用性强, 能够精确处理网络中任一支路含有纯滞后的问题, 不必采用 Pade' 近似.

六、算法的应用

我们应用本文所述的算法在 DJS-21 及 DJS-6 型电子计算机上用 ALGOL-60 语言, 以及在 PDP-11/70、ACOS-400 型电子计算机上用 FORTRAN 语言编写通过了实用程序. 程序分三种: I 号程序是单通道频率响应程序; II 号程序是能接受信号流图的多变量频率响应程序; III 号程序是能够接受方框图的多变量频率响应程序.

本文所述的算法及程序国内已有 50 多所高等院校、设计院、研究院移植或引入. 有些学院还将程序移植于微型机上. 上述各程序除 III 号程序外, 均收集在 BHDF 软件系统^[8]中. 该软件及详细文本可以对用户提供.

参 考 文 献

- [1] Rosenbrock, H. H., Computer Aided Control System Design, Academic Press (1974).
- [2] Mitchell, E. Eugene and Olsen, Charles F., Digital Computation of Frequency Response, Simulation, November (1975), 137—145.
- [3] Meyer, C. R., Michel, J. M., Analysis of Continuous Linear Systems On an IBM5100, Simulation, 34, 2 (1980), 51—61.
- [4] 钱积薪, 吴重光, 自动调节系统的电算方法, 炼油化工自动化, 1 (1979), 1—25.
- [5] 伏龙诺夫, A. A., 自动调整理论基础, 中国工业出版社 (1961).
- [6] Shinnars, S. M., Modern Control System Theory and Application, Addison—wesley Publishing Co. (1978).
- [7] Henley, Ernest J. and Williams, R. A., Graph Theory in Modern Engineering, Academic Press (1973).
- [8] 吴重光、沈承林, BHDF—100 软件文本, I、II、III、IV 卷, 北京化工学院 (1982).

A CONCISE AND EFFICIENT ALGORITHM FOR COMPUTING FREQUENCY RESPONSE AND ITS APPLICATION

Wu Chongguang, Shen Chenglin

(Beijing Institute of Chemical Technology)

Abstract

This paper has put forward a new method of using Onai's law for computing frequency response. A fast and accurate method of changing step size by a factor of 1/3 is provided to find the P_m and K_g . By using graph theory technique, we can solve large scale linear dynamic networks where all paths are of high-order and may contain pure time-delay.